Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Philippe Robba

Décomposition en éléments simples d'une fonction analytique sur un corps ultramétrique. Application au prolongement analytique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, nº 2 (1969-1970), exp. nº 22, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_2_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (Théorie des Nombres) 11e année, 1969/70, n° 22, 14 p.

15 juin 1970

DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES D'UNE FONCTION ANALYTIQUE SUR UN CORPS ULTRAMÉTRIQUE
APPLICATION AU PROLONGEMENT ANALYTIQUE

par Philippe ROBBA

K désigne un corps valué ultramétrique complet, non discret et algébriquement clos, et k son corps de restes.

On appelle disque ouvert (resp. fermé) de centre a et de rayon r, et on note $D(a, r^-)$ (resp. $D(a, r^+)$), l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x - a| < r$ (resp. $|x - a| \leqslant r$). On notera $C(a, r) = \{x \mid |x - a| = r\}$ le cercle de centre a et de rayon r.

1. Décomposition en éléments simples.

Soit A un sous-ensemble ouvert de K. Un élément analytique sur A au sens de Krasner est la limite uniforme sur A d'une suite de fractions rationnelles sans pôles dans A.

Nous allons démontrer un théorème de décomposition pour ces éléments analytiques, analogue au théorème de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, ou au théorème de Mittag-Leffler pour les fonctions méromorphes.

Ce résultat généralise et simplifie un résultat analogue démontré par M. KRASNER [2].

A est dit infraconnexe si, quel que soit $a \in K$, l'adhérence dans $\underset{\sim}{R}$ de l'image de A dans l'application $x \to |x - a|$ est un intervalle.

Notons $\widehat{A}$ le plus petit disque fermé contenant A. Le disque ouvert $T = D(a, r^-)$ est appelé trou de A, si $T \subset \complement A \cap \widehat{A}$, et si de plus, pour tout $\rho > r$, $A \cap D(a, \rho^-) \neq \emptyset$. Un point isolé de $\complement A$ sera aussi appelé un trou de A. Enfin, nous dirons que l'ensemble $T_0 = \complement \widehat{A}$ est le trou de A de centre l'infini. Nous noterons $\mathfrak{T}$ la famille des trous de A. Si A est infraconnexe, $\complement A = \bigcup_{T \in \mathfrak{T}} T$ (cette propriété caractérise les infraconnexes). Ces définitions restent invariantes par transformation homographique.

Soit E un sous-ensemble ouvert de $\overline{K} = K \cup \infty$. Nous noterons $H(E)$ l'espace vectoriel des éléments analytiques sur E, nuls à l'infini (cette dernière condition tombe si $\infty \notin E$). On pose, pour $f \in H(E)$, $\|f\|_E = \sup_{x \in E} |f(x)|$ (cette dernière quantité peut être infinie, mais ce cas ne se produit que si E n'est pas fermé).

Dans ce qui suit, A désigne un ensemble infraconnexe, et T un trou de A. Par des arguments sur les polygones de valuation ([3]), on démontre les résultats suivants.

LEMME 1. - Si $f \in H(A \cup T)$, on a $\|f\|_{A \cup T} = \|f\|_A$.

LEMME 2. - Si $f \in H(\complement T)$, on a $\|f\|_{\complement T} = \|f\|_A$.

LEMME 3. - Soit R une fraction rationnelle sans pôles dans A. Notons R_T la somme des éléments simples de R correspondant aux pôles de R situés dans T. On a alors

$$\|R_T\|_{\complement T} = \|R_T\|_A \leqslant \|R\|_A \quad .$$

(La partie polynomiale de R, y compris le terme constant, sera considérée comme associée à un pôle à l'infini.)

REMARQUE 1. - Il résulte du lemme 1 que, si $f \in H(A \cup T)$, et si f est nulle dans A, alors f est nulle dans $A \cup T$. Ceci nous permet donc de parler du prolongement analytique dans T (s'il existe) d'un élément analytique f sur A.

THÉORÈME 1. - Soient A un ensemble infraconnexe, et f un élément analytique sur A. A chaque trou T de A, on associe une fonction $f_T \in H(\complement T)$, appelée partie singulière de f relative au trou T, caractérisée par la condition que $f - f_T$ se prolonge analytiquement dans T. On a alors

$$f = \sum_{T \in \mathfrak{T}} f_T \quad ,$$

la série convergeant uniformément sur A, et de plus

$$\|f\|_A = \sup_{T \in \mathfrak{T}} \|f_T\|_{\complement T} \quad .$$

Démonstration.

(i) Prouvons d'abord l'unicité de f_T. S'il existe deux fonctions f_T et g_T vérifiant les conditions indiquées, il existe une fonction h, définie sur $\overline{K}$, telle que $h = f_T - g_T$ dans $\complement T$, h est un élément analytique sur $\complement T$, un élément analytique sur $A \cup T$, et vaut 0 à l'infini.

Soit ε_n une suite de nombres tendant vers 0. Il existe deux suites de fractions rationnelles P_n et Q_n, telles que

$$\|h - P_n\|_{\complement T} \leqslant \varepsilon_n \qquad \text{et} \qquad \|h - Q_n\|_{A \cup T} \leqslant \varepsilon_n \quad .$$

Posons $\Pi_n = P_n - Q_n$. On a $\|\Pi_n\|_A \leqslant \varepsilon_n$. Il résulte du lemme 3 que $\|\Pi_{nT}\|_{\complement T} \leqslant \varepsilon_n$.

On déduit alors du lemme 1 que

$$\|\Pi_n - \Pi_{nT}\|_{T\cup A} = \|\Pi_n - \Pi_{nT}\|_A \leqslant \sup(\|\Pi_n\|_A \text{ , } \|\Pi_{nT}\|_A) \leqslant \varepsilon_n \quad .$$

Posons $R_n = P_n - \Pi_{nT} = Q_n + (\Pi_n - \Pi_{nT})$. On a alors

$$\|h - R_n\|_{CT} \leqslant \varepsilon_n \qquad \text{et} \qquad \|h - R_n\|_{T\cup A} \leqslant \varepsilon_n \quad ,$$

et donc $\|h - R_n\|_{\overline{K}} \leqslant \varepsilon_n$. h est donc un élément analytique sur $\overline{K}$ et, puisque $h(\infty) = 0$, on a donc $h = 0$, soit $f_T = g_T$.

(ii) Construisons f_T . Soit R_n une suite de fractions rationnelles sans pôles dans A , convergeant uniformément vers f sur A . R_n forme une suite de Cauchy dans $H(A)$. Comme $(R_n - R_m)_T = R_{nT} - R_{mT}$, il résulte du lemme 3 que R_{nT} forme une suite de Cauchy dans $H(CT)$, et donc converge vers un élément f_T de $H(CT)$. En particulier, R_{nT} converge uniformément sur A vers f_T . Puisque l'on a, pour tout n ,

$$R_n = \sum_{T\in\mathcal{T}} R_{nT}$$

(il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls), on aura à la limite,

$$f = \sum_{T\in\mathcal{T}} f_T \quad ,$$

la série convergeant uniformément sur A . Comme, pour $T' \neq T$, on a

$$\|f_{T'}\|_{T\cup A} = \|f_{T'}\|_A \quad ,$$

on voit que la série

$$\sum_{\substack{T'\in\mathcal{T} \\ T'\neq T}} f_{T'} = f - f_T$$

converge uniformément sur $A \cup T$, ce qui prouve que $f - f_T$ se prolonge analytiquement dans T . Enfin, comme on a, pour tout n ,

$$\|R_{nT}\|_{CT} \leqslant \|R_n\|_A \quad ,$$

on aura à la limite,

$$\|f_T\|_{CT} \leqslant \|f\|_A \quad ,$$

mais comme, d'autre part,

$$\|f\|_A \leqslant \sup_{T\in\mathcal{T}} \|f_T\|_A \quad ,$$

on doit avoir

$$\|f\|_A = \sup_{T\in\mathcal{T}} \|f_T\|_A = \sup_{T\in\mathcal{T}} \|f_T\|_{CT} \quad .$$

<u>Application au problème de Mittag-Leffler</u>. - Pour chaque trou T de l'infraconnexe A, on se donne un élément $f_T \in H(CT)$. Existe-t-il un élément analytique f sur A, tel que f_T soit sa partie singulière relative au trou T ? Le théorème précédent nous dit qu'il faut que la famille f_T soit sommable dans $H(A)$, ce qui équivaut à la condition que $\|f_T\|_A$ tende vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de $\mathfrak{T}$. On voit que cette condition est suffisante, car $f = \sum_{T \in \mathfrak{T}} f_T$ répond au problème posé.

2. Application : Somme de fonctions analytiques.

Une famille $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles de K est dite enchaînée, si, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathfrak{F}$, il existe une famille finie $A_1, \ldots, A_n$ d'éléments de $\mathfrak{F}$, telle que $A = A_1$, $B = A_n$, $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ pour $1 \leqslant i \leqslant n - 1$.

Une fonction f définie sur l'ensemble A est dite analytique (au sens de KRASNER [2]), s'il existe une famille enchaînée $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles quasi-connexes, telle que $A = \bigcup_{i\in I} A_i$, et que la restriction de f à chaque A_i soit un élément analytique sur A_i.

Si f et g sont des fonctions analytiques sur A, est-ce que $f + g$ est une fonction analytique sur A ? Si f est définie par la famille A_i, et g par la famille B_j, il peut se faire que la famille formée des $A_i \cap B_j$ non vides ne soit pas enchaînée. Pour tourner cette difficulté, M. KRASNER suppose que le corps de restes de K est non dénombrable, et que les quasi-connexes considérés sont réguliers ([2]). Nous allons voir que cette hypothèse est inutile.

PROPOSITION 1. - <u>Soit une fonction analytique</u> f <u>définie par un système cohérent fini, alors</u> f <u>est un élément analytique</u>.

Autrement dit, si les restrictions de f sur les ensembles B_i d'une famille enchaînée finie $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des éléments analytiques, f est un élément analytique sur $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Il suffit de démontrer la proposition pour $n = 2$, le résultat général s'obtenant alors par récurrence sur n.

<u>Démonstration</u>. - On vérifie facilement que, pour deux quasi-connexes A_1 et A_2 d'intersection non vide, on a

$$\mathfrak{T}(A_1 \cup A_2) \cup \mathfrak{T}(A_1 \cap A_2) = \mathfrak{T}(A_1) \cup \mathfrak{T}(A_2) \quad ,$$

$$\mathfrak{T}(A_1 \cup A_2) \cap \mathfrak{T}(A_1 \cap A_2) = \mathfrak{T}(A_1) \cap \mathfrak{T}(A_2) \quad .$$

Nous noterons f_1, f_2, f_{12}, respectivement les restrictions de f à A_1, A_2,

$A_1 \cap A_2$.

Pour $T \in \mathcal{T}(A_1 \cup A_2) \cap \mathcal{T}(A_i)$, on pose $f_T = f_{iT}$. Cette définition est bien cohérente, car si $T \in \mathcal{T}(A_1 \cup A_2) \cap \mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2)$, alors $T \in \mathcal{T}(A_1 \cap A_2)$, et donc $f_{1T} = f_{12T} = f_{2T}$.

Si $T \in \mathcal{T}(A_1)$ et $T \notin \mathcal{T}(A_1 \cup A_2)$, alors $T \in \mathcal{T}(A_1 \cap A_2)$ et $T \cap B \neq \emptyset$. Posons

$$g_T = \sum_{\substack{T' \in \mathcal{T}(A_1 \cup A_2) \\ T' \subset T}} f_{T'} = \sum_{\substack{T' \in \mathcal{T}(A_2) \\ T' \subset T}} f_{2T'} \ .$$

Cette série converge uniformément dans $\complement T$, donc $g_T \in H(\complement T)$. De plus, sur A_2 ,

$$f_2 - g_T = \sum_{\substack{T' \not\subset T \\ T' \in \mathcal{T}(A_2)}} f_{T'} \ ,$$

cette série convergeant uniformément dans $B \cup T$, ce qui prouve que $g_T = f_{12T}$, et donc $g_T = f_{1T}$.

On voit d'autre part que

$$\bigcup_{T \in \mathcal{T}(A_1) \cap \complement\mathcal{T}(A_1 \cup A_2)} \Big(\bigcup_{\substack{T' \subset T \\ T' \in \mathcal{T}(A_1 \cup A_2)}} T' \Big) = \bigcup_{T' \in \mathcal{T}(A_1 \cup A_2) \cap \complement\mathcal{T}(A_1)} T' \ .$$

On a donc sur A_1

$$f_1 = \sum_{T \in \mathcal{T}(A_1)} f_{1T} = \sum_{T \in \mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_1 \cup A_2)} f_{1T} + \sum_{T \in \mathcal{T}(A_1) \cap \complement\mathcal{T}(A_1 \cup A_2)} f_{1T}$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_1 \cup A_2)} f_T + \sum_{T' \in \mathcal{T}(A_1 \cup A_2) \cap \complement\mathcal{T}(A_1)} f_T = \sum_{T \in \mathcal{T}(A_1 \cup A_2)} f_T \ ,$$

cette série convergeant uniformément sur A_1 . On voit de même que cette série converge uniformément sur A_2 vers f_2 , donc converge uniformément sur $A_1 \cup A_2$ vers f , ce qui prouve que f est un élément analytique sur $A_1 \cup A_2$.

COROLLAIRE 1. - Soit f une fonction analytique sur A . Il existe une famille filtrante (A_i) avec $\bigcup_i A_i = A$, telle que la restriction de f à chaque A_i soit un élément analytique.

En effet, supposons que f soit définie par la famille enchaînée $(B_j)_{j \in J}$. Pour tout sous-ensemble fini I de J , tel que la famille $(B_j)_{j \in I}$ soit enchaînée, f est un élément analytique sur $A_I = \bigcup_{j \in I} B_j$. Soit $\mathfrak{J}$ la famille de ces sous-ensembles. Il est clair que $\bigcup_{I \in \mathfrak{J}} A_I = A$. Montrons que la famille $(A_I)_{I \in \mathfrak{J}}$ est filtrante. Soient I et $I' \in \mathfrak{J}$, et soient $i \in I$, $j \in I$; il existe $K \in \mathfrak{J}$ tel que

$i \in K$ et $j \in K$. Alors $I'' = I \cup I' \cup K$ appartient à $\mathfrak{I}$, et $(A_I \cup A_{I'}) \subset A_{I''}$.

REMARQUE 2. - Il est clair qu'une famille filtrante est enchaînée.

THÉORÈME 2. - Si f et g sont deux fonctions analytiques sur A, $f+g$ est une fonction analytique sur A.

On peut supposer que f et g sont définies par des familles filtrantes (A_i) et (B_j). Mais alors la famille formée des ensembles $A_i \cap B_j$ non vides est une famille filtrante engendrant A. Sur un tel $A_i \cap B_j$, il est clair que $f+g$ est un élément analytique. $f+g$ est donc une fonction analytique sur A.

3. Application au prolongement analytique.

L'ensemble ouvert A est dit analytique, si tout élément analytique sur A, nul au voisinage d'un point de A, est identiquement nul sur A. Dans [3], nous donnons une caractérisation géométrique des ensembles analytiques, et quelques propriétés de ceux-ci. Les ensembles analytiques sont infraconnexes. On sait ([2]) que les quasi-connexes sont analytiques.

Soit une fonction analytique f définie au voisinage d'un point de K, qu'on supposera être 0 pour simplifier. On dira que f se prolonge analytiquement au point y, s'il existe un ensemble analytique A contenant 0 et y, et un élément analytique g sur A coïncidant avec f au voisinage de 0. A étant choisi, g, s'il existe, est entièrement déterminé par la donnée de f. Le prolongement $g(y)$, obtenu en y, peut dépendre de l'ensemble analytique choisi (car l'intersection de deux ensembles analytiques peut ne pas être analytique) ; par contre, si A est pris quasi-connexe, $g(y)$ ne dépendra pas du quasi-connexe choisi (principe du prolongement analytique uniforme ([2])).

Si

$$r = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

est le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, nous dirons que son disque de convergence est le disque fermé $D(0, r^+)$, si $r^n |a_n| \to 0$ quand $n \to \infty$, et que c'est le disque ouvert $D(0, r^-)$, sinon. (Si r n'appartient pas au groupe des valeurs, les disques $D(0, r^+)$ et $D(0, r^-)$ coïncident au point de vue ensembliste.) Dans son disque de convergence, la série entière converge, et sa somme définit un prolongement de f.

PROPOSITION 2. - <u>Si</u> f <u>se prolonge en dehors de son disque de convergence,</u> f <u>est un élément analytique sur son disque de convergence</u> D .

Si le disque de convergence D est fermé, il n'y a rien à prouver, puisqu'alors la série entière converge uniformément sur D , et définit donc un élément analytique.

Supposons alors que $D = D(0\ ,\ r^-)$. Soient $y \in K$, $|y| \geqslant r$, A un ensemble analytique contenant 0 et y , g un élément analytique sur A coïncidant avec f au voisinage de 0 . Soit T un trou de A contenu dans D . Il existe alors $\rho < r$ tel que T soit contenu dans $D(0\ ,\ \rho^+)$. Sur l'ensemble analytique $A \cap D(0\ ,\ \rho^+)$, f et g sont deux éléments analytiques coïncidant au voisinage de 0 , donc coïncidant partout. Comme d'autre part f est un élément analytique sur $(A \cap D(0\ ,\ \rho^+)) \cup T$, on a $g_T = 0$. On a donc

$$g = \sum_{T\in\mathcal{T}(A)} g_T = \sum_{\substack{T\in\mathcal{T}(A)\\ T\cap D=\emptyset}} g_T \quad ,$$

et cette dernière série converge uniformément sur D vers un élément analytique sur D qui coïncide avec f .

Nous donnerons plus loin des conditions sur les coefficients de Taylor de f pour que f soit un élément analytique dans son disque de convergence.

Soit alors f un élément analytique sur D . D'après le théorème 1, f se décompose suivant ses parties singulières. Mais que sont les trous de D ?

(a) Si D est fermé, $D = D(0\ ,\ r^+)$, D n'a qu'un trou T_0 qui est le trou de centre infini. On a $f = f_{T_0}$, où f_{T_0} est un élément analytique sur $\complement T_0 = D$. On le savait déjà !

REMARQUE 3. - Si l'on cherche un prolongement de f sur un quasi-connexe A , et si le disque de convergence D est fermé, on sait ([2]) qu'il n'existe pas de tel prolongement. La situation est différente lorsqu'on cherche un prolongement de f sur un ensemble analytique A . Donnons l'exemple d'un élément analytique f , dont la série de Taylor à l'origine a un disque de convergence fermé $D(0\ ,\ r^+)$ et qui se prolonge sur un ensemble analytique A contenant le disque de convergence.

Soit a_n une suite de points de K , telle que $|a_n|$ forme une suite strictement décroissante convergeant vers r . Soit ρ_n une suite de nombres réels, avec $0 < \rho_n < |a_n|$. Soit A l'ensemble des x de K , tels que $|x - a_n| > \rho_n$. Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log|a_n| - \log 2}{\log|a_n| - \log \rho_n} < +\infty \quad ,$$

A est analytique ([3]). Nous supposerons cette condition réalisée. Soit b_n une suite de points de K, telle que $|b_n - a_n| \neq 0$ pour tout n, et telle que $\frac{|b_n - a_n|}{\rho_n} \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x - b_n}{x - a_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a_n - b_n}{x - a_n}\right)$$

converge uniformément sur A vers un élément analytique $f(x)$, puisque

$$\sup_{x \in A} \left|\frac{a_n - b_n}{x - a_n}\right| = \frac{|a_n - b_n|}{\rho_n} \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty .$$

On voit que f est un élément analytique dans $D(0 , r^+)$, mais n'est un élément analytique dans aucun disque plus grand. Le disque de convergence de sa série de Taylor en 0 est donc $D(0 , r^+)$.

Nous ne connaissons pas de critère permettant de dire si une série entière, dont le disque de convergence est fermé, se prolonge ou non en dehors de son disque de convergence.

(b) Si D est ouvert, $D = D(0 , r^-)$, et si r n'appartient pas au groupe des valeurs, D n'a qu'un trou T_0 qui est le trou de centre ∞. On a $f = f_{T_0}$, où f_{T_0} est un élément analytique sur $\complement T_0 = D(0 , r^+)$, ce qui signifie que le disque de convergence de f doit être $D(0 , r^+)$. Il y a contradiction. D'où la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - <u>Si le rayon de convergence</u> r <u>de la série entière</u>

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

<u>n'appartient pas au groupe des valeurs, et si</u>

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n| r^n \neq 0 ,$$

<u>la fonction</u> $f(x)$ <u>ne se prolonge pas analytiquement en dehors de son disque de convergence</u>.

(c) Si D est ouvert, $D = D(0 , r^-)$, et si r appartient au groupe des valeurs, les trous de D sont d'une part le trou de centre infini $T_0 = \{x \mid |x| > r\}$, d'autre part les trous $T_i = D(\alpha_i , r^-)$ avec $|\alpha_i| = r$, $|\alpha_i - \alpha_j| = r$, $i \neq j$.

Comme on a alors, pour $T \in \mathcal{T}(D)$,

$$f = f_T + \sum_{\substack{T' \in \mathcal{T}(D) \\ T' \neq T}} f_{T'} \ ,$$

et que $\sum_{\substack{T' \in \mathcal{T}(D) \\ T' \neq T}} f_{T'}$ est un élément analytique sur $D \cup T$, pour savoir si f se prolonge dans T, il suffit d'étudier si f_T se prolonge dans T.

Mais f_T se développe en série de Taylor autour de 0 si T est le trou T_0 de centre ∞, et en série de Laurent autour de α_i n'ayant que des termes d'exposant négatif si T est le trou $T_i = D(\alpha_i , r^-)$.

On peut alors recommencer le même raisonnement pour f_T (tout ce que l'on a dit sur les séries entières, s'applique, moyennant des changements évidents, aux séries de Laurent).

Si l'on s'intéresse au prolongement sur un quasi-connexe, le processus s'arrête lorsque la série entière ou la série de Laurent n'est pas un élément analytique dans son domaine de convergence, ou a un domaine de convergence fermé.

Si f se prolonge au point y sur un quasi-connexe, ce prolongement est obtenu en un nombre fini d'étapes.

Cherchons des critères assurant que f est un élément analytique dans son disque de convergence. Comme on l'a vu, il suffit de considérer le cas où le disque est ouvert, et où le rayon de convergence appartient au groupe des valeurs. Par homothétie, on peut se ramener au cas où $r = 1$. Soit donc $D = D(0 , 1^-)$. Si f est un élément analytique sur D, $|f(x)|$ est borné, et donc les coefficients de Taylor de f sont bornés.

Soit S l'espace vectoriel des suites bornées d'éléments de K. Pour $a = (a_n)$, on pose $\|a\| = \sup_n |a_n|$. S est alors un espace de Banach ultramétrique ([4]). Muni de la norme $\|f\| = \|f\|_D$, $H(D)$ est un espace de Banach ultramétrique. Considérons l'application linéaire de $H(D)$ dans S, qui à f associe sa série de Taylor à l'origine $a(f)$. Notons SH l'image de cette application. Il est bien connu que $\|f\| = \|a(f)\|$. SH est donc un sous-espace fermé de S. Si E est un espace de Banach ultramétrique, nous dirons que la famille $(e_i)_{i \in I}$ est <u>une base orthonormale</u> de E ([4]), si tout élément x de E se décompose de façon unique sous la forme $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, avec $\|x\| = \sup_i |\lambda_i|$, et $\lambda_i \to 0$ quand $i \to \infty$ (c'est-à-dire suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I).

Notons k le corps de restes de K, $x \to \bar{x}$ l'application canonique de $D(0 , 1^+)$ dans k. Pour tout $\alpha \in k' = k - \{0\}$, choisissons un relèvement $\tilde{\alpha}$ de cette application, on a donc $\bar{\tilde{\alpha}} = \alpha$. Soit $D_\alpha = D(\tilde{\alpha} , 1^-)$. Alors

$$f = f_0 + \sum_{\alpha \in k'} f_\alpha \ , \qquad \text{où} \quad f_0 \in H(D(0\ ,\ 1^+)) \quad \text{et} \quad f_\alpha \in H(CD_\alpha) \ ,$$

et de plus,

$$\|f\| = \sup\Big(\|f_0\|\ ,\ \sup_\alpha \|f_\alpha\|\Big) \qquad \text{et} \qquad \|f_\alpha\| \to 0 \quad \text{quand} \quad \alpha \to \infty \ .$$

D'autre part, il est bien connu que

$$f_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\, x^i \ , \qquad \text{avec} \quad \|f_0\| = \sup_i |\lambda_i| \quad \text{et} \quad |\lambda_i| \to 0 \quad \text{quand} \quad i \to \infty \ ,$$

et que

$$f_\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j\alpha} \frac{\tilde{\alpha}^{j-1}}{(\tilde{\alpha} - x)^{j-1}} \ ,$$

$$\text{avec} \quad \|f_\alpha\| = \|f_\alpha\|_{CD_\alpha} = \sup_j |\lambda_{j\alpha}| \quad \text{et} \quad |\lambda_{j\alpha}| \to 0 \quad \text{quand} \quad j \to \infty \ .$$

Donc

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\, x^i + \sum_{\alpha \in k'} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j\alpha} \frac{\tilde{\alpha}^{j-1}}{(\tilde{\alpha} - x)^{j-1}} \ ,$$

avec

$$\|f\| = \sup_{i,j,\alpha} (|\lambda_i|\ ,\ |\lambda_{j\alpha}|) \ ,$$

et

$$|\lambda_i| \to 0 \quad \text{quand} \quad i \to \infty \ , \qquad |\lambda_{j\alpha}| \to 0 \quad \text{quand} \quad (j\ ,\ \alpha) \to \infty \ .$$

Ceci prouve que les fonctions

$$e_i(x) = x^i \ , \quad i \in \underset{\sim}{N} \ , \qquad \text{et} \qquad e_{j\alpha}(x) = \frac{\tilde{\alpha}^{j-1}}{(\tilde{\alpha} - x)^{j-1}} \ , \quad j \in \underset{\sim}{N} \ , \quad \alpha \in k' \ ,$$

forment une base orthonormale de $H(D)$. Notons s_i et $s_{j\alpha}$ les suites des coefficients de Taylor en 0 de ces fonctions.

PROPOSITION 4. - <u>L'espace</u> SH <u>est l'espace vectoriel fermé engendré par les suites</u>

$$s_i = (\delta_{in})_{n \in \underset{\sim}{N}} \qquad \text{et} \qquad s_{j\alpha} = \left(\binom{n+j}{j} \tilde{\alpha}^{-n}\right)_{n \in \underset{\sim}{N}} \ , \qquad i \in \underset{\sim}{N} \ , \quad j \in \underset{\sim}{N} \ , \quad \alpha \in k' \ .$$

On notera que s_i et $s_{j\alpha}$ forment une base orthonormale de SH .

Nous allons établir quelques propriétés des éléments de SH .

LEMME 4. - *Soient* p *et* j *deux entiers* $\geqslant 0$. *L'application* $n \to \binom{n+j}{j}$ mod p *est périodique, de période* p^j . *Si* p *est premier et* $j \leqslant p^m - 1$, *cette application est périodique, de période* p^m .

Dorénavant, si k est de caractéristique nulle, p désignera un entier arbitraire, et sinon la caractéristique de k .

LEMME 5. - *Soient* N , L , μ , *trois entiers, soient* $(\alpha_\ell)_{0\leqslant\ell\leqslant L-1}$, L *éléments distincts de* k' . *Posons*

$$\omega_m^n(N) = \binom{N+n+j}{j} \alpha_\ell^{-(N+n)} ,$$

avec

$$m = \ell p^\mu + j , \qquad 0 \leqslant j \leqslant p^\mu - 1 ,$$

$$0 \leqslant \ell \leqslant L - 1 , \qquad 0 \leqslant n \leqslant Lp^\mu - 1 , \qquad 0 \leqslant m \leqslant Lp^\mu - 1 .$$

On a alors $\det(\omega_m^n(N)) \neq 0$.

Notons Σ l'espace des suites d'éléments de k . Pour $a \in S$, $\|a\| \leqslant 1$, posons $\bar{a} = (\overline{a_n}) \in \Sigma$.

LEMME 6. - *Soit* $\bar{a} = \sum_{\text{finie}} \overline{\lambda_{j\alpha}}\, \overline{s_{j\alpha}}$, *où* $\bar{a} \in \Sigma$, $\overline{\lambda_{j\alpha}} \in k$, *et où les* $\overline{\lambda_{j\alpha}}$ *ne sont pas tous nuls. Soit* J *le sous-ensemble de* $\underline{N}$ *formé des* n *tels que* $\overline{a_n} \neq 0$. *Il existe* τ *tel que, quel que soit* $N \in \underline{N}$, $J \cap [N , N + \tau] \neq \emptyset$.

On peut supposer que

$$\bar{a} = \sum_{0\leqslant j\leqslant p^\mu-1} \sum_{0\leqslant\ell\leqslant L-1} \overline{\lambda_{j\alpha_\ell}}\, \overline{s_{j\alpha_\ell}} .$$

Prenons $\tau = Lp^\mu - 1$. S'il existe N tel que $J \cap [N , N + \tau] = \emptyset$, c'est-à-dire que $\overline{a_n} = 0$, pour $N \leqslant n \leqslant N + Lp^\mu - 1$, cela implique, grâce au lemme 5, que $\overline{\lambda_{j\alpha_\ell}} = 0$, $0 \leqslant j \leqslant p^\mu - 1$, $0 \leqslant \ell \leqslant L - 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

LEMME 7. - *Soit* $a \in SH$. *Alors* $\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n| = \sup_{j,\alpha} |\lambda_{j\alpha}(a)|$.

Si $\sup_{j,\alpha} |\lambda_{j\alpha}(a)| = 0$, $a = \sum \lambda_i(a)\, s_i$, et $a_n = \lambda_n(a)$, donc $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.
Si $\sup_{j,\alpha} |\lambda_{j\alpha}(a)| = |\lambda_{j_0\alpha_0}(a)| = \lambda \neq 0$, posons $b = a - \sum_{|\lambda_i|\geqslant\lambda} \lambda_i\, s_i$, et $c = \frac{b}{\lambda_{j_0\alpha_0}(a)}$. On a, pour $n > n_0$, $|b_n| = |a_n|$ et $\|c\| = 1$. On a $\lambda_i(c) < 1$, et donc $\bar{c} = \sum_{\text{finie}} \overline{\lambda_{j\alpha}(c)}\, \overline{s_{j\alpha}}$ avec $\overline{\lambda_{j_0\alpha_0}(c)} \neq 0$. D'après le lemme 6, il existe τ tel que, dans tout intervalle $[N , N + \tau]$, il existe un n avec $\overline{c_n} \neq 0$, et donc $|c_n| = 1$, ou encore $|b_n| = \lambda$. On a donc $\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n| = \overline{\lim}_{n\to\infty} |b_n| = \lambda$.

Définition. - Le sous-ensemble J de $\underset{\sim}{N}$ est dit lacunaire, si, quel que soit $\tau \in \underset{\sim}{N}$, il existe $N \in \underset{\sim}{N}$ tel que $J \cap [N , N + \tau) = \emptyset$.

THÉORÈME 3. - Soit $a \in S$ telle que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n| = \lambda \neq 0$. Soit J (resp. I) l'ensemble des n tels que $|a_n| = \lambda$ (resp. $|a_n| > \lambda$). Si J est lacunaire, ou si I est non borné, a n'appartient pas à SH.

Soit $a \in SH$. Construisons la suite c comme au lemme 7. Soit J l'ensemble des n tels que $|a_n| = \lambda$, et J' l'ensemble des n tels que $|c_n| = 1$. Il résulte de la démonstration du lemme 7 que J' n'est pas lacunaire. Or

$$J' \cap [n_0 , \infty) = J \cap [n_0 , \infty) ,$$

et donc J n'est pas lacunaire.

COROLLAIRE 2. - Soit r le rayon de convergence de la série entière

$$f(x) = \sum a_n x^n ,$$

et supposons que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| r^n = \lambda \neq 0 .$$

Soit J (resp. I) l'ensemble des n tels que $|a_n|r^n = \lambda$ (resp. $|a_n|r^n > \lambda$). Si J est lacunaire, ou si I n'est pas borné, f ne se prolonge pas analytiquement en dehors de son disque de convergence.

Exemples.

1° Les fonctions $f(x) = \sum\limits_n x^{n^2}$ et $g(x) = \sum\limits_n x^{2^n}$ ne se prolongent pas analytiquement en dehors du disque unité $D(0 , 1^-)$.

2° Soient K de caractéristique nulle, et k de caractéristique p. Considérons la fonction $\exp x = \sum\limits_n \frac{x^n}{n!}$. Son rayon de convergence est $p^{-1/(p-1)}$. On trouve $\lambda = p^{-1/(p-1)}$ et $J = \bigcup\limits_k \{p^k\}$. Cet ensemble est lacunaire. L'exponentielle n'est donc pas un élément analytique dans son disque de convergence.

3° Soient K de caractéristique nulle, et k de caractéristique $p \neq 2$. Considérons la fonction $1 - (1 - x)^{\frac{1}{2}} = \sum\limits_n a_n x^n$ avec $a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. Le rayon de convergence de cette série est 1. De plus, $|a_n| = \left|\binom{2n}{n}\right|$. Il résulte du lemme 4 que, pour $n = p^m$, $|a_n| = 1$ et, pour $\frac{p^m + 1}{2} < n \leqslant p^m - 1$, $|a_n| < 1$. On a donc $\lambda = 1$, et on voit que J est lacunaire car, pour tout m, on a

$$[\frac{p^m + 1}{2} , p^m - 1] \cap J = \emptyset \quad .$$

Cette fonction n'est pas un élément analytique dans le disque $D(0 , 1^-)$.

On peut améliorer ces résultats en faisant des hypothèses supplémentaires sur K . On suppose que k est de caractéristique ρ , et que, dans k , tout élément est une racine de l'unité. Ces conditions sont réalisées dans le cas de $\widehat{\Omega_p}$, clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$.

THÉORÈME 4. - <u>Soient</u> $K = \widehat{\Omega}_p$, $a \in SH$, λ <u>un nombre réel positif. Il existe</u> n_0 <u>et</u> m <u>tels que, pour</u> $n > n_0$, <u>on ait</u> $|a_{n+m} - a_n| < \lambda$.

Par homothétie, on peut se ramener au cas où $\|a\| \leqslant 1$ et $0 < \lambda < 1$.

Soit μ tel que $\frac{1}{p^\mu} < \lambda$. Alors, d'après le lemme 4, on a, pour $N = p^{\mu j}$, $\ell \in \underset{\sim}{N}$,

$$\left|\binom{n + \ell N + j}{j} - \binom{n + j}{j}\right| \leqslant \frac{1}{p^\mu} < \lambda \quad .$$

Soit $\beta \in K$, $|\beta| = 1$; il existe M tel que $|1 - \beta^M| < 1$, on peut alors montrer qu'il existe M' tel que $|1 - \beta^{M'}| < \lambda$, et donc $|1 - \beta^{\ell M'}| < \lambda$ pour $\ell \in \underset{\sim}{N}$.

Soit

$$a = \sum_i \lambda_i \, s_i + \sum_j \lambda_{j\alpha} \, s_{j\alpha} \quad .$$

On a $|\lambda_i| \leqslant 1$, $|\lambda_{j\alpha}| \leqslant 1$. Posons

$$b = \sum_{|\lambda_{j\alpha}| \geqslant \lambda} \lambda_{j\alpha} \, s_{j\alpha}$$

(c'est une somme finie).

Soit

$$n_0 = \sup_{|\lambda_i| \geqslant \lambda} (i) \quad .$$

Pour $n > n_0$, on a $|b_n - a_n| < \lambda$.

Si on pose

$$m = \prod_{|\lambda_{j\alpha}| \geqslant \lambda} N(j) \, M'(\widetilde{\alpha}^{-1}) \quad ,$$

il résulte de ce qu'on vient de montrer que

$$|b_{n+m} - b_n| < \lambda \, , \qquad \text{et donc} \qquad |a_{n+m} - a_n| < \lambda \quad .$$

Ce résultat est à rapprocher d'un résultat de F. BERTRANDIAS sur les coefficients de Taylor d'une fraction rationnelle ([1]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS (Françoise). - Séries de Taylor à coefficients rationnels, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 4e année : 1962/63, n° 17, 11 p.

[2] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Colloques internationaux du CNRS : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143. 1964. Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

[3] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Prolongement analytique en analyse p-adique (à paraître).

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

(Texte reçu le 18 juin 1970)