Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean-Pierre Serre

Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures)

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, n° 2 (1969-1970), exp. n° 19, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_2_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des Nombres)
11e année, 1969/70, n° 19, 15 p.
11 mai 1970

FACTEURS LOCAUX DES FONCTIONS ZÊTA DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES (DÉFINITIONS ET CONJECTURES)

par Jean-Pierre SERRE

§ 1. Position du problème

1.1. Conjectures standard sur les corps finis.

Rappelons brièvement en quoi elles consistent (voir [6], [7], [19], pour plus de détails).

On se donne un entier $m \geq 0$ et une variété projective non singulière Y sur un corps fini k à $q = p^f$ éléments. On note $\pi : y \longmapsto y^q$ l'endomorphisme de Frobenius de Y .

Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k , et soit $\bar{Y} = Y \times_k \bar{k}$ la variété déduite de Y par extension des scalaires de k à $\bar{k}$. Si ℓ est un nombre premier $\neq p$, M. Artin et A. Grothendieck ont défini le groupe de cohomologie $H^m(\bar{Y}, \mathbf{Q}_\ell)$ et montré que c'est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbf{Q}_\ell$ des nombres ℓ-adiques (cf. [2]). Par fonctorialité, π induit un endomorphisme $\pi_{\ell,m}$ de $H^m(\bar{Y}, \mathbf{Q}_\ell)$; cela permet de définir le polynôme

(1) $$P_{\ell,m}(T) = \det(1 - T.\pi_{\ell,m}) \quad ,$$

qui est à coefficients dans $\mathbf{Z}_\ell$. De plus, le produit

(2) $$Z(T) = \prod_{m=0}^{m=2r} P_{\ell,m}(T)^{(-1)^{m+1}} \quad , \qquad r = \dim(Y) \quad ,$$

coïncide (cf. [2]) avec la fonction zêta de Y au sens de Weil ([13], [19]) ; en particulier, c'est une fonction rationnelle de T , à coefficients dans $\mathbf{Q}$, et elle ne dépend pas du choix de ℓ .

Les "conjectures standard" pour une dimension m donnée consistent en les deux assertions suivantes :

C_1 - Le polynôme $P_{\ell,m}(T)$ est à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et ne dépend pas du choix du nombre premier ℓ .

(On peut donc le noter $P_m(T)$, sans préciser ℓ .)

C_2 (conjecture de Weil) - Si l'on décompose $P_m(T)$ sur $\underset{\sim}{C}$ en facteurs linéaires $(1 - \lambda_i T)$, on a $|\lambda_i| = q^{m/2}$ pour tout i .

Pour $m \leq 1$, ces assertions sont vraies, car équivalentes à des résultats classiques de Weil ([18], §§ IX, X). Pour $m \geq 2$, par contre, on sait peu de choses, faute d'avoir pu transposer en caractéristique p les résultats de la théorie kählérienne (cf. [6], [7], [11]).

1.2. Les "bons facteurs" des fonctions zêta sur les corps globaux.

Notations.

La lettre K désigne un corps global, i. e. un corps de nombres algébriques ou un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini. On note Σ_K (resp. Σ_K^∞) l'ensemble des places ultramétriques (resp. archimédiennes) de K . Si $v \in \Sigma_K \cup \Sigma_K^\infty$, on note K_v le complété de K pour v . Si v est ultramétrique, on note O_v , $k(v)$ et p_v l'anneau de valuation de K_v , son corps résiduel et sa caractéristique résiduelle ; on pose $Nv = \mathrm{Card}(k(v))$; on a

$$Nv = p_v^{\deg(v)} , \qquad \text{avec} \quad \deg(v) = [k(v) : \underset{\sim}{F}_{p_v}] .$$

La lettre X désigne une variété projective non singulière sur K . La lettre m désigne un entier ≥ 0 .

Bonnes réductions.

On choisit une partie finie S de Σ_K telle que X ait "bonne réduction en dehors de S ". Cela implique que, pour tout $v \in \Sigma_K - S$, il existe un O_v-schéma X_v projectif et lisse tel que $X_v \times_{O_v} K_v$ s'identifie à $X \times_K K_v$. On choisit un tel X_v , et l'on note $X(v)$ sa réduction en v , autrement dit le schéma $X_v \times_{O_v} k(v)$. C'est une variété projective non singulière sur le corps fini $k(v)$. Nous supposerons dans tout ce qui suit que $X(v)$ vérifie les conjectures standard C_1 et C_2 en dimension m . On peut donc parler du polynôme $P_m(T)$ correspondant, qui est à coefficients entiers ; comme ce polynôme dépend de v , on le notera $P_{m,v}(T)$. Son degré B_m est le m-ième nombre de Betti de $X(v)$ (ou de X , cela revient au même en vertu des résultats de [2]). Sur $\underset{\sim}{C}$, on peut écrire $P_{m,v}(T)$ sous la forme

$$(3) \qquad P_{m,v}(T) = \prod_{\alpha=1}^{\alpha=B_m} (1 - \lambda_{\alpha,v} T) , \qquad \text{avec} \quad |\lambda_{\alpha,v}| = Nv^{m/2} .$$

On dit souvent, par abus de langage, que les $\lambda_{\alpha,v}$ sont les valeurs propres de l'opérateur de Frobenius relatif à v opérant dans $H^m(X)$.

[Bien que $X(v)$ dépende du choix du O_v-schéma X_v , on peut montrer que le polynôme $P_{m,v}(T)$ en est indépendant : cela résulte de son interprétation en termes de la cohomologie de $X \times_K K_v$, cf. n° 2.3.]

La fonction ζ_S .

Elle dépend du choix de S (et bien entendu aussi de X , K , m). On la définit (cf. Tate [17]) par le produit eulérien

(4) $$\zeta_S(s) = \prod_{v \in \Sigma_K - S} \frac{1}{P_{m,v}(Nv^{-s})} = \prod_{v,\alpha} \frac{1}{1 - \lambda_{\alpha,v}\, Nv^{-s}} ,$$

produit qui converge absolument pour $R(s) > 1 + m/2$. On en déduit que $\zeta_S(s)$ est holomorphe et non nulle dans le demi-plan $R(s) > 1 + m/2$ et que c'est la somme d'une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$, à coefficients entiers, convergeant absolument dans le demi-plan en question.

1.3. Prolongement analytique et équation fonctionnelle de ζ_S .

En général, on ignore si la fonction ζ_S définie ci-dessus peut être prolongée analytiquement à gauche de la droite $R(s) = 1 + m/2$. Toutefois, on l'a vérifié dans un certain nombre de cas particuliers (variétés abéliennes à multiplication complexe, courbes modulaires, notamment). Dans chacun de ces cas, on constate que ζ_S se prolonge en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe, et possède une équation fonctionnelle du type $s \longleftrightarrow m + 1 - s$. Plus précisément, on arrive dans chaque cas à définir les objets suivants :

i) Un nombre rationnel $A > 0$;

ii) Pour tout $v \in S$, un polynôme $P_{m,v}(T) = \prod_\alpha (1 - \lambda_{\alpha,v} T)$, à coefficients entiers, de degré $B_{m,v} \leqslant B_m$;

iii) Pour tout $v \in \Sigma_K^\infty$, un "facteur gamma" $\Gamma_v(s)$ (cf. § 3).

De plus, si l'on pose

(5) $$\zeta(s) = \zeta_S(s) . \prod_{v \in S} \frac{1}{P_{m,v}(Nv^{-s})} = \prod_{v,\alpha} \frac{1}{(1 - \lambda_{\alpha,v}\, Nv^{-s})}$$

et

(6) $$\xi(s) = A^{s/2}\, \zeta(s) \prod_{v \in \Sigma_K^\infty} \Gamma_v(s) ,$$

l'équation fonctionnelle s'écrit :

(7) $$\xi(s) = w\xi(m+1-s) , \qquad \text{avec} \quad w = \pm 1 .$$

Lorsque l'on examine la façon dont A, les $P_{m,v}$ et les Γ_v sont définis dans chaque cas particulier, on constate qu'il est possible d'en donner une définition générale : A et les $P_{m,v}$ $(v \in S)$ ne dépendent que de la cohomologie ℓ-adique des variétés $X \times_K K_v$, et les Γ_v $(v \in \Sigma_K^\infty)$ ne dépendent que de la décomposition de Hodge de la cohomologie complexe de $X \times_K K_v$. C'est cette définition générale que je me propose de donner dans cet exposé ; on la trouvera au § 4 (les §§ 2 et 3 contiennent divers préliminaires de nature locale).

Je précise qu'il ne s'agit de rien de plus que de donner une définition, accompagnée d'un certain nombre de conjectures désignées par les sigles $C_3, \ldots, C_9$. Le problème de la démonstration de ces conjectures (et en particulier du prolongement analytique et de l'équation fonctionnelle) reste entier. D'ailleurs, une telle démonstration ne pourra sans doute se faire que par une combinaison convenable des méthodes de la géométrie algébrique avec celles de la théorie des fonctions modulaires, suivant la voie inaugurée par Weil [20] et poursuivie, entre autres, par Langlands ; nous sommes encore loin du but ...

§ 2. Invariants locaux ultramétriques.

Dans ce §, on désigne par K_v un corps complet pour une valuation discrète normalisée v. Comme au n° 1.2, on note O_v, $k(v)$ et p_v l'anneau de valuation de K_v, son corps résiduel et sa caractéristique résiduelle. On suppose $k(v)$ parfait ; à partir du n° 2.2, on suppose même que $k(v)$ est fini et l'on note Nv le nombre de ses éléments.

On choisit une clôture séparable $K_{v,s}$ de K_v ; on note G le groupe de Galois de $K_{v,s}$ sur K_v et I son groupe d'inertie.

2.1. Représentations ℓ-adiques et conducteurs.

Soit ℓ un nombre premier $\neq p_v$, soit V un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie d, et soit

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V) \simeq \mathbf{GL}(d, \mathbb{Q}_\ell)$$

un homomorphisme continu de G dans $\mathrm{Aut}(V)$, autrement dit une représentation ℓ-adique de G dans V au sens de [15], n° 1.1. Nous allons attacher à ρ deux entiers positifs ε et δ qui mesurent en quelque sorte la "ramification" de ρ.

L'invariant ε est le plus facile à définir : si V^I désigne le sous-espace de V formé des éléments invariants par le groupe d'inertie I, on pose

(8) $$\varepsilon = \mathrm{codim}.V^I = d - \dim.V^I \quad .$$

On a $\varepsilon = 0$ si et seulement si ρ est non ramifiée, i. e. si $\rho(I) = \{1\}$.

Pour définir δ, nous ferons l'hypothèse suivante :

(H_ρ) - Il existe un sous-groupe ouvert I' de I tel que $\rho(g)$ soit unipotent pour tout $g \in I'$.

(Rappelons qu'un endomorphisme est dit unipotent si toutes ses valeurs propres sont égales à 1.)

Remarque. - Grothendieck a montré ([16], p. 515) que la condition (H_ρ) est vérifiée lorsque $k(v)$ est fini. Il en est de même, d'après Deligne (non publié), lorsque ρ est la représentation définie par la cohomologie ℓ-adique d'une variété projective non singulière sur K_v, cf. n° 2.3.

Supposons (H_ρ) vérifiée, et prenons I' distingué dans I. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit V_n l'ensemble des $x \in V$ tels que $(\rho(g) - 1)^n x = 0$ pour tout $g \in I'$. Les V_n forment une filtration croissante de V, stable par I, et l'on a $V_n = V$ pour n assez grand, d'après le théorème de Lie-Kolchin appliqué à I'. Si l'on pose

$$\mathrm{gr}.V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n/V_{n+1} \quad ,$$

le groupe I opère sur $\mathrm{gr}.V$ par l'intermédiaire du groupe fini $\Phi = I/I'$. On en déduit en particulier que, si $g \in I$, la trace de $\rho(g)$ dans V ne dépend que de l'image de g dans Φ ; on obtient ainsi une fonction $\mathrm{Tr}_\rho : \Phi \to \mathbf{Q}_\ell$ que l'on appelle le caractère de ρ sur I.

Soit maintenant $K_{v,nr}$ l'extension non ramifiée maximale de K_v dans $K_{v,s}$; on a $I = \mathrm{Gal}(K_{v,s}/K_{v,nr})$ et le groupe Φ est donc le groupe de Galois d'une extension finie $K_\Phi/K_{v,nr}$, qui est totalement ramifiée. Soit v_Φ la valuation normée de K_Φ, et soit t une uniformisante de K_Φ ; on a $v_\Phi(t) = 1$. Définissons une fonction b_Φ sur Φ par les formules

(9) $$\begin{aligned} b_\Phi(g) &= 1 - v_\Phi(g(t) - t) \quad , \qquad \text{si } g \in \Phi - \{1\} \quad , \\ b_\Phi(1) &= - \sum_{g \neq 1} b_\Phi(g) \quad . \end{aligned}$$

La fonction b_Φ est un caractère du groupe Φ (c'est le caractère que Grothendieck appelle "de Swan", cf. [9] ainsi que [14], p. III-20). L'invariant δ est alors défini comme le produit scalaire $\langle \mathrm{Tr}_\rho , b_\Phi \rangle$ des caractères Tr_ρ et b_Φ :

(10) $$\delta = \langle \mathrm{Tr}_\rho , b_\Phi \rangle = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Phi)} \sum_{g \in \Phi} \mathrm{Tr}_\rho(g)\, b_\Phi(g) \quad .$$

C'est un entier $\geqslant 0$. Il ne dépend pas du choix de I' . On a $\delta = 0$ si et seulement si l'action de I sur $\mathrm{gr}.V$ est modérée, i. e. si $p_v = 0$ ou (dans le cas $p_v \neq 0$) si le p_v-sous-groupe de Sylow de I opère trivialement sur $\mathrm{gr}.V$ (cela revient aussi à dire que ce sous-groupe opère de façon unipotente sur V).

Une fois ε et δ définis, on pose

(11) $$f = \varepsilon + \delta \quad ;$$

c'est l'exposant du conducteur de ρ .

Remarques.

1) Les entiers ε , δ et f ne dépendent que de la restriction de ρ à I ; ils ne changent pas lorsque l'on fait une extension non ramifiée du corps de base (ce sont des invariants "géométriques").

2) On peut donner une autre interprétation de δ : soit Λ un $\mathbf{Z}_\ell$-réseau de V stable par G , et soit $V(\ell) = \Lambda/\ell\Lambda$ sa réduction modulo ℓ ; c'est un module galoisien d'ordre fini premier à p_v et sa "mesure de ramification sauvage" $\delta(K_v , V(\ell))$ est définie (cf. Ogg [9], § I) ; il n'est pas difficile de prouver (par les mêmes arguments que dans [16], § 3) que l'on a

(12) $$\delta = \delta(K_v , V(\ell)) \quad .$$

[On aurait pu prendre cette formule comme définition de δ ; cela aurait eu l'avantage d'éviter l'hypothèse (H_ρ).]

3) Lorsque l'image de ρ est finie, le conducteur d'Artin du caractère de ρ est défini (cf. par exemple [12], chap. VI, § 2) et l'on vérifie sans peine que son exposant est égal à f , ce qui justifie la terminologie employée.

2.2. Cas d'un corps résiduel fini.

Ajoutons aux hypothèses du n° précédent celle que $k(v)$ est fini. Le groupe G/I est alors muni d'un générateur canonique, le générateur de Frobenius $F : \lambda \longmapsto \lambda^{Nv}$. Comme I opère trivialement sur V^I , F définit un automorphisme de l'espace vectoriel V^I ; l'inverse de cet automorphisme sera appelé l'automorphisme de Frobenius "géométrique" ; nous le désignerons par π_ρ , ou simplement par π . Nous poserons

(13) $$P_\rho(T) = \det(1 - \pi_\rho . T) \quad .$$

(Précisons bien que π_ρ est un automorphisme de V^I et non de V tout entier.)

Le polynôme P_ρ est à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}_\ell$; son degré est égal à $\dim. V^I = d - \varepsilon$.

2.3. Application à la cohomologie.

Revenons maintenant à la situation du § 1 ; soit Y une variété projective non singulière sur K_v , et soit m un entier $\geqslant 0$. Si ℓ est un nombre premier $\neq p_v$, soit V_ℓ le m-ième groupe de cohomologie de $Y \times_{K_v} K_{v,s}$ à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}_\ell$. Le groupe G opère par transport de structure sur V_ℓ ; cela définit une représentation ℓ-adique ρ_ℓ , à laquelle on peut appliquer les définitions ci-dessus.

C_3 - Les entiers ε , δ et f relatifs à ρ_ℓ sont indépendants du choix de ℓ .

La partie de cette conjecture relative à δ peut être précisée de la manière suivante (cf. [16], p. 514, problem 1) :

C_4 - La restriction à I de la fonction $\mathrm{Tr}\, \rho_\ell$ est à valeurs dans $\underset{\sim}{Z}$ et elle est indépendante de ℓ .

Une fois C_3 et C_4 admis (ce que nous ferons), les entiers ε , δ et f sont définis sans ambiguïté.

Supposons maintenant que le corps résiduel $k(v)$ de K_v soit fini ; pour tout $\ell \neq p_v$, le polynôme P_{ρ_ℓ} relatif à la représentation ρ_ℓ est défini (cf. n° 2.2).

C_5 - Les coefficients de P_{ρ_ℓ} appartiennent à $\underset{\sim}{Z}$ et sont indépendants du choix de ℓ .

Admettons cette conjecture, et notons $P_m(T)$ le polynôme à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$ défini par l'un quelconque des P_{ρ_ℓ} . Décomposons P_m sur $\underset{\sim}{C}$ en produit de facteurs linéaires :

$$P_m(T) = \prod (1 - \lambda_\alpha T) \quad . \tag{14}$$

C_6 - Pour tout α , il existe un entier $m(\alpha)$ compris entre 0 et m tel que $|\lambda_\alpha| = Nv^{m(\alpha)/2}$.

C_7 - Si $\varepsilon = 0$, tous les $m(\alpha)$ sont égaux à m .

Remarques.

1) Les conjectures C_5, C_6, C_7 ne concernent que l'action de G sur V_ℓ^I ; il y a des conjectures plus générales, relatives à l'action de G sur V_ℓ tout entier,

par exemple la suivante (cf. [16], p. 514, problem 2) :

C_8 - Soit g un élément de G dont l'image dans G/I soit une puissance entière du générateur de Frobenius F. Le polynôme caractéristique de $\rho_\ell(g)$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et ne dépend pas de ℓ.

2) Admettons que les théorèmes de Lefschetz (sous la forme $A(X)(a)$ de [6]) s'appliquent à Y, ce qui est par exemple le cas lorsque K_v est de caractéristique zéro. On peut alors, pour tout $\ell \neq p_v$, construire sur V_ℓ une forme bilinéaire non dégénérée, à valeurs dans ce que Grothendieck note $\mathbb{Q}_\ell[-m]$, et qui est invariante par G (compte tenu de l'action de G à la fois sur V_ℓ et sur $\mathbb{Q}_\ell[-m]$). Si l'on suppose que ρ_ℓ est non ramifiée (i. e. $\varepsilon = 0$), cela entraîne que, pour tout indice α, il existe un indice β tel que

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = Nv^m \quad . \tag{15}$$

D'où $m(\alpha) + m(\beta) = 2m$, et comme $m(\alpha)$ et $m(\beta)$ sont compris entre 0 et m d'après C_6, on a $m(\alpha) = m(\beta) = m$. Ainsi, C_6 entraîne C_7, au moins en caractéristique zéro.

3) Supposons que Y ait bonne réduction en v, et soit $Y(v)$ une telle réduction. D'après [2], la cohomologie ℓ-adique de Y s'identifie à celle de $Y(v)$; en particulier, on a $\varepsilon = 0$. De plus, le polynôme P_m relatif à Y (au sens ci-dessus) coïncide avec le polynôme P_m relatif à $Y(v)$ (au sens du n° 1.1) ; voir à ce sujet Tate [17], § 3. Les conjectures C_5 et C_7 se réduisent alors aux conjectures standard C_1 et C_2.

2.4. Exemple : courbes elliptiques (cf. Ogg [9]).

Supposons que Y soit une courbe elliptique, et que $m = 1$. L'espace de cohomologie V_ℓ est le dual du module de Tate T_ℓ de Y. Il y a trois cas à distinguer, suivant la structure de la composante connexe $Y(v)$ de la fibre du modèle de Néron de Y :

a) Bonne réduction (i. e. $Y(v)$ est une courbe elliptique).

On a $\varepsilon = \delta = f = 0$. Le polynôme P_m est de degré 2 ; il est donné par

$$P_m(T) = 1 - a_v T + Nv T^2 \quad , \tag{16}$$

où a_v est la trace de l'endomorphisme de Frobenius de la courbe réduite $Y(v)$. Le nombre de points de $Y(v)$ sur $k(v)$ est égal à $P_m(1) = 1 - a_v + Nv$; cela donne un moyen de calculer a_v.

b) Mauvaise réduction de type multiplicatif (i. e. $Y(v)$ est un tore de dimension 1).

On a $\varepsilon = 1$, $\delta = 0$, $f = 1$. Le polynôme P_m est de degré 1 ; il est donné par

(17) $$P_m(T) = 1 - c_v T , \qquad c_v = \pm 1 ,$$

avec $c_v = +1$ (resp. $c_v = -1$) si le tore $Y(v)$ est déployé (resp. ne l'est pas).

c) Mauvaise réduction de type additif (i. e. $Y(v)$ est isomorphe au groupe additif).

On a $\varepsilon = 2$ et $P_m = 1$. L'invariant δ est égal à 0 si p_v est différent de 2 , 3 . Lorsque $p_v = 2$ ou 3 , le calcul de δ est indiqué (au moins partiellement) dans Ogg [9].

Plus généralement, les conjectures $C_3, \ldots, C_8$ sont vraies pour toute variété abélienne. Cela se démontre (par les arguments de [16], § 3) à partir du théorème de Grothendieck-Mumford disant qu'une telle variété admet un modèle de Néron sans composante additive après extension finie du corps de base (cf. Grothendieck [4], exposé IX).

§ 3. Invariants locaux archimédiens.

Dans toutes les équations fonctionnelles connues, les facteurs gammas sont accompagnés de puissances de π . Pour pouvoir traiter les deux simultanément, nous poserons

(18) $$\Gamma_{\underset{\sim}{R}}(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2) ,$$

(19) $$\Gamma_{\underset{\sim}{C}}(s) = (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s) .$$

On a

(20) $$2\Gamma_{\underset{\sim}{C}}(s) = \Gamma_{\underset{\sim}{R}}(s)\,\Gamma_{\underset{\sim}{R}}(s+1) .$$

[Cette dernière formule suggère de remplacer $\Gamma_C(s)$ par $2\Gamma_C(s)$ dans tout ce qui suit ; ce genre de changement est inoffensif puisqu'il revient à multiplier les deux membres de l'équation fonctionnelle par la même puissance de 2 .]

3.1. Décomposition de Hodge sur $\underset{\sim}{C}$.

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie. Une $\underset{\sim}{C}$-décomposition de Hodge de V est une décomposition de V en somme directe $V = \bigoplus V^{p,q}$, indexée par $\underset{\sim}{Z} \times \underset{\sim}{Z}$.

Posons

$$h(p\ ,\ q) = \dim . V^{p,q} \ . \tag{21}$$

Le facteur gamma attaché à V est défini comme le produit :

$$\Gamma_V(s) = \prod_{p,q} \Gamma_{\underset{\sim}{C}}(s - \operatorname{Inf}(p\ ,\ q))^{h(p,q)} \ . \tag{22}$$

3.2. Décomposition de Hodge sur $\underset{\sim}{R}$.

Soit V comme ci-dessus. Une $\underset{\sim}{R}$-décomposition de Hodge de V est le couple formé d'une $\underset{\sim}{C}$-décomposition de Hodge $(V^{p,q})$ et d'un automorphisme σ de V tel que $\sigma^2 = 1$ et $\sigma(V^{p,q}) = V^{q,p}$ pour tout couple $(p\ ,\ q)$.

Supposons V muni d'une telle structure. Nous poserons comme ci-dessus $h(p\ ,\ q) = \dim . V^{p,q}$.

Si n est un entier, l'automorphisme σ laisse stable $V^{n,n}$; cela permet de décomposer $V^{n,n}$ en somme directe de deux sous-espaces

$$V^{n,n} = V^{n,+} \oplus V^{n,-} \ , \tag{23}$$

avec

$$V^{n,+} = \{x \mid x \in V^{n,n}\ ,\ \sigma(x) = (-1)^n x\} \ ,$$

$$V^{n,-} = \{x \mid x \in V^{n,n}\ ,\ \sigma(x) = (-1)^{n+1} x\} \ .$$

Nous poserons

$$h(n\ ,\ +) = \dim . V^{n,+} \quad \text{et} \quad h(n\ ,\ -) = \dim . V^{n,-} \ , \tag{24}$$

de sorte que $h(n\ ,\ n) = h(n\ ,\ +) + h(n\ ,\ -)$.

Le facteur gamma attaché à V est alors défini comme le produit

$$\Gamma_V(s) = \prod_n \Gamma_{\underset{\sim}{R}}(s - n)^{h(n,+)}\, \Gamma_{\underset{\sim}{R}}(s - n + 1)^{h(n,-)} \prod_{p<q} \Gamma_{\underset{\sim}{C}}(s - p)^{h(p,q)} \ . \tag{25}$$

3.3. Applications à la cohomologie.

Revenons à la situation du § 1. Soit K_v un corps complet pour une valeur absolue archimédienne ; on sait que K_v est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$ (cf. Bourbaki, Alg. Comm., Chap. VI, § 6). Soit Y une variété projective non singulière sur K_v, et soit m un entier $\geqslant 0$. On va attacher à ces données une K_v-structure de Hodge, donc aussi un facteur gamma, en vertu de ce qui précède. Distinguons deux cas :

a) K_v est isomorphe à $\mathbb{C}$. Soit Z l'espace topologique $Y(K_v)$ des points de Y dans K_v, et prenons pour V le groupe de cohomologie $H^m(Z, \mathbb{C})$. Une fois choisi un isomorphisme de K_v avec $\mathbb{C}$, l'espace Z est muni d'une structure de variété analytique complexe et la théorie de Hodge fournit une décomposition $V = \bigoplus V^{p,q}$ $(p + q = m)$ de V en somme de sous-espaces de type (p, q). D'où une $\mathbb{C}$-structure de Hodge sur V, au sens du n° 3.1. Si l'on remplace l'isomorphisme $K_v \simeq \mathbb{C}$ par son conjugué, on obtient la structure de Hodge symétrique de la précédente ($V^{p,q}$ devient $V^{q,p}$), et le facteur gamma correspondant est le même. On a donc associé à (K_v, Y, m) un facteur gamma bien déterminé, que nous noterons $\Gamma_v(s)$.

b) $K_v = \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{C}$ est une extension quadratique de K_v, l'espace $Z = Y(\mathbb{C})$ des points de Y dans $\mathbb{C}$ est défini. Munissons comme ci-dessus $V = H^m(Z, \mathbb{C})$ de la structure de Hodge définie par la structure analytique complexe canonique de Z. La conjugaison complexe $z \longmapsto \bar{z}$ est un automorphisme anti-holomorphe de Z ; elle induit sur V un automorphisme σ transformant $V^{p,q}$ en $V^{q,p}$, et l'on a $\sigma^2 = 1$. On obtient donc bien sur V une $\mathbb{R}$-structure de Hodge au sens du n° 3.2, d'où un facteur gamma, que nous noterons $\Gamma_v(s)$.

Exemple.

Prenons $m = 1$, et soit Y une variété abélienne de dimension r. On a $h(1, 0) = h(0, 1) = r$, les autres $h(p, q)$ étant nuls. On en déduit que, si $K_v = \mathbb{C}$, le facteur gamma est égal à $\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{2r}$. Si $K_v = \mathbb{R}$, il est égal à $\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^r$.

§ 4. L'équation fonctionnelle

4.1. Enoncé.

Nous reprenons les notations et hypothèses du n° 1.3. En particulier, X désigne une variété projective non singulière sur un corps global K, et m désigne un entier $\geqslant 0$. Nous allons définir les invariants A, $P_{m,v}$ et Γ_v promis au n° 1.3 :

i) Le conducteur.

C'est le diviseur positif $\mathfrak{f}$ de K défini (en notation additive) par la formule

(26) $$\mathfrak{f} = \sum_{v \in \Sigma_K} f(v).v \quad ,$$

où $f(v)$ est " l'invariant f " attaché à la cohomologie de dimension m de la variété $X \times_K K_v$ sur le corps local K_v. (Noter que $f(v)$ est nul lorsque X a bonne réduction en v, ce qui fait que la somme (26) est finie.)

Lorsque K est un corps de nombres, $\mathfrak{f}$ s'identifie à un idéal entier du corps K.

ii) Définition de A.

Si K est un corps de nombres, posons

(27) $$D = |d_{K/\mathbb{Q}}| \quad ,$$

où $d_{K/\mathbb{Q}}$ est le discriminant de K sur $\mathbb{Q}$.

Si K est un corps de fonctions de genre g sur un corps fini à q éléments, posons

(28) $$D = q^{2g-2} \quad .$$

(Noter que D est le facteur qui intervient dans la définition de la mesure de Tamagawa.)

Soit d'autre part $N(\mathfrak{f}) = \prod_{v \in \Sigma_K} Nv^{f(v)}$ la norme du conducteur $\mathfrak{f}$ défini ci-dessus. L'invariant A est défini par

(29) $$A = N(\mathfrak{f}).D^{B_m} \quad ,$$

où B_m est le m-ième nombre de Betti de X.

iii) Définition des $P_{m,v}$, $v \in \Sigma_K$.

Ce sont les polynômes P_m relatifs à la variété $X \times_K K_v$, cf. n° 2.3. Lorsque $v \notin S$, ils coïncident avec les $P_{m,v}$ déjà définis au n° 1.2.

iv) Définition des facteurs gamma $\Gamma_v(s)$, $v \in \Sigma_K^\infty$.

Ce sont les facteurs gamma relatifs aux variétés $X \times_K K_v$, cf. n° 3.3.

On peut maintenant définir $\zeta(s)$ et $\xi(s)$ par les formules

(5) $$\zeta(s) = \prod_{v \in \Sigma_K} \frac{1}{P_{m,v}(Nv^{-s})}$$

et

$$\xi(s) = A^{s/2}\, \zeta(s) \prod_{v\in\Sigma_K^\infty} \Gamma_v(s) \quad , \tag{6}$$

et formuler la conjecture :

C_9 - Les fonctions $\zeta(s)$ et $\xi(s)$ se prolongent en des fonctions méromorphes dans tout le plan complexe. On a

$$\xi(s) = w\xi(m+1-s) \ , \qquad \text{avec} \quad w = \pm 1 \ . \tag{7}$$

On trouvera dans l'exposé de Tate [17] des conjectures supplémentaires relatives aux zéros et pôles de $\zeta(s)$.

Exemples.

a) Supposons que K soit un corps de fonctions de genre g sur un corps fini à q éléments, et que les théorèmes de Lefschetz s'appliquent à X (c'est par exemple le cas si l'on peut relever X en caractéristique zéro). Alors la conjecture C_9 est vraie (Grothendieck, non publié). De façon plus précise, comme les conjectures précédentes $C_1, \ldots, C_8$ ne sont pas encore démontrées, Grothendieck travaille avec un ℓ fixé. Il considère $\zeta(s)$ comme une série formelle $Z(T)$, à coefficients dans $\mathbf{Q}_\ell$, en la variable $T = q^{-s}$, et il montre que c'est une fonction rationnelle de T , et que l'on a l'équation fonctionnelle

$$Z(T) = w(q^{(m+1)/2}\, T)^a\, Z(1/q^{m+1}\, T) \quad , \tag{30}$$

avec

$$a = \deg(\mathfrak{f}) + 2g - 2 \ , \qquad \text{i. e.} \quad q^a = A \ . \tag{31}$$

La formule (30) est équivalente à (7).

La démonstration de Grothendieck s'applique en fait à toute représentation ℓ-adique sur K ; l'équation fonctionnelle met alors en relation la fonction zêta de la représentation et celle de sa duale (le théorème de Lefschetz sert simplement à déterminer cette duale dans le cas particulier considéré ici).

Bien entendu, c'est ce résultat de Grothendieck qui est principalement à la base des définitions que nous avons adoptées pour les invariants $f(v)$, $P_{m,v}$ et A .

b) Soit K un corps de nombres, soit $X = \mathrm{Spec}(K)$ une variété réduite à un point, et prenons $m = 0$. On a $N(\mathfrak{f}) = 1$, $A = D$, $P_{m,v}(T) = 1 - T$ pour tout $v \in \Sigma_K$, et la fonction ζ est la fonction zêta du corps K , au sens usuel ; l'équation (7) est son équation fonctionnelle, démontrée par Hecke ; la constante w est ici égale à 1 .

c) Prenons $K = \mathbf{Q}$, $m = 1$, et choisissons pour X une courbe elliptique. On a

$D = 1$, A est le conducteur de X , $\Gamma_V(s) = \Gamma_{\underset{\sim}{C}}(s)$ et (7) est l'équation fonctionnelle conjecturée par Weil [20]. Lorsque X a de la multiplication complexe, sa fonction zêta est essentiellement une fonction L de Hecke à "Grössencharaktere", ce qui permet de démontrer son équation fonctionnelle (Deuring) ; on constate que celle-ci est identique à (7). En dehors de ce cas, (7) a été vérifiée pour certaines des courbes associées aux courbes modulaires, mais malheureusement pas pour toutes (faute de bien connaître les propriétés de ramification des représentations ℓ-adiques attachées aux formes modulaires au sens de Deligne [3]). C'est d'autant plus dommage que, d'après une autre conjecture de Weil, toute courbe elliptique sur $\underset{\sim}{Q}$ doit être associée (en un sens facile à préciser) à une courbe modulaire.

4.2. Compléments.

Il y a des énoncés analogues pour les fonctions $L(s , \chi)$ d'Artin relatives à l'action d'un groupe fini sur X et à la donnée d'un caractère χ de ce groupe. (Le cas traité par Artin [1] correspond à $m = 0$.) Bien entendu, l'équation fonctionnelle relie alors $L(s , \chi)$ à $L(m + 1 - s , \bar{\chi})$, où $\bar{\chi}$ désigne le conjugué de χ . De plus, la constante $w(\chi)$ de l'équation fonctionnelle n'est plus nécessairement égale à ± 1 . L'expression explicite de $w(\chi)$ présente un intérêt considérable ; une telle expression a été donnée pour les fonctions L d'Artin par Dwork [5] (au signe près) et Langlands [8]. Utilisant ces résultats, Deligne a formulé une conjecture générale donnant, dans tous les cas, la valeur de $w(\chi)$ en termes d'invariants locaux ; on la trouvera dans l'exposé qui fait suite à celui-ci ; le cas des courbes elliptiques avait d'ailleurs été remarqué par Langlands (non publié).

Signalons aussi que les définitions et conjectures ci-dessus peuvent être données dans le cadre des "motifs" de Grothendieck, c'est-à-dire, grosso modo, des facteurs directs des H^m fournis par des projecteurs algébriques. Ce genre de généralisation est utile si l'on veut, par exemple, discuter des propriétés des produits tensoriels de groupes de cohomologie, ou, ce qui revient au même, des variétés produits. Le cas du produit de deux courbes elliptiques est particulièrement intéressant (cf. Ogg [10]).

Bibliographie

[1] ARTIN (E.). - Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren, Hamb. Abh., 8, 1930, p. 292-306 [Collected Papers, p. 165-179].

[2] ARTIN (M.), GROTHENDIECK (A.) et VERDIER (J.-L.). - Cohomologie étale des schémas, Séminaire IHES (SGA 4).

[3] DELIGNE (P.). - Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, Séminaire BOURBAKI, 1968/69, exposé 355.

[4] DELIGNE (P.) et GROTHENDIECK (A.). - Groupe de monodromie locale en géométrie algébrique, Séminaire IHES (SGA 7).

[5] DWORK (B.). - On the Artin root number, Amer. J. of Math., 78, 1956, p. 444-472.

[6] GROTHENDIECK (A.). - Standard conjectures on algebraic cycles, Algebraic Geometry, Bombay Colloquium 1968, Oxford Univ. Press, 1969, p. 193-199.

[7] KLEIMAN (S.). - Algebraic cycles and the Weil conjectures, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1968, p. 359-386.

[8] LANGLANDS (R.). - On the functional equation of the Artin L-functions, Notes polycopiées, Yale Univ. (en préparation).

[9] OGG (A.). - Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. of Maths., 89, 1967, p. 1-21.

[10] OGG (A.). - On a convolution of L-Series, Inventiones Math., 7, 1969, p. 297-312.

[11] SERRE (J.-P.). - Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil, Ann. of Math., 71, 1960, p. 392-394.

[12] SERRE (J.-P.). - Corps locaux, 2ème éd., Paris, Hermann, 1968.

[13] SERRE (J.-P.). - Zeta and L-Functions, Arithm. Alg. Geometry, Proc. of a conference held at Purdue Univ., Harper and Row, New York, 1965, p. 82-92.

[14] SERRE (J.-P.). - Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1967.

[15] SERRE (J.-P.). - Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves, Benjamin, New York, 1968.

[16] SERRE (J.-P.) et TATE (J.). - Good reduction of abelian varieties, Annals of Math., 88, 1968, p. 492-517.

[17] TATE (J.). - Algebraic cycles and poles of zeta functions, Arithm. Alg. Geometry, Proc. of a conference held at Purdue Univ., Harper and Row, New York, 1965, p. 93-110.

[18] WEIL (A.). - Variétés abéliennes et courbes algébriques, Hermann, Paris, 1948.

[19] WEIL (A.). - Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 1949, p. 497-508.

[20] WEIL (A.). - Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann., 168, 1967, p. 149-156.

(Texte reçu le 18 juin 1970)

Jean-Pierre SERRE
Collège de France
75 - PARIS 05