Gérard Ligozat

Fonction L des courbes modulaires

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, n° 1 (1969-1970), exp. n° 9, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_1_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
11e année, 1969/70, n° 9, 10 p.

26 janvier 1970

FONCTION L DES COURBES MODULAIRES

par Gérard LIGOZAT

Le but de ce travail est la vérification, pour certaines courbes modulaires de la conjecture de Swinnerton-Dyer.

1. Courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$.

Nous désignons le plus souvent par courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$, une variété abélienne de dimension 1 définie sur $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire une courbe de genre 1 définie sur $\mathbb{Q}$, munie d'un point rationnel sur $\mathbb{Q}$. Une telle courbe se met sous la forme

$$(E) \qquad y^2 = x^3 + Ax + B , \qquad A , B \in \mathbb{Q} ,$$

l'origine étant le point à l'infini.

2. Espace vectoriel de dimension 1 .

Les différentielles de première espèce sur E forment un espace vectoriel de dimension 1 . Sur E , on peut prendre pour représentante

$$\Omega = \frac{dx}{y} .$$

3. Bonne et mauvaise réduction.

Il existe un ensemble fini non vide de nombres premiers p , en lesquels la réduction de E modulo p n'est pas elliptique. On dit qu'il y a mauvaise réduction, sinon bonne réduction. Si E a bonne réduction en p , la fonction ζ locale est définie par

$$\zeta_p(E , s) = \frac{(1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \overline{\alpha_p} p^{-s})}{(1 - p^{-s})(1 - p^{1-s})} ,$$

où α_p , $\overline{\alpha_p}$ sont caractérisés par

$$N_p = p - \alpha_p - \overline{\alpha_p} + 1 , \qquad \alpha_p \overline{\alpha_p} = 1 ,$$

où N_p est le nombre des points de E_p , réduction de E modulo p , rationnels sur $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

4. Fonction L globale.

On définit une fonction L globale par

$$L(E\ ,\ s) = \prod_{p\ \mathrm{bon}} \{(1-\alpha_p\, p^{-s})(1-\overline{\alpha_p}\, p^{-s})\}^{-1} \ .$$

Résultats connus.

(a) Le produit converge pour $\mathrm{Re}(s) > 3/2$. WEIL a conjecturé que $L(s)$ peut être prolongé dans tout le plan complexe, et qu'une équation fonctionnelle lie $L(s)$ et $L(2-s)$.

(b) Lorsque E est une courbe elliptique avec multiplication complexe, ou plus généralement une variété abélienne de type CM , L vérifie l'hypothèse de WEIL ([7]).

(c) Lorsque E est définie par certains groupes modulaires, la conjecture est, là encore, vérifiée d'après [1], [6]. C'est un cas particulier qui nous occupe. Pour les courbes que nous considérons, nous savons que la fonction L est définie pour $s = 1$, et vérifie une équation fonctionnelle.

5. Fonction L normalisée.

S désigne un ensemble fini de nombres premiers tels que E et une différentielle Ω , choisie sur E , aient bonne réduction en dehors de S . On définit

$$L_S^*(E\ ,\ s) = \prod_{p\in S} \{M_p(E)\}^{-1} \prod_{p\notin S} \{(1-\alpha_p\, p^{-s})(1-\overline{\alpha_p}\, p^{-s})\}^{-1} \ ,$$

où $M_p(E)$ est appelé le nombre de Tamagawa associé à p ,

$$M_p(E) = \int_{E(\mathbb{Q}_p)} |\Omega|_p\, \mu_p \ ,$$

où $|\ |_p$ est la valuation p-adique, μ_p la mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p$ normalisée par

$$\mu_p(\mathbb{Z}_p) = 1 \qquad \text{et} \qquad M_\infty(E) = \int_{E(\mathbb{R})} \Omega \ .$$

(a) Pour S donnée, $L_S^*(E\ ,\ s)$ ne dépend pas de la forme Ω choisie, à condition qu'il y ait bonne réduction.

(b) Si S_1 , S_2 sont deux ensembles de cette forme,

$$L_{S_1}^*(E\ ,\ s)/L_{S_2}^*(E\ ,\ s) \to 1 \qquad \text{lorsque} \quad s \to 1 \ .$$

En effet, si on a bonne réduction,

$$M_p(E) = N_p/p = (1 - \alpha_p^{-1})(1 - \overline{\alpha_p^{-s}}) \quad .$$

Par la suite, nous désignons par $L^*(E , s)$ un tel produit d'Euler qui diffère par un nombre fini de facteurs de $L(E , s)$ et tel que

$$L^*(E , s)/L_S^*(E , s) \to 1 , \qquad \text{pour} \quad s \to 1 \quad .$$

6. Le groupe de Tate-Šafarevič.

On rappelle que le groupe de Weil-Châtelet $WC(E , \mathbb{Q})$ est le groupe des espaces homogènes sur E modulo une relation d'équivalence, qui s'interprète comme

$$H^1(G , E(\overline{\mathbb{Q}})) , \qquad \text{où} \quad G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \quad .$$

Le groupe de Šafarevič est alors défini par

$$0 \to Ш \to H^1(G , E(\overline{\mathbb{Q}})) \to \bigoplus H^1(G_p , E(\overline{\mathbb{Q}}_p)) , \quad \text{pour toutes les valuations } p ;$$

c'est le sous-groupe des espaces homogènes qui sont partout localement triviaux, c'est-à-dire ont un point rationnel sur tous les complétés de $\mathbb{Q}$, y compris $\mathbb{R}$.

(a) On n'a jamais calculé Ш directement.

(b) On conjecture que Ш est un groupe fini.

(c) CASSELS a montré que, si Ш est fini, son ordre est un carré.

(d) Dans des cas particuliers, on sait calculer des p-composantes de Ш .

La conjecture de Swinnerton-Dyer suppose que Ш est fini.

7. La conjecture de Swinnerton-Dyer.

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$. Le groupe $E(\mathbb{Q})$ des points rationnels de E est de type fini, d'après Mordell-Weil.

Soient r le rang de $E(\mathbb{Q})$, η l'ordre du sous-groupe des points d'ordre fini. La conjecture s'énonce sous sa forme la plus élaborée ([8]),

$$L^*(E , s) \sim 2^r (s - 1)^r f \frac{\#(Ш)}{\eta^2} \quad ,$$

où f est un coefficient dépendant des hauteurs des points rationnels d'ordre infini, $f = 1$ pour $r = 0$.

(a) Conséquence : Pour $r = 0$,

$$L^*(1) = \frac{\#(Ш)}{\eta^2} \quad .$$

Pour $r \neq 0$,

$$L^*(1) = 0 \quad .$$

A l'origine de cette conjecture se trouvent les calculs de SWINNERTON-DYER et BRICH, concernant les courbes de la forme

$$y^2 = x^3 + Dx \quad ,$$
$$y^2 = x^3 + D \quad ,$$

qui ont une multiplication complexe. Récemment ([8]), STEPHENS a réussi à évaluer, dans certains cas particuliers (pour des courbes $X^3 + Y^3 = D$), le coefficient intervenant dans des cas où $r = 1$ ou $r = 2$.

(b) CASSELS a démontré que la conjecture est "invariante" par isogénie.

(c) TATE a généralisé cette conjecture pour des variétés abéliennes de dimension arbitraire ([10]).

8. Equation minimale de Weierstrass.

Soit E une variété abélienne de dimension 1 définie sur $\underset{\sim}{Q}$. Il existe un modèle de E de la forme

(1) $$y^2 + \lambda xy + \mu y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad ,$$

où α , β , γ , λ , $\mu \in \underset{\sim}{Z}$, et où le discriminant de (1), soit Δ , est minimal ([5], [9]).

Soit E de la forme (1), posons

(A) $$L_p(s) = \{(1 - \alpha_p\, p^{-s})(1 - \overline{\alpha_p}\, p^{-s})\}^{-1} \quad ,$$

s'il y a bonne réduction,

(B) $$L_p(s) = (1 - \varepsilon_p\, p^{-s})^{-1} \quad ,$$

s'il y a réduction de type B ([9]), avec $\varepsilon_p = +1$ si les tangentes sont rationnelles, $\varepsilon_p = -1$ sinon.

(C) $$L_p(s) = 1 \quad ,$$

si la réduction est de type C.

Alors, d'après TATE,

$$M_p(E) = c_p/L_p(1) \quad ,$$

pour tout p , où c_p désigne le nombre des composantes simples du modèle réduit de Néron qui sont rationnelles.

Nous posons

$$L^*(E\ ,\ s) = \{M_\infty(E) \prod c_p\}^{-1} \prod_{\text{tous les } p} L_p(s) \quad .$$

9. Courbes modulaires.

Soient H le demi-plan complexe, et $\Gamma_0(N)$ le groupe des transformations

$$z \longmapsto \left(\frac{az+b}{cz+d}\right) , \qquad \begin{cases} a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d \in \mathbb{Z} \ , \\ ad - bc = 1 \ , \\ c \equiv 0 \quad (\text{modulo } N) \ . \end{cases}$$

Soient $\Gamma_0^*(N)$ le sous-groupe du groupe modulaire Γ engendré par $\Gamma_0(N)$, et

$$W_N(z) = -\frac{1}{Nz} \quad .$$

Dans ces conditions, $\widehat{H/\Gamma_0(N)}$ et $\widehat{H/\Gamma_0^*(N)}$ sont des surfaces de Riemann compactes. $\widehat{H/\Gamma_0(N)}$ est une surface de Riemann de genre Δ pour

$$N = 11\ ,\ 14\ ,\ 15\ ,\ 17\ ,\ 19\ ,\ 20\ ,\ 21\ ,\ 24\ ,\ 27\ ,\ 32\ ,\ 36\ ,\ 49 \quad .$$

Le corps des fonctions de $\widehat{H/\Gamma_0^*(N)}$ est $\mathbb{C}(j(z)\ ,\ j(Nz))$. On peut définir la courbe modulaire Φ_N par l'équation modulaire $\Phi_N(j(z)\ ,\ j(Nz)) = 0$, c'est un des modèles de $\mathbb{Q}(j(z)\ ,\ j(Nz))$. On désigne par F_N un modèle complet non singulier.

(a) IGUSA [4] a montré qu'il existe un tel modèle ayant bonne réduction en tout p ne divisant pas N .

(b) Un résultat plus précis résulte d'une conjecture de Weil.

10. Une conjecture de Weil.

Revenons à une courbe E définie sur $\mathbb{Q}$ par (1),

$$y^2 + \lambda xy + \mu y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad .$$

(a) Conducteur : La courbe E peut être considérée comme courbe sur $\mathbb{Q}_p$.

Soit $G_p = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.

Soit B un G_p-module fini avec $\ell . B = 0$ pour un $\ell \neq p$. SERRE a défini une mesure de ramification sauvage de B :

$$\delta(\mathbb{Q}_p\ ,\ B) \quad .$$

En particulier, soit E_ℓ le groupe des points d'ordre ℓ . On peut donc définir

$$\delta(\underset{\sim}{Q}_p , E_\ell) , \qquad \text{pour } \ell \neq p .$$

Alors ([4]), $\delta(\underset{\sim}{Q}_p , E_\ell) = \delta_p$ ne dépend pas de ℓ .

Soient $\mathrm{ord}_p(\Delta)$ la valuation de Δ minimal, et n_p le nombre de composantes du modèle minimal de Néron ; et soit $\varepsilon_p = 0 , 1 , 2$, suivant que la réduction est de type A , B , C .

Alors

$$\mathrm{ord}_p(\Delta) - n_p + 1 = \delta_p + \varepsilon_p .$$

Ceci est nul en particulier en cas de bonne réduction.

On définit le conducteur de E par

$$N = \prod_p p^{\delta_p + \varepsilon_p} .$$

Les p intervenant avec un exposant non nul sont ceux divisant le discriminant minimal Δ .

(b) <u>Conjecture de Weil</u> : Soient E une courbe elliptique définie sur $\underset{\sim}{Q}$ de conducteur N , et J_N la jacobienne de F_N . E est isogène à une courbe tracée sur J_N .

COROLLAIRE 1. - <u>Il n'y a pas de courbes elliptiques de conducteurs</u>

$$N = 1 \text{ à } 10 , 12 , 13 , 16 , \text{etc.}$$

<u>pour lesquels</u> F_N <u>est de genre</u> 0 .

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> E <u>de conducteur</u> $N = 11 , 14 , 15 , 17$. <u>Alors</u> E <u>est isogène à</u> F_N (<u>qui est de conducteur</u> N).

Ceci a été vérifié par OGG [5] pour $N = 24 , 36$. Le premier corollaire a été vérifié pour un certain nombre de valeurs de N .

(c) Les résultats obtenus ici entraînent :

Pour $N = 11 , 14 , 15 , 17$, etc. , la courbe F_N est de conducteur N . (On le vérifie facilement à l'aide du tableau.)

11. Les courbes de Fricke.

FRICKE [2] a considéré les N pour lesquels $\widehat{H/\Gamma_0^*(N)}$ est de genre 0 . Il y en a 36. En particulier, les 12 cas pour lesquels $\widehat{H/\Gamma_0(N)}$ est de genre 1 en sont.

Dans ces conditions, si τ est une uniformisante de $\widehat{H/\Gamma_0^*(N)}$,

$$K(z) = j(z) - j(Nz)$$

change de signe sous W_N . Donc $K^2(z)$ est une fonction rationnelle de τ ,

$$K^2 = \psi(\tau) \quad .$$

FRICKE obtient ainsi des équations de la forme

$$\sigma^2 = \tau^4 + a\tau^3 + b\tau^2 + c\tau + d \quad ,$$

qui sont des modèles de $\underset{\sim}{Q}(j(z) , j(Nz))$.

12. Théorie de Hecke et résultats de Eichler-Shimura.

(a) Soit $f(z)$ une forme parabolique de poids -2 pour $\Gamma_0(N)$. L'espace de ces formes est de dimension égale au genre de F_N , donc à 1 pour

$$N = 11 , 14 , 15 , 17 , \ldots \quad .$$

(b) $f(z) \longmapsto f(z)\, dz$ est un isomorphisme de l'espace des formes paraboliques de poids -2 sur celui des différentielles de première espèce sur F_N . Donc, si $\Omega = f(z)\, dz$, $f(z)$ est vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke T_p ,

$$T_p\, f = \alpha_p\, f \quad .$$

(c) D'après la théorie de Hecke, à toute $f(z)$, $f(z) = \sum a_n . e^{2\pi i n z}$, on associe à la série de Dirichlet $D(s) = \sum a_n . n^{-s}$.

Le fait d'être vecteur propre équivaut à l'existence pour D d'un produit d'Euler,

$$\sum a_n . n^{-s} = \prod (1 - \alpha_p\, p^{-s} + p^{1-2s})^{-1} \quad .$$

(d) D'après EICHLER [1] et SHIMURA [6], si l'on désigne par $L(F_N , s)$ la série de F_N , on a, aux facteurs près correspondant aux p divisant N , l'égalité des p-facteurs de la série L et du produit d'Euler D .

Conjecturalement, la fonction $L(s)$ (avec les p-facteurs définis au § 8) est exactement égale au produit d'Euler $D(s)$ associé à la forme différentielle (à une constante près).

(e) Il suffit de vérifier qu'il en est ainsi pour tous les p divisant N . On constate que, dans tous les cas, en choisissant

$$\Omega = \frac{dx}{2y + \lambda x + \mu} = f(z)\, dz \quad ,$$

$D(s)$ étant le produit d'Euler associé à $f(z)$, et $L(s)$ la série de F_N , on a

$$L(s) = -\frac{1}{2\pi i} D(s) \quad . \tag{2}$$

13. Calcul de $L^*(F_N , 1)$.

$$L^*(F_N , 1) = \{M_\infty(F_N) \times \prod c_p\}^{-1} L(F_N , 1) \quad .$$

Si $L(F_N , s) = \sum b_n \times n^{-s}$,

$$L(F_N , 1) = \sum b_n \times n^{-1} = -2\pi i \int_0^{i\infty} g(z)\, dz \quad ,$$

où $g(z)$ correspond à la série L , donc

$$g(z)\, dz = -\frac{1}{2\pi i} f(z)\, dz \quad ,$$

$$L(F_N , 1) = \int_0^{i\infty} f(z)\, dz = \int_0^{i\infty} \Omega \quad .$$

Les points correspondant à (0) et $(i\infty)$ sont rationnels d'ordre fini, et de la sorte

$$\int_0^{i\infty} \Omega = \frac{M_\infty(F_N)}{m} \quad ,$$

où m est un entier.

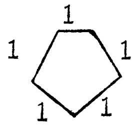
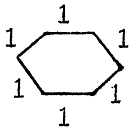
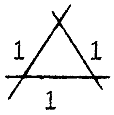
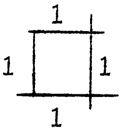
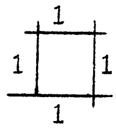
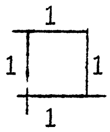
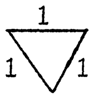
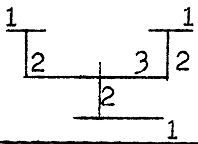
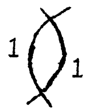
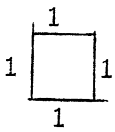
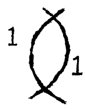
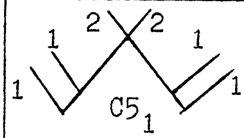
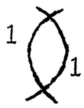
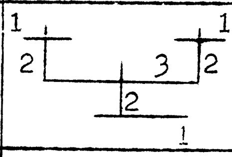
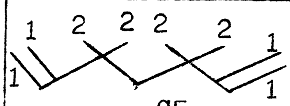
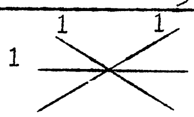
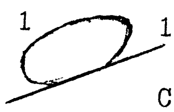
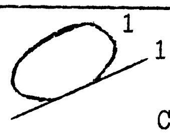
D'où

$$L^*(F_N , 1) = 1/\Big(m \prod_{p|N} c_p\Big) \quad .$$

14. Tableau des résultats obtenus.

Le tableau ci-après donne les résultats obtenus. Pour la courbe F_{11} , le calcul a été fait par SWINNERTON-DYER [9]. Les courbes F_{27} , F_{32} , F_{36} ont déjà été étudiées en tant que courbes admettant une multiplication complexe. Ce sont les seules avec F_{49} qui admettent une multiplication complexe.

Dans les 12 cas, la conjecture est vérifiée avec une valeur conjecturale de $\#(\text{Ш})$ égale à 1 .

N	Δ minimal	j	Module p_1	Module p_2	C_{p_1}	C_{p_2}	$L^*(1)$	η
11	11^5	$-2^{12}.31^3.11^{-5}$	 B5		5		1/25	5
14	$2^6.7^3$	$5^3.43^3.2^{-6}.7^{-3}$	 B6	 B3	2	3	1/36	6
15	$-3^4.5^4$	$13^3.37^3.3^{-4}.5^{-4}$	 B4	 B4	2	4	1/64	8
17	17^4	$-3^3.11^3.17^{-4}$	 B4		4		1/16	4
19	19^3	$-2^{18}.7^3.19^{-3}$	 B3		3		1/9	3
20	$2^8.5^2$	$2^4.11^3.5^{-2}$	 C6	 B2	3	2	1/36	6
21	$-3^4.7^2$	$193^3.3^{-4}.7^{-2}$	 B4	 B2	4	2	1/64	8
24	$2^8.3^2$	$2^4.13^3.3^{-2}$	 $C5_1$	 B2	4	2	1/64	8
27	3^9	0	 C6		3		1/9	3
32	2^{12}	$2^6.3^3$	 $C5_3$		4		1/16	4
36	$2^4.3^3$	0	 C3	 C2	3	2	1/36	6
49	7^3	$-3^3.5^3$	 C2		2		1/4	2

BIBLIOGRAPHIE

[1] EICHLER (M.). - Quaternäre quadratische Formen und die Riemann Vermutung für die Kongruenzzetafunktion, Archiv der Math., t. 5, 1954, p. 355-366.

[2] FRICKE (R.). - Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. 2ter Teil. - Leipzig, B. G. Teubner, 1922.

[3] NÉRON (A.). - Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux. - Paris, Presses universitaires de France, 1964 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 21).

[4] OGG (A. P.). - Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. of Math., t. 89, 1967, p. 1-21.

[5] OGG (A. P.). - Curves of small conductor, J. für die reine und angew. Math. (à paraître).

[6] SHIMURA (G.). - Correspondances modulaires et les fonctions ζ de courbes algébriques, J. Math. Soc. Japan, t. 10, 1958, p. 3-18.

[7] SHIMURA (G.) and TANIYAMA (Y.). - Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory. - Tokyo, Mathematical Society of Japan, 1961 (Publications of the Mathematical Society of Japan, 6).

[8] STEPHENS (N. M.). - The diophantine equation $X^3 + Y^3 = DZ^3$ ... , J. für die reine und angew. Math., t. 231, 1968, p. 121-162.

[9] SWINNERTON-DYER (P.). - The conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and of Tate, Proceedings of a conference on local fields [1966. Driebergen], p. 132-157. - Berlin, Springer-Verlag, 1967.

[10] TATE (J.). - On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, Séminaire Bourbaki, 1965/66, n° 306, 26 p.

(Texte reçu le 9 mars 1970)

Gérard LIGOZAT
6 clos d'Alençon
VILLEBON-sur-Yvette
91 - PALAISEAU