Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean-Marc Deshouillers

Crible d'eratosthène et étoiles isolées

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. nº 3, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 3, 11 p.

30 novembre 1970

CRIBLE D'ERATOSTHÈNE ET ÉTOILES ISOLÉES

par Jean-Marc DESHOUILLERS

0. Introduction.

Nous nous proposons dans cet article de résoudre le problème suivant :

Soient $\{u\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ et $\{v\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ deux k-uplets de nombres relatifs ; soit $\pi_{\{u\},\{v\}}(x)$ (ou $\pi(x)$, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre) le nombre de couples d'entiers positifs $\{m, n\}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(A) $$m \leqslant x \quad \text{et} \quad n \leqslant x ,$$

(B) pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant k$, on a $(m - u_i, n - v_i) > 1$ (1).

Le problème est de montrer qu'il existe une relation de la forme $\pi(x) = \sigma x^2 + o(x^2)$, i. e. l'ensemble des couples de nombres satisfaisant les conditions ci-dessus admet une densité positive par rapport à l'ensemble des couples d'entiers.

La méthode utilisée est une adaptation du crible d'Eratosthène dont le principe est énoncé dans le lemme 1.

L'exposition de la méthode constitue le premier paragraphe ; le second est consacré à l'étude du terme principal et du terme erreur ; dans le troisième paragraphe, nous appliquerons les résultats obtenus à la résolution d'un problème posé par B. SAFFARI (communication orale).

1. Le crible d'Eratosthène.

Dans ce paragraphe, ainsi que dans le suivant, les k-uplets $\{u\}$ et $\{v\}$ sont supposés fixés.

LEMME 1 (Principe du crible). - *Soient $\mathcal{E}$ un ensemble, et $\alpha, \beta, \ldots$ une famille de propriétés concernant les éléments de $\mathcal{E}$. Soient N_α le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$ possédant la propriété α, $N_{\alpha\beta}$ le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$ possédant les propriétés α et β, etc. Alors, le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$ possédant au moins*

---

(1) Dans tout cet article, $\{m, n\}$ désigne le couple formé par les entiers m et n ; (m, n) désigne leur p. g. c. d., tandis que $[m, n]$ représente leur p. p. c. m. Si n est différent de zéro, nous conviendrons que $(n, 0) = (0, n) = n$.

<u>l'une des propriétés</u> α , β , ... <u>est</u>

$$N_\alpha + N_\beta + \dots - N_{\alpha\beta} - N_{\beta\gamma} - \dots + N_{\alpha\beta\gamma} + \dots \ .$$

Cette formulation du principe du crible est équivalente au théorème 260 de HARDY et WRIGHT (cf. [1], p. 233).

Pour notre problème, nous prendrons pour ensemble $\mathcal{E}$, l'ensemble des couples d'entiers $\{m , n\}$ tels que $m \leqslant x$ et $n \leqslant x$.

Soit $\{a\} = \{a_1 , \dots , a_k\}$ un k-uplet de nombres entiers. Nous dirons qu'un couple d'entiers $\{m , n\}$ appartenant à $\mathcal{E}$ possède la propriété $\mathcal{P}\{a\}$, si, pour tout entier i compris entre 1 et k , on a $a_i \mid (m + u_i , n + v_i)$. Soit $\pi(x ; a_1 , \dots , a_k)$ le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$ possédant la propriété $\mathcal{P}\{a\}$.

Le problème que nous nous proposions d'étudier peut maintenant se formuler de la façon suivante :

Trouver le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$ possédant au moins une propriété $\mathcal{P}\{p\}$, le k-uplet $\{p\}$ étant constitué par des nombres premiers.

Il nous faut savoir maintenant ce que sont les propriétés $\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$, ... (avec les notations du lemme 1) ; cela nous sera fourni par le résultat suivant :

LEMME 2. - <u>Soient</u> $\{p\}$, $\{q\}$, ... <u>une famille finie de</u> k-<u>uplets. L'ensemble des couples d'entiers possédant les propriétés</u> $\mathcal{P}\{p\}$, $\mathcal{P}\{q\}$, ... <u>est l'ensemble des couples d'entiers possédant la propriété</u> $\mathcal{P}\{a\}$ (<u>où</u> $a_i = [p_i , q_i , \dots]$).

Il suffit de constater que, pour tout indice i , les congruences

$$(m + u_i , n + v_i) \equiv 0 \pmod{p_i} , \qquad (m + u_i , n + v_i) \equiv 0 \pmod{q_i} , \qquad \dots$$

sont équivalentes à la congruence

$$(m + u_i , n + v_i) \equiv 0 \pmod{[p_i , q_i , \dots]} \ .$$

En particulier, si les k-uplets $\{p\}$, $\{q\}$, ... sont constitués par des nombres premiers, le k-uplet $\{a\}$, qui en résulte, est constitué par des nombres "squarefree" distincts de l'unité.

Remarquons maintenant que $\pi(x ; a_1 , \dots , a_k)$ ne peut être positif que s'il existe un couple de nombres entiers $\{m , n\}$ tel que, pour tout indice i , on a $a_i \mid (m + u_i , n + v_i)$, c'est-à-dire que les nombres a_i doivent vérifier

(1) $$(a_i , a_j) \mid (|u_i - u_j| , |v_i - v_j|) \ ,$$

pour tout couple d'indices distincts i et j . Donc, seuls sont intéressants <u>les</u>

k-uplets $\{a\}$ constitués de nombres "squarefree" distincts de l'unité qui satisfont la condition (1) ; un tel k-uplet sera dit "élémentaire". Nous dirons qu'un k-uplet est "premier", s'il est élémentaire et constitué par des nombres premiers.

Appliquons maintenant le lemme 1 à notre problème :

$$(2) \qquad \pi(x) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \sum \pi(x \,;\, [p_{1,1}, \dots, p_{1,r}], \dots, [p_{k,1}, \dots, p_{k,r}]) ,$$

la seconde somme étant étendue à toutes les familles de r k-uplets distincts constitués par des nombres premiers (distincts ou non).

Soit $\{a_1, \dots, a_k\}$ un k-uplet constitué par des nombres "squarefree" distincts de l'unité ; cherchons combien de fois le terme $\pi(x \,;\, a_1, \dots, a_k)$ intervient dans la seconde somme. Soient $p_{i,1}, \dots, p_{i,\omega(a_i)}$ les facteurs premiers de a_i ; il faut savoir combien on peut former de familles de r k-uplets $\{q_{1,j}, \dots, q_{k,j}\}$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $q_{i,j}$ est un facteur premier de a_i ;

(ii) $[q_{i,1}, \dots, q_{i,r}] = a_i$.

Nous sommes amenés à considérer le problème combinatoire suivant :

LEMME 3. - Soient $A_1, A_2, \dots, A_k$ k ensembles non vides dont tous les éléments sont distincts, et soit s_i le nombre des éléments de A_i ; appelons $\Gamma^r_{(s_1,\dots,s_k)}$ le nombre de familles de r k-uplets $a_{1,j}, \dots, a_{k,j}$ (où j varie de 1 à r) distincts deux à deux, tels que :

(i) Chaque k-uplet soit un élément de $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$;

(ii) $\bigcup_{j=1}^{r} \{a_{i,j}\} = A_i$, pour tout i compris entre 1 et k .

Alors,

$$\Gamma^r_{(s_1,\dots,s_k)} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=m \\ 0\leq m_i<s_i}} \binom{s_1}{m_1} \dots \binom{s_k}{m_k} \binom{(s_1-m_1)\dots(s_k-m_k)}{r} .$$

D'après le lemme 1, $\Gamma^r_{(s_1,\dots,s_k)}$ est égal au nombre de familles de r k-uplets, moins le nombre de celles pour lesquelles $\bigcup_{i,j} \{a_{i,j}\} = \bigcup_i A_i$ moins un élément, plus le nombre de celles pour lesquelles $\bigcup_{i,j} \{a_{i,j}\} = \bigcup_i A_i$ moins deux éléments,

...

plus $(-1)^m$ fois le nombre de celles pour lesquelles $\bigcup_{i,j} \{a_{i,j}\} = \bigcup_i A_i$ moins

m éléments,

...

Or ce dernier nombre peut se calculer de la manière suivante : On se donne une partition de m $(m = m_1 + m_2 + \dots + m_k)$ telle que $0 \leqslant m_i < s_i$; on choisit m_i éléments dans A_i (il y a $\binom{s_1}{m_1} \dots \binom{s_k}{m_k}$ choix possibles), et on cherche combien il y a de k-uplets distincts ne contenant aucun des éléments ainsi choisis ; il y en a $(s_1 - m_1) \dots (s_k - m_k)$; le nombre de familles de r tels k-uplets est alors $\binom{(s_1 - m_1) \dots (s_k - m_k)}{r}$, d'où l'on déduit le lemme 3.

Calculons maintenant la somme $\sum\limits_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1}\, \Gamma^r_{(s_1,\dots,s_k)}$, dont nous aurons besoin par la suite :

LEMME 4. - $\sum\limits_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1}\, \Gamma^r_{(s_1,\dots,s_k)} = (-1)^{k+s_1+\dots+s_k}$.

En utilisant l'expression de $\Gamma^r_{(s_1,\dots,s_k)}$ fournie par le lemme 3, on constate que, en posant

$$R = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1}\, \Gamma^r_{(s_1,\dots,s_k)} \quad ,$$

$$R = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=m \\ 0\leqslant m_i<s_i}} \binom{s_1}{m_1} \dots \binom{s_k}{m_k} \binom{(s_1 - m_1) \dots (s_k - m_k)}{r} \quad ,$$

$$R = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=m \\ 0\leqslant m_i<s_i}} \binom{s_1}{m_1} \dots \binom{s_k}{m_k} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \binom{(s_1 - m_1) \dots (s_k - m_k)}{r} \quad ,$$

$$R = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=m \\ 0\leqslant m_i<s_i}} \binom{s_1}{m_1} \dots \binom{s_k}{m_k} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r+1} \binom{(s_1 - m_1) \dots (s_k - m_k)}{r} + 1 \right\} .$$

La somme qui figure dans l'accolade vaut $-(1-1)^{(s_1-m_1)\dots(s_k-m_k)}$, et donc est nulle ; d'où l'on tire

$$R = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=m \\ 0\leqslant m_i<s_i}} (-1)^{m_1} \binom{s_1}{m_1} \dots (-1)^{m_k} \binom{s_k}{m_k} \quad ,$$

$$R = \prod_{i=1}^{k} \{ \sum_{m_i=0}^{s_i-1} (-1)^{m_i} \binom{s_i}{m_i} \} = \prod_{i=1}^{k} \{ \sum_{m_i=0}^{s_i} (-1)^{m_i} \binom{s_i}{m_i} + (-1)^{s_i+1} \} ,$$

$$R = \prod_{i=1}^{k} \{ (1-1)^{s_i} + (-1)^{s_i+1} \} = \prod_{i=1}^{k} (-1)^{s_i+1} = (-1)^{s_1+\dots+s_k+k} .$$

Le lemme 4 est donc démontré.

La formule (2) peut alors s'écrire sous la forme (3) :

$$(3) \qquad \pi(x) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \sum \Gamma^{r}_{(\omega(a_1),\dots,\omega(a_k))} \pi(x ; a_1 , \dots , a_k) ,$$

la seconde somme étant étendue à tous les k-uplets $a = a_1 , \dots , a_k$ constitués par des nombres "squarefree" distincts de l'unité.

Du fait que $\pi(x ; a_1 , \dots , a_k) = 0$ si le k-uplet $\{a\}$ n'est pas élémentaire, on a

$$\pi(x) = \sum_{\{a\} \text{ élém.}} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \Gamma^{r}_{(\omega(a_1),\dots,\omega(a_k))} \pi(x ; a_1 , \dots , a_k) .$$

D'après le lemme 4, on trouve pour $\pi(x)$ l'expression suivante :

$$(4) \qquad \pi(x) = (-1)^{k} \sum_{\{a\} \text{ élém.}} (-1)^{\omega(a_1)+\dots+\omega(a_k)} \pi(x ; a_1 , \dots , a_k) .$$

2. Utilisation de la formule (4).

Nous allons maintenant évaluer $\pi(x)$, d'après la formule (4), en séparant les termes $\pi(x ; a_1 , \dots , a_k)$ pour lesquels $[a_1 , \dots , a_k] \leqslant x$ et ceux pour lesquels $[a_1 , \dots , a_k] > x$.

LEMME 5. - Si $\{a_1 , \dots , a_k\}$ est un k-uplet élémentaire tel que $[a_1 , \dots , a_k] \leqslant x$, on a

$$\left| \pi(x ; a_1 , \dots , a_k) - \frac{x^2}{[a_1 , \dots , a_k]^2} \right| \leqslant \frac{3x}{[a_1 , \dots , a_k]} .$$

Soit $\{m , n\}$ une solution du système de congruences

$$(m + u_i , n + v_i) = 0 \pmod{a_i} ;$$

alors, $(m + \mu[a_1 , \dots , a_k] , n + \nu[a_1 , \dots , a_k]) = 0 \pmod{a_i}$, pour tout i compris entre 1 et k , et tous μ et ν entiers.

Par ailleurs, le système $(m + u_i \, , \, n + v_i) = 0 \pmod{a_i}$ admet une seule solution $\{m \, , \, n\}$, lorsque m et n varient chacun dans un intervalle formé par $[a_1 \, , \, \dots \, , \, a_k]$ entiers consécutifs, et lorsque a est élémentaire ; on en déduit :

$$\left(\frac{x}{[a_1 \, , \, \dots \, , \, a_k]} - 1\right)^2 \leqslant \pi(x \, ; \, a_1 \, , \, \dots \, , \, a_k) \leqslant \left(\frac{x}{[a_1 \, , \, \dots \, , \, a_k]} + 1\right)^2 \; ;$$

le lemme 5 se déduit alors aisément de cet encadrement.

LEMME 6. - Si le k-uplet $\{a\}$ est élémentaire, on a

$$K^{-1} \, a_1 \dots a_k \leqslant [a_1 \, , \, \dots \, , \, a_k] \leqslant a_1 \dots a_k \, ,$$

$$\text{avec } K = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (|u_i - u_j| \, , \, |v_i - v_j|) \, .$$

La majoration est triviale ; la minoration s'obtient en démontrant par récurrence que

$$[a_1 \, , \, \dots \, , \, a_k] \geqslant (a_1 \dots a_k) \Big/ \Big(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (a_i \, , \, a_j) \Big) \, .$$

Si $k = 2$, il y a égalité ; si $k > 2$, on a

$$[a_1 \, , \, \dots \, , \, a_k] = [[a_1 \, , \, \dots \, , \, a_{k-1}] \, , \, a_k] = \frac{[a_1 \, , \, \dots \, , \, a_{k-1}] . a_k}{([a_1 \, , \, \dots \, , \, a_{k-1}] \, , \, a_k)}$$

$$\geqslant (a_1 \dots a_k) \Big/ \Big(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k-1} (a_i \, , \, a_j) \prod_{1 \leqslant i < k} (a_i \, , \, a_k) \Big) \, ,$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que

$$([a_1 \, , \, \dots \, , \, a_{k-1}] \, , \, a_k) \leqslant (a_1 \, , \, a_k) \dots (a_{k-1} \, , \, a_k) \, .$$

D'après le lemme 5, on peut écrire

$$(-1)^k \sum_{\substack{\{a\} \text{ élém.} \\ [a_1, \dots, a_k] \leqslant x}} (-1)^{\omega(a_1) + \dots + \omega(a_k)} \, \pi(x \, ; \, a_1 \, , \, \dots \, , \, a_k)$$

$$= x^2 (-1)^k \sum_{\substack{\{a\} \text{ élém.} \\ [a_1, \dots, a_k] \leqslant x}} \frac{(-1)^{\omega(a_1) + \dots + \omega(a_k)}}{[a_1 \, , \, \dots \, , \, a_k]^2} + 3\theta x \sum_{\substack{\{a\} \text{ élém.} \\ [a_1, \dots, a_k] \leqslant x}} \frac{1}{[a_1 \, , \, \dots \, , \, a_k]} \, ,$$

où θ est un nombre réel compris entre -1 et $+1$.

LEMME 7 (Etude du terme principal).

$$\sum_{\substack{\{a\}\text{ élém.}\\ [a_1,\dots,a_k]\leqslant x}} \frac{(-1)^{k+\omega(a_1)+\dots+\omega(a_k)}}{[a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_k]^2} = \sum_{\{a\}\text{ élém.}} \frac{(-1)^{k+\omega(a_1)+\dots+\omega(a_k)}}{[a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k]^2} + O(x^{-1}(\log x)^{k-1})\ ,$$

<u>où le signa du second membre est absolument sommable.</u>

La famille écrite dans le second membre est absolument sommable, car on peut majorer la famille des valeurs absolues par $K^2(\zeta(2))^k$, en utilisant le lemme 6.

Etudions le terme "reste" de cette famille :

$$\left|\sum_{\substack{\{a\}\text{ élém.}\\ [a_1,\dots,a_k]>x}} \frac{(-1)^{k+\omega(a_1)+\dots+\omega(a_k)}}{[a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k]^2}\right| \leqslant \sum_{\substack{\{a\}\text{ élém.}\\ a_1\cdots a_k>x}} \frac{K^2}{(a_1\ \dots\ a_k)^2}$$

$$\leqslant \sum_{n_1\cdots n_k>x} \frac{K^2}{n_1^2\ \dots\ n_k^2} = K^2 \sum_{n_1\cdots n_k>x} \frac{1}{n_1^2\ \dots\ n_k^2}\ .$$

Nous allons maintenant démontrer, par induction sur k , que la dernière somme est $O(x^{-1}(\log x)^{k-1})$.

Si $k = 1$, la comparaison de la série $\sum_{n>x} 1/n^2$ et de l'intégrale $\int_x^\infty du/u^2$ montre qu'il existe un nombre réel positif c tel que, pour tout nombre réel x supérieur à l'unité, on ait $\sum_{n>x} 1/n^2 \leqslant c/x$.

Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour $k - 1$; montrons-la pour k :

$$\sum_{n_1\cdots n_k>x} \frac{1}{n_1^2\ \dots\ n_k^2} = \sum_{n_1\cdots n_{k-1}>x} \frac{1}{n_1^2\ \dots\ n_{k-1}^2} \sum_{n_k>x/(n_1\cdots n_{k-1})} \frac{1}{n_k^2}$$

$$+ \sum_{1\leqslant n_1\cdots n_{k-1}\leqslant x} \frac{1}{n_1^2\ \dots\ n_{k-1}^2} \sum_{n_k>x/(n_1\cdots n_{k-1})} \frac{1}{n_k^2}$$

$$\leqslant \zeta(2) \sum_{n_1\cdots n_{k-1}>x} \frac{1}{n_1^2\ \dots\ n_{k-1}^2} + \frac{c}{x}\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant x} \frac{1}{n}\right)^{k-1}\ .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, le premier terme est $O(x^{-1}(\log x)^{k-2})$; le second est $O(x^{-1}(\log x)^{k-1})$; cela démontre le lemme 7.

LEMME 8 (Etude du premier terme "erreur").

$$\sum_{\substack{\{a\}\ \text{élém.} \\ [a_1,\dots,a_k]\leqslant x}} \frac{x}{[a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k]} = O(x(\log x)^k) \quad .$$

En effet,

$$\sum_{\substack{\{a\}\ \text{élém.} \\ [a_1,\dots,a_k]\leqslant x}} \frac{1}{[a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k]}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\{a\}\ \text{élém.} \\ a_1\cdots a_k\leqslant Kx}} \frac{K}{a_1\ \dots\ a_k} \leqslant K \sum_{n_1\cdots n_k\leqslant Kx} \frac{1}{n_1\ \dots\ n_k} \leqslant K\Big(\sum_{n\leqslant Kx} \frac{1}{n}\Big)^k$$

$$= O((\log x)^k) \quad .$$

LEMME 9 (Etude du second terme "erreur").

$$\sum_{\substack{\{a\}\ \text{élém.} \\ [a_1,\dots,a_k]> x}} \pi(x\ ;\ a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k) = O(x(\log x)^{2^k-1}) \quad .$$

Commençons par remarquer que $\pi(x\ ;\ a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)$ ne peut valoir que 0 ou 1, lorsque $\{a\}$ est un k-uplet élémentaire tel que $[a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k] > x$ (cf. la démonstration du lemme 5).

Soit alors m un nombre compris entre 1 et x, tel que tous les $m - u_i$ soient positifs ; soit $d(m - u_i)$ le nombre de diviseurs de $m - u_i$; on peut former au plus $\prod_{i=1}^{k} d(m - u_i)$ k-uplets $\{b\}$ tels que $b_i \mid m - u_i$ pour tout i, donc au plus $\prod_{i=1}^{k} d(m - u_i)$ k-uplets $\{a\}$ élémentaires tels que $a_i \mid m - u_i$ et tels que $[a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k] > x$. A chacun de ces k-uplets correspond au plus un nombre n, tel que $a_i \mid n - v_i$ pour tout i compris entre 1 et k. Donc

$$\sum_{\substack{\{a\}\ \text{élém.} \\ [a_1,\dots,a_k]> x}} \pi(x\ ;\ a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k) \leqslant + \sup(u_i\ ,\ 0).x + \sum_{\sup(u_i,0)<m<x}\ \prod_{i=1}^{k} d(m - u_i) \quad .$$

En vertu de l'inégalité $t_1\ \dots\ t_k \leqslant t_1^k + t_2^k + \dots + t_k^k$, valable pour des nombres réels positifs, on a

$$\sum_{\substack{\{a\}\ \text{élém.} \\ [a_1,\dots,a_k]> x}} \pi(x\ ;\ a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k) = O(x) + O\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant x} (d(n))^k\Big) = O(x(\log x)^{2^k-1}) \quad ,$$

d'après un résultat classique de S. RAMANUJAN (cf. [2], p. 134).

En regroupant les lemmes 7, 8, et 9, on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 1.

$$\pi_{\{u\},\{v\}}(x) = x^2(-1)^k \sum \frac{(-1)^{\omega(a_1)+\dots+\omega(a_k)}}{[a_1 , \dots , a_k]^2} + O(x(\log x)^{2^k-1}) \quad ,$$

où la somme est étendue aux k-uplets $\{a\}$ élémentaires relativement à $\{u\}$ et $\{v\}$.

Remarque 1. - La même méthode, combinée avec le résultat de E. BOMBIERI sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques, conduirait très certainement au résultat suivant : Soit $\pi'_{\{u\},\{v\}}(x)$ le nombre de couples $\{m , n\}$ constitués par des nombres premiers, et satisfaisant les conditions (A) et (B) du paragraphe 0 ; alors

$$\pi'_{\{u\},\{v\}}(x) = (\sigma + o(1))x^2.(\log x)^{-2} \quad .$$

Remarque 2. - La relation (4) peut s'écrire plus simplement, si l'on pose $\mu(a_1 , \dots , a_k) = \prod_{i=1}^{k} \mu(a_i)$, où $\mu(n)$ est la fonction de Möbius. On peut généraliser directement le lemme 1 à l'aide de cette fonction ; cela ne semble présenter qu'un intérêt d'exposition, car il faut quand même effectuer les calculs des lemmes 3 et 4.

3. Etoiles isolées dans l'ensemble des couples d'entiers à coordonnées premières entre elles.

Définitions (d'après B. SAFFARI). - Nous appellerons univers, tout sous-ensemble de $\underline{N} \times \underline{N}$ (ensemble de couples d'entiers).

Un élément d'un univers donné est appelé une étoile.

Un univers étant donné, une étoile est dite isolée dans cet univers, si aucun des huit points de $\underline{N} \times \underline{N}$ voisins de cette étoile n'appartient à l'univers considéré.

Considérons l'univers des points à coordonnées premières entre elles. L'ensemble des étoiles isolées de cet univers est égal à l'ensemble des couples d'entiers m , n pour lesquels on a les relations (S) moins l'ensemble des couples d'entiers pour lesquels on a les relations (S) et (T), avec

$$(S)\quad \begin{cases} (m+1\,,\,n) > 1\ ;\quad (m+1\,,\,n+1) > 1\ ;\quad (m\,,\,n+1) > 1\ , \\ (m-1\,,\,n+1) > 1\ ;\quad (m-1\,,\,n) > 1\ , \\ (m-1\,,\,n-1) > 1\ ;\quad (m\,,\,n-1) > 1\ ;\quad (m+1\,,\,n-1) > 1\ , \end{cases}$$

$$(T)\qquad \{(m\,,\,n) > 1\ .$$

Il résulte du théorème 1 que chacun de ces ensembles admet une densité ; donc, si l'on appelle $\mathcal{E}(x)$ le nombre des étoiles isolées de l'univers considéré à coordonnées inférieures à x (x réel positif fixé), il existe un nombre réel σ , tel que l'on a le résultat suivant.

THÉORÈME 2. - $\mathcal{E}(x) = \sigma x^2 + O(x(\log x)^{255})$.

Remarque 3 (sur la détermination de σ). - σ peut s'exprimer comme combinaison linéaire à coefficients rationnels de produits infinis $\prod_{p>2}\left(1 - \frac{k}{p^2}\right)$ $(1 \leqslant k \leqslant 8)$. Des calculs numériques, effectués par J.-L. NICOLAS sur ordinateur, montrent que $\sigma \# 33.10^{-6}$, c'est-à-dire que l'on trouve en moyenne une étoile isolée dans un carré de côté 175 .

Remarque 4. - On peut montrer de la même manière que l'ensemble des étoiles extra-galactiques (i. e. des étoiles telles qu'aucune des 24 voisines ne soit dans l'univers considéré) admet une densité par rapport à l'univers, etc.

Remarque 5. - Si la conclusion de la remarque 1 est vraie, l'ensemble des étoiles isolées, toujours dans le même univers, à coordonnées premières, admet une densité positive par rapport à l'ensemble des étoiles à coordonnées premières.

Remarque 6. - L'exposant 255 qui figure dans le théorème 2 peut être amélioré, en utilisant des résultats du genre

$$\sum_{n\leqslant x} d(n)\ d(n+1) = O(x(\log x)^2)\quad ,$$

alors que nous avons estimé cette somme par

$$\sum_{n\leqslant x} d(n)\ d(n+1) \leqslant \sum_{n\leqslant x} [(d(n))^2 + (d(n+1))^2] = O(x(\log x)^3)\quad .$$

Quoi qu'il en soit, il est assez aisé de montrer que le terme "erreur" du théorème 2 est $\Omega(x)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers. 3rd edition. - Oxford, The Clarendon Press, 1954.

[2] RAMANUJAN (S.). - Collected papers. - Cambridge, at the University Press, 1927.

(Texte reçu le 30 juin 1971)

Jean-Marc DESHOUILLERS
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
17 rue Descartes
75 - PARIS 05