Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

JEAN LAGRANGE

Cinq nombres dont les sommes deux à deux sont des carrés

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 20, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A14_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 20, 10 p.

19 avril 1971

CINQ NOMBRES DONT LES SOMMES DEUX A DEUX SONT DES CARRÉS

par Jean LAGRANGE

Dans "Quelques problèmes de la théorie des nombres", P. ERDÖS a posé le problème suivant (*) :

Soit n un entier positif ; peut-on trouver n entiers distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que toutes les sommes $x_i + x_j$ $(i \neq j)$ soient des carrés ?

L'objet de cet exposé est de montrer que la réponse est affirmative pour $n \leqslant 5$.

1. Généralités.

On a les propriétés suivantes :

(a) Il existe n_0 $(n_0 \in \underset{\sim}{N} \cup \{\infty\})$ tel que le problème ait une solution pour $n \leqslant n_0$ et n'en ait pas pour $n > n_0$.

La valeur de n_0 n'est pas connue. Toutefois, si n_0 est infini, il n'existe pas de suite infinie $(x_1, x_2, \ldots)$ telle que, pour tout n , $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit solution du problème (le nombre $x_1 - x_2$ aurait une infinité de diviseurs).

(b) Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une solution, un des x_i au plus est négatif.

Si tous les x_i sont positifs, on dira que la solution est positive.

(c) Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, avec $n \geqslant 3$, est une solution, un des x_i au plus est impair.

(d) Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une solution, on obtient encore une solution en multipliant ou en divisant tous les x_i par un même carré. Une solution sera dite primitive, si le p. g. c. d. des x_i est un nombre "quadratfrei". Une solution numérique sera toujours écrite sous forme primitive.

Pour $n \geqslant 3$, une solution est primitive si, et seulement si, le p. g. c. d. des x_i est 1 ou 2 .

On va montrer que, pour $n \leqslant 5$, le problème a une infinité de solutions primitives. Il suffit évidemment d'étudier le cas $n = 5$; cependant, nous allons commencer par donner une solution complète des cas $n = 3$ et $n = 4$.

2. Le cas $n = 3$.

On doit résoudre le système :

(*) Voir le problème 40, p. 110 de l'article de P. ERDÖS paru dans : "Monographies de l'Enseignement mathématique", Genève, n° 6, p. 81-135.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = a_1^2 \ , \\ x_3 + x_1 = a_2^2 \ , \\ x_1 + x_2 = a_3^2 \ . \end{cases}$$

La solution est :

$$\begin{cases} x_1 = (a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)/2 \ , \\ x_2 = (a_3^2 + a_1^2 - a_2^2)/2 \ , \\ x_3 = (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)/2 \ . \end{cases}$$

On déduit de ces formules les affirmations faites au paragraphe 1 (c) et au paragraphe 1 (d) pour $n \geqslant 3$.

3. Le cas $n = 4$.

On doit résoudre le système

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = a_1^2 \ , & x_1 + x_4 = b_1^2 \ , \\ x_3 + x_1 = a_2^2 \ , & x_2 + x_4 = b_2^2 \ , \\ x_1 + x_2 = a_3^2 \ , & x_3 + x_4 = b_3^2 \ . \end{cases}$$

Pour une solution, on a

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2 \ .$$

S admet trois décompositions en somme de deux carrés.

Réciproquement, si S admet trois décompositions en somme de deux carrés, on en déduit une, et en général deux solutions, la seconde étant obtenue en échangeant a_3 et b_3 si $a_i^2 \neq b_i^2$ $(i = 1 , 2 , 3)$.

Pour avoir des solutions entières, on remplacera éventuellement S par $4S$.

De façon plus précise, si

$$S = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \ , \qquad p_i \equiv 1 \pmod 4 \ , \quad p_i \ \text{premier} \ ,$$

on sait que $r_2(S) = 4(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ ($r_2(S)$ est le nombre total des décompositions de S en somme de deux carrés, deux décompositions étant distinctes si elles diffèrent par l'ordre ou par les signes). Il est inutile de mettre dans S

des facteurs premiers congrus à $-1 \pmod 4$ qui donneraient des solutions non primitives.

On obtiendra toutes les solutions du problème par la méthode suivante.

On prend $T = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, $p_i \equiv 1 \pmod 4$, p_i premier, avec

$$(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) \geqslant 6 , \qquad \text{si } T \text{ n'est pas un carré} ,$$

$$(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) \geqslant 5 , \qquad \text{si } T \text{ est un carré} .$$

Chaque triple décomposition de :

$S = T$, donne 1 solution ;

$S = 4T$, donne 1 solution ;

$S = 8T$, donne 2 solutions, sauf si une décomposition est faite de deux carrés égaux, auquel cas on obtient une seule solution.

4. Le cas $n = 5$.

On cherche, pour $n = 4$, deux solutions du problème ayant trois nombres en commun : (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) et (x_1 , x_2 , x_3 , x_5) .

On ajoutera ensuite la condition " $x_4 + x_5$ est un carré".

On va écrire des solutions en nombres rationnels, on en déduira immédiatement des solutions entières.

On doit d'abord résoudre le système

$$(1) \qquad \begin{cases} x_2 + x_3 = a_1^2 , & x_1 + x_4 = b_1^2 , & x_1 + x_5 = c_1^2 , \\ x_3 + x_1 = a_2^2 , & x_2 + x_4 = b_2^2 , & x_2 + x_5 = c_2^2 , \\ x_1 + x_2 = a_3^2 , & x_3 + x_4 = b_3^2 , & x_3 + x_5 = c_3^2 . \end{cases}$$

Les conditions de compatibilité sont

$$(2) \qquad \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2 , \\ a_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + c_3^2 . \end{cases}$$

La solution générale de (2) dépend de quatre paramètres x , y , u , v . Elle est donnée par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} a_1 = uvK - L = xyM - N\ , & a_2 = uvK + L\ , & a_3 = xyM + N\ , \\ b_1 = uK + vL = xM + yN\ , & b_2 = uK - vL\ , & b_3 = xM - yN\ , \\ c_1 = vK + uL = yM + xN\ , & c_2 = vK - uL\ , & c_3 = yM - xN\ , \end{cases}$$

où K , L , M , N sont donnés par

$$(4)\qquad \begin{cases} K = ux(1 + y^2) - vy(1 + x^2) + y^2 - x^2\ , \\ L = uy(1 + x^2) - vx(1 + y^2) + uv(y^2 - x^2)\ , \\ M = yv(1 + u^2) - xu(1 + v^2) + u^2 - v^2\ , \\ N = yu(1 + v^2) - xv(1 + u^2) + xy(u^2 - v^2)\ . \end{cases}$$

Les différentes étapes du calcul sont les suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \dfrac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = v\ , & \dfrac{a_1 + a_2}{c_1 + c_2} = \dfrac{c_1 - c_2}{a_2 - a_1} = u\ , \\[2ex] \dfrac{a_1 + a_3}{b_1 + b_3} = \dfrac{b_1 - b_3}{a_3 - a_1} = y\ , & \dfrac{a_1 + a_3}{c_1 + c_3} = \dfrac{c_1 - c_3}{a_3 - a_1} = x\ , \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_1 + a_2}{2} = uvK\ , & \dfrac{b_1 + b_2}{2} = uK\ , & \dfrac{c_1 + c_2}{2} = vK\ , \\[2ex] \dfrac{a_2 - a_1}{2} = L\ , & \dfrac{b_1 - b_2}{2} = vL\ , & \dfrac{c_1 - c_2}{2} = uL\ , \\[2ex] \dfrac{a_1 + a_3}{2} = xyM\ , & \dfrac{b_1 + b_3}{2} = xM\ , & \dfrac{c_1 + c_3}{2} = yM\ , \\[2ex] \dfrac{a_3 - a_1}{2} = N\ , & \dfrac{b_1 - b_3}{2} = yN\ , & \dfrac{c_1 - c_3}{2} = xN\ , \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} uvK - L = xyM - N\ , \\ uK + vL = xM + yN\ , \\ vK + uL = yM + xN\ . \end{cases}$$

(7) est un système homogène de trois équations à quatre inconnues K , L , M , N , dont la solution générale est donnée par (4).

Il reste à écrire $x_4 + x_5 = d^2$; d est donné par $d^2 = b_2^2 + c_3^2 - a_1^2$. On trouve

$$(8)\qquad d^2 = P(x\ , y\ , u\ , v)\ ,$$

où P est un polynôme du 4e degré par rapport à chacune des variables. On a

$$P(x, y, u, v) = P(u, v, x, y) = P(y, x, v, u) = P(v, u, x, y) ,$$

c'est-à-dire que le groupe de symétrie des variables est le groupe de Klein.

Si on fixe y , u , v , l'équation (8) représente dans le plan (x , d) une courbe (Γ) de genre 1 . On sait que la connaissance d'un point rationnel sur une telle courbe permet en général d'en déduire d'autres. Or, sur (Γ) , on connait quatre points rationnels.

En effet, l'équation (8) est satisfaite si on prend $x_2 = x_5$, c'est-à-dire $a_3 = \pm c_1$, on a alors $d = \pm c_2$. On trouve $x = \pm 1$, et $yM \pm N = 0$, cette dernière équation étant du premier degré en x . Nous n'avons pas poussé plus loin les calculs.

5. Une simplification pour le cas $n = 5$.

On va voir que les formules précédentes se simplifient si on prend $x - y = u - v$. On obtiendra donc les solutions de (2) qui vérifient l'identité

$$(9) \qquad (a_2 - a_3)(b_1 - c_1) + (a_3 - a_1)(b_2 - c_2) + (a_1 - a_2)(b_3 - c_3) = 0 .$$

Posons $x = h - v$, $y = h - u$; K , L , M , N ont alors le facteur commun $(u - v)(h - u - v)$. Après simplification par ce facteur, les formules (4) deviennent

$$\begin{cases} K = h^2 - h(u + v) + uv - 1 , \\ L = h^2 - (uv - 1) , \\ M = uv - 1 , \\ N = h(u + v) - (uv - 1) . \end{cases}$$

On en déduit les expressions de $a_1 , \dots , c_3$,

$$(10) \qquad \begin{cases} a_1 = h^2(uv - 1) - huv(u + v) + u^2 v^2 - 1 , \\ a_2 = h^2(uv + 1) - huv(u + v) + (uv - 1)^2 , \\ a_3 = h^2(uv - 1) - h(uv - 2)(u + v) + (uv - 1)^2 ; \\ b_1 = h^2(u + v) - hu(u + v) + (u - v)(uv - 1) , \\ b_2 = h^2(u - v) - hu(u + v) + (u + v)(uv - 1) , \\ - b_3 = h^2(u + v) - h(u^2 + 3uv - 2) + (u + v)(uv - 1) ; \\ c_1 = h^2(u + v) - hv(u + v) + (v - u)(uv - 1) , \\ c_2 = h^2(v - u) - hv(u + v) + (u + v)(uv - 1) , \\ - c_3 = h^2(u + v) - h(v^2 + 3uv - 2) + (u + v)(uv - 1) . \end{cases}$$

On effectue ensuite le calcul de d^2 ,

$$(11)\quad \begin{cases} d^2 = Ah^4 + 2B(u+v)h^3 + Ch^2 + 2B(u+v)(uv-1)h + A(uv-1)^2 \text{ , avec :} \\ A = 2(u^2+v^2) - (uv-1)^2 \text{ ,} \\ B = (uv-2)(uv-1) - (u^2+v^2) \text{ ,} \\ C = (u+v)^2\,(u^2+v^2) - (u+v)^2\,(uv-2)^2 - 2(uv-1)^3 \text{ .} \end{cases}$$

u et v étant fixés, l'équation (11) représente, dans le plan (h , d) , une courbe (Γ') de genre 1 . On connaît sur (Γ') 16 points rationnels provenant de $x_1 = x_4$, ... , $x_3 = x_5$. Ce sont les points d'abscisses

$$u+1 \ , \quad u-1 \ , \quad \frac{uv+u+v-1}{u+1} \ , \quad \frac{uv-u-v-1}{u-1} \ ,$$

$$v+1 \ , \quad v-1 \ , \quad \frac{uv+u+v-1}{v+1} \ , \quad \frac{uv-u-v-1}{v-1} \ ,$$

et $\frac{uv-1}{h}$, où h prend les huit valeurs précédentes.

Pour déterminer explicitement un autre point rationnel, on applique la méthode de Fermat qui consiste à couper (Γ') par la parabole $d = \alpha h^2 + \beta h + \gamma$ osculatrice en un point rationnel connu de (Γ') . Les calculs sont facilités en supposant que ce point est d'abscisse 0 . On prend donc $uv - u - v - 1 = 0$, soit

$$(12)\qquad v = \frac{u+1}{u-1} \ .$$

On trouve

$$(13)\qquad h = \frac{3u^3\,v^3 - 17u^2\,v^2 + 7uv - 1}{(uv+1)(v-u)^2} \ .$$

Les formules (1), (10), (12), (13) donnent une solution du problème d'Erdös pour $n = 5$.

6. Résultats numériques.

Par convention, on écrit une solution numérique en utilisant l'ordre croissant pour les x_i ; on ordonne les solutions suivant la somme des x_i et, en cas d'égalité des sommes, on utilise l'ordre lexicographique en commençant par la droite.

(a) $n = 3$.

La plus petite solution est : -4 , 4 , 5 .

La plus petite solution positive est : 0 , 9 , 16 .

La plus petite solution strictement positive est : 6 , 19 , 30 .

(b) $n = 4$.

La plus petite solution est : -94 , 95 , 130 , 194 . Elle provient de $S = 5^2 \times 13 = 325 = 15^2 + 10^2 = 17^2 + 6^2 = 18^2 + 1^2$.

La plus petite solution positive est : 2 , 359 , 482 , 3362 . Elle provient de $S = 5 \times 29^2 = 4205 = 58^2 + 29^2 = 61^2 + 22^2 = 19^2 + 62^2$.

(c) $n = 5$.

J.-L. NICOLAS a calculé, sur IBM 360-75, 281 solutions (non toutes primitives). Sa méthode consiste à écrire toutes les solutions avec $s \leqslant 912925$ pour $n = 4$, et à essayer d'ajouter un cinquième nombre. La table ci-après contenant les 80 premières solutions primitives, avec $n = 5$, a été construite à partir des résultats de J.-L. NICOLAS.

Il est intéressant, une solution étant prise a priori, de savoir si elle provient des formules simplifiées. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'équation (9) soit vérifiée. Or, pour une solution a priori, il est facile de voir que le premier membre de (9) prend 2560 valeurs en général distinctes (choix de d et choix des signes des racines carrées). Il suffit donc que, parmi ces 2560 valeurs, se trouve la valeur 0 .

Il résulte d'un calcul, fait sur IBM 1130, que, sur les 80 solutions de la table, seules 8 solutions ne proviennent pas de ces formules simplifiées ; ce sont les numéros 22 , 32 , 33 , 44 , 47 , 60 , 69 , 79 .

La plus petite solution est

$$-4878 \ , \ 4978 \ , \ 6903 \ , \ 12978 \ , \ 31122 \ ,$$

elle est donnée par $u = 5$, $v = 7$, $h = 14/3$.

La plus petite solution positive est

$$7442 \ , \ 28658 \ , \ 148583 \ , \ 177458 \ , \ 763442 \ ,$$

elle porte le n° 77, et est donnée par $u = 2$, $v = 8/3$, $h = 23/9$.

Parmi les solutions positives, notons

$$32018 \ , \ 104882 \ , \ 188882 \ , \ 559343 \ , \ 956018 \ ,$$

qui est probablement la seconde ; elle est donnée par $u = 1/5$, $v = 3/5$, $h = -1/10$.

La solution 17 est donnée par $u = 2$, $v = 3$, $h = 11$, elle provient des formules (12) et (13).

Terminons en remarquant que les solutions 6 et 16 d'une part, 14 et 17 d'autre part, ont en commun quatre nombres. Il y a donc des exemples (et il en existe une infinité) de 6 nombres tels que 14 des 15 sommes deux à deux sont des carrés. On peut raisonnablement conjecturer que le problème d'Erdös a des solutions pour n = 6 .

Table

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S
1	- 4878	4978	6903	12978	31122	51103
2	- 5998	7847	9842	11474	30962	54127
3	- 2158	2258	4967	19058	33842	57967
4	- 878	882	7767	12114	48402	68287
5	- 1417	1586	5138	18578	45938	69823
6	- 5662	5762	11138	28463	41762	81463
7	- 7758	8658	12658	29367	51858	94783
8	- 14350	14354	21746	35375	76850	133975
9	- 3902	4743	15138	51426	110178	177583
10	- 3598	8498	10823	44402	140498	200623
11	- 18382	23282	35282	60818	111407	212407
12	- 22718	22914	37602	63522	136287	237607
13	- 49822	50498	63746	78383	114338	257143
14	- 14782	15143	26882	57218	182882	267343
15	- 7552	7553	8576	21008	253568	283153
16	- 5662	5762	28463	41762	226562	296887
17	- 14782	15143	57218	110882	182882	351343
18	- 8622	8658	57906	73138	230463	361543
19	- 16222	43778	52322	78722	237122	395722
20	- 6583	10808	67592	76808	259592	408217
21	- 69838	85967	115634	128402	161042	421207
22	- 5176	9272	15377	64712	360392	444577
23	- 57022	57218	70946	120023	263138	454303
24	- 24073	26882	41762	104162	350114	498847
25	- 23198	24642	54882	90279	357282	503887
26	- 25822	31298	43778	114626	351863	515743
27	- 23918	37143	108018	152082	244818	518143
28	- 55102	58823	67202	153698	295202	519823
29	- 25038	28287	41938	126162	349938	521287
30	- 27982	27986	49298	72503	404978	526783

31	- 18126	21375	65650	119250	356850	544999
32	- 16273	17234	53522	108082	384722	547287
33	- 42318	64818	75807	179218	302418	579943
34	- 55102	55127	84002	100898	403202	588127
35	- 83257	84482	100418	155618	348482	605743
36	- 19633	30242	53858	65858	502658	632983
37	- 37294	39503	44018	62258	524498	632983
38	- 41342	46242	62658	153567	413442	634567
39	- 40417	68978	80018	137138	401618	647335
40	- 75278	87599	141842	192242	323282	669687
41	- 12094	15458	106343	240578	327938	678223
42	- 92302	93746	124343	134738	421778	682303
43	- 115102	122327	151202	196898	336002	691327
44	- 46798	53522	174962	193487	323474	698647
45	- 92302	101906	141143	232178	336338	719263
46	- 61774	68498	86738	130418	500018	723898
47	- 33273	33282	57922	148194	547362	753487
48	- 35902	38018	50786	114863	592418	760183
49	- 44478	60354	83287	292482	383202	774847
50	- 41257	48482	74018	146882	575618	803743
51	- 4408	27512	33992	133289	625352	815737
52	- 89950	94850	103175	114914	594050	817039
53	- 29358	29394	76882	85527	666162	828607
54	- 67822	72178	91847	252722	490322	839247
55	- 27198	27202	44622	76482	722754	843862
56	- 42958	48287	188882	332402	349874	876487
57	- 117918	121167	167202	342594	407362	920407
58	- 36382	47618	89282	355607	485282	941407
59	- 123025	123650	157250	219746	565250	942871
60	- 89838	100242	136927	281682	517554	946567
61	- 51822	56583	112338	299826	550258	967183
62	- 1918	22082	48143	350018	552482	970807
63	- 14425	14450	170450	333650	472754	976879
64	- 56574	58338	147778	211023	637218	997783
65	- 99400	111944	205025	272456	509000	999025
66	- 82750	83234	145250	303650	551975	1001359
67	- 165438	198562	230463	266562	490338	1020487
68	- 111928	156872	227528	350072	398153	1020697
69	- 48382	146978	159938	266471	502658	1027663
70	- 37198	42098	126002	222098	680402	1033402

71	- 61774	71183	130418	189938	704978	1034743
72	- 116350	117026	131975	337250	565250	1035151
73	- 74718	76482	91618	139743	810882	1044007
74	- 103225	118850	133154	229250	673250	1051279
75	- 17262	23346	45823	315378	712818	1080103
76	- 56952	57393	74376	183688	824328	1082833
77	7442	28658	148583	177458	763442	1125583
78	- 106750	137375	195554	291650	610850	1128679
79	- 102478	108719	122642	171122	873362	1173367
80	- 43783	54392	168392	216008	792008	1187017

(Texte reçu le 17 mai 1971)

Jean LAGRANGE
Faculté des Sciences, Mathématiques
Moulin de la Housse
51 - REIMS