

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

DANIEL BARSKY

## Formes linéaires $p$ -adiques

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 11, n° 1 (1969-1970),  
exp. n° 2, p. 1-8

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1969-1970\\_\\_11\\_1\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_1_A1_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

FORMES LINÉAIRES  $p$ -ADIQUES

par Daniel BARSKY

Le but de cet exposé est d'établir une formule  $p$ -adique analogue à la formule intégrale de Cauchy dans le cas complexe

$$\int_{\text{cercle } c} \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} 2i\pi f(a), & \text{si } a \text{ est intérieur à } c, \\ 0, & \text{si } a \text{ est extérieur à } c. \end{cases}$$

1. Rappels d'analyse  $p$ -adique.

Soient  $p$  un nombre premier,  $\mathbb{Q}_p$  le complété de  $\mathbb{Q}$  pour la valuation  $p$ -adique que l'on notera  $v_p$ ; on note  $|x| = \frac{1}{p^{v_p(x)}}$ . On appelle  $U$  la couronne unité de  $\mathbb{Q}_p$ :  $U = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x| = 1\}$ , et  $C(U, \mathbb{Q}_p)$  l'espace des fonctions continues de  $U$  dans  $\mathbb{Q}_p$ . On sait (cf. [2]) que toute fonction  $f \in C(U, \mathbb{Q}_p)$  peut s'écrire:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right),$$

avec les conditions suivantes:

(i) La suite  $n \rightarrow \alpha^n$  est une suite très bien répartie dans  $U$  au sens de [2], c'est-à-dire que si  $\bar{\alpha}$  désigne l'image de  $\alpha$  dans l'homomorphisme canonique de  $\mathbb{Z}_p$  sur  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , corps résiduel de la valuation,  $\bar{\alpha}$  est un générateur de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ , et  $v_p(\alpha^{p-1} - 1) = 1$ ;

(ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |b_n (1-\alpha)(1-\alpha^2) \dots (1-\alpha^n)| = 0$ ;

(iii)  $\sup_{x \in U} |f(x)| = \max_{n \in \mathbb{N}} |b_n (1-\alpha) \dots (1-\alpha^n)|$ .

Soient  $L$  l'espace des fonctions de  $U$  dans  $\mathbb{Q}_p$ , développables en série de Laurent,  $L^+$  le sous-espace de  $L$  des fonctions ayant les coefficients d'indice  $< 0$  nuls, et  $L^-$  le sous-espace de  $L$  des fonctions ayant les coefficients d'indice  $\geq 0$  nuls. On a les équivalences suivantes (cf. [1]):

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} b_n (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right);$$

$$f(x) \in L^+ \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |b_n| = 0;$$

$f(x) \in L^- \iff \exists \varphi \in C(U, \mathbb{Q}_p)$  telle que,  $\forall n$ , on ait  $\varphi\left(\frac{1}{\alpha^n}\right) = b_n$  ;  
et

$$f(x) \in L \implies \sup_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n| .$$

On munira dorénavant les fonctions de la norme  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n| = \|f\|$  .

## 2. Formes linéaires sur L.

Soit  $f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)$  . Posons

$$\langle \mu_0 | f \rangle = b_0 ,$$

$$\langle \mu_1 | f \rangle = b_0 + b_1 ,$$

$$\vdots$$

$$\langle \mu_n | f \rangle = b_0 + b_1 + \dots + b_n .$$

$$\vdots$$

On note  $n_k = p^k(p-1)$  , c'est le nombre de boules de rayon  $r$  tel que

$$v_p(r) = k + 1$$

contenues dans  $U$  . On pose la définition suivante.

DÉFINITION. -  $f \in C(U, \mathbb{Q}_p)$  est  $\mu$ -intégrable si la suite  $v_k = \langle \mu_{n_k-1} | f \rangle$  admet une limite, lorsque  $k \rightarrow +\infty$  . Soit  $\langle \mu | f \rangle$  cette limite.

PROPOSITION 1. - Toute fonction  $f \in L^+$  est  $\mu$ -intégrable.

On a vu que  $f \in L^+ \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$  , donc la suite  $\langle \mu_n | f \rangle = \sum_{i=0}^n b_i$  est convergente lorsque  $n \rightarrow +\infty$  , car elle satisfait au critère de Cauchy ultramétrique :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$  . A fortiori, la suite  $\langle \mu_{n_k-1} | f \rangle$  est convergente lorsque  $k \rightarrow +\infty$  .

PROPOSITION 2. -  $\langle \mu | 1 \rangle = 1$  et  $\langle \mu | x^n \rangle = 0$  .

Posons  $Q_n(x) = (1-x) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)$  et  $Q_0(x) = 1$  , il vient  $1 = 1 \cdot Q_0(x)$  , donc  $\langle \mu | 1 \rangle = 1$  ,

$$x^n = \sum_{h=0}^n a_h^n Q_h(x) ,$$

et en identifiant le terme constant

$$\sum_{h=0}^n a_h^n = 0 ,$$

donc  $\langle \mu | x^n \rangle = 0$  .

PROPOSITION 3. -  $\frac{1}{x}$  est  $\mu$ -intégrable, et  $\langle \mu | \frac{1}{x} \rangle = 0$  .

On verra, dans la démonstration de la proposition 4, que

$$\frac{1}{x} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\alpha^n} (1-x) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right) ,$$

$$\langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x} \rangle = 1 + \frac{1}{\alpha} + \dots + \frac{1}{\alpha^{n_k-1}} = \frac{1 - (1/\alpha^{n_k})}{1 - (1/\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{n_k-1}} \frac{\alpha^{n_k} - 1}{\alpha - 1} .$$

Montrons que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x} \rangle = 0$  , et, plus précisément, que

$$|\langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x} \rangle| \leq \frac{1}{p^{k+1}} .$$

$$|\langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x} \rangle| = \left| \frac{1}{\alpha^{n_k-1}} \right| \times \frac{1}{|\alpha - 1|} \times |\alpha^{n_k} - 1| ,$$

$$\left| \frac{1}{\alpha^{n_k-1}} \right| \times \frac{1}{|\alpha - 1|} = 1 .$$

Par récurrence, on a :

$$|\alpha^{p-1} - 1| = \frac{1}{p} , \text{ par définition de } \alpha ,$$

$$|\alpha^{p^{k+1}(p-1)} - 1| = |\alpha^{p^k(p-1)} - 1| |1 + \alpha^{n_k} + \alpha^{2n_k} + \dots + \alpha^{(p-1)n_k}| ,$$

$$|\alpha^{p^{k+1}(p-1)} - 1| \leq \frac{1}{p^k} |1 + \alpha^{n_k} + \dots + \alpha^{(p-1)n_k}| ,$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Or  $\alpha^{\overline{in_k}} = (\bar{\alpha})^{in_k} = 1$  , car  $n_k$  est un multiple de  $(p-1)$  , donc

$$\overline{1 + \alpha^{n_k} + \dots + \alpha^{(p-1)n_k}} = p \cdot \bar{1} = 0$$

$$\Rightarrow |1 + \alpha^{n_k} + \dots + \alpha^{(p-1)n_k}| \leq \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow |\alpha^{p^{k+1}(p-1)} - 1| \leq \frac{1}{p^{k+1}} .$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 4. -  $\frac{1}{x^h}$  est  $\mu$ -intégrable, et  $\langle \mu | \frac{1}{x^h} \rangle = 0$  .

$$\frac{1}{x^h} = \sum_{n \geq 0} d_{n,h} (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right) .$$

Les  $d_{n,h}$  vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{n,1} = \frac{1}{\alpha} d_{n-1,1} , \quad n \geq 1 , \\ d_{n,h} = \frac{1}{\alpha^h} d_{n-1,h} + d_{n,h-1} , \quad n \geq 1 , \quad h \geq 2 , \\ d_{0,h} = 1 , \quad \forall h \geq 1 . \end{array} \right.$$

On a la relation suivante :

$$\frac{1}{x^h} - 1 = (1-x) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^h} \right) ,$$

donc

$$\sum_{n \geq 1} d_{n,h} Q_{n-1} \left( \frac{x}{\alpha} \right) = \sum_{i=1}^h \sum_{n \geq 0} d_{n,i} Q_n(x) .$$

Posons

$$\sum_{n \geq 1} d_{n,h} Q_{n-1} \left( \frac{x}{\alpha} \right) = f \left( \frac{x}{\alpha} \right) .$$

$$f \left( \frac{x}{\alpha} \right) = \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x^h} ,$$

$$X = \frac{x}{\alpha} , \quad f(X) = \frac{1}{\alpha X} + \dots + \frac{1}{\alpha^h X^h}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} d_{n,h} Q_{n-1}(X) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n \geq 0} d_{n,1} Q_n(X) + \dots + \frac{1}{\alpha^h} \sum_{n \geq 0} d_{n,h} Q_n(x)$$

$$\Rightarrow d_{n+1,h} = \frac{1}{\alpha} d_{n,1} + \frac{1}{\alpha^2} d_{n,2} + \dots + \frac{1}{\alpha^h} d_{n,h} .$$

Cette relation est équivalente à la relation annoncée. On vérifie aisément (cf. [2]) que l'on a

$$d_{n,h} = \frac{1}{\alpha^n} \frac{((1/\alpha^n) - \alpha)((1/\alpha^n) - \alpha^2) \dots ((1/\alpha^n) - \alpha^{h-1})}{(1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \dots (1 - \alpha^h)},$$

$$d_{n,h} = \frac{1}{\alpha^{nh}} \frac{(1 - \alpha^{n+1})(1 - \alpha^{n+2}) \dots (1 - \alpha^{n+h-1})}{(1 - \alpha) \dots (1 - \alpha^h)}.$$

Montrons maintenant la proposition 4 par récurrence sur  $h$ . Elle est vraie pour  $h = 1$  (proposition 3),

$$\begin{aligned} \langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x^{h+1}} \rangle &= \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{n,h+1} = \frac{1}{\alpha^{h+1}} \sum_{n=1}^{n_k-1} d_{n-1,h+1} + \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{n,h} \\ &= \frac{1}{\alpha^{h+1}} \langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x^{h+1}} \rangle - d_{n_k-1,h+1} + \langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x^h} \rangle, \\ \langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x^{h+1}} \rangle (1 - \frac{1}{\alpha^{h+1}}) &= \langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x^h} \rangle - d_{n_k-1,h+1}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x^h} \rangle = 0 ;$$

montrons que  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{n_k-1,h+1} = 0$ ,

$$d_{n_k-1,h+1} = \frac{1}{\alpha^{(n_k-1)h}} \frac{(1 - \alpha^{n_k})(1 - \alpha^{n_k+1}) \dots (1 - \alpha^{n_k+h-2})}{(1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \dots (1 - \alpha^{h+1})}.$$

D'après la démonstration de la proposition 2, il est clair que  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{n_k-1,h+1} = 0$ .

C. Q. F. D.

PROPOSITION 5. - Les formes linéaires  $\mu_{n_k-1}$  sont de normes  $\leq 1$  sur l'espace  
L muni de la norme  $\sup_{n \geq 0} |b_n| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$ , si on écrit

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} b_n Q_n(x).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|\mu_{n_k-1}\| &= \sup_{f \in L} \frac{|\langle \mu_{n_k-1} | f \rangle|}{\|f\|} \\ &= \sup_{f \in L} \left( \left| \sum_{n=0}^{n_k-1} b_n \right| \right) / \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n| \right) \\ &\leq \sup_{f \in L} \left( \max_{0 \leq n \leq n_k-1} |b_n| \right) / \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n| \right) \leq 1 . \end{aligned}$$

THÉORÈME (BANACH-STEINHAUS [3]). - Soient  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée d'éléments de  $\mathcal{B}(E, F)$  (formes linéaires continues de  $E$  dans  $F$ ), et  $E_0$  une partie dense de  $E$ . Si, quel que soit  $x \in E_0$ ,  $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x_0)$  existe, il existe  $f \in \mathcal{B}(E, F)$  tel que, pour tout  $x \in E$ , on ait  $f(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ .

PROPOSITION 6. - Les fonctions  $f \in L$  sont  $\mu$ -intégrables.

En effet, les  $(x^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sont denses dans  $L$ , et on a vu qu'ils sont  $\mu$ -intégrables. On conclut donc en appliquant le théorème de Banach-Steinhaus.

### 3. Formule de Cauchy.

LEMME.

$$\left\langle \mu \left| \frac{x}{(x-h)^n} \right. \right\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } |h| > 1, \\ 0, & \text{si } |h| < 1 \text{ et } n > 1, \\ 1, & \text{si } |h| < 1 \text{ et } n = 1. \end{cases}$$

Si  $|h| > 1$ ,  $\frac{x}{(x-h)^n} \in xL^+$ , donc  $\left\langle \mu \left| \frac{x}{(x-h)^n} \right. \right\rangle = 0$  ;

Si  $|h| < 1$ ,  $\frac{x}{(x-h)^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} \left(\frac{h}{x}\right)^k$ , donc

$$\left\langle \mu \left| \frac{x}{(x-h)^n} \right. \right\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } |h| < 1 \text{ et } n > 1, \\ 1, & \text{si } |h| < 1 \text{ et } n = 1. \end{cases}$$

PROPOSITION 7. - Soit  $f \in L^+$ , et soit  $h \in \mathbb{Q}_p$  tel que  $|h| \neq 1$ , alors :

$$\left\langle \mu \left| \frac{xf(x)}{(x-h)^{n+1}} \right. \right\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } |h| > 1, \\ \frac{1}{n!} f^{(n)}(h), & \text{si } |h| < 1. \end{cases}$$

Démonstration. - Si  $|h| > 1$ ,  $\frac{f(x)}{(x-h)^{n+1}} \in L^+$ , donc  $\frac{xf(x)}{(x-h)^{n+1}} \in xL^+$ , qui est inclus dans le noyau de  $\mu$ .

Si  $|h| < 1$ ,

$$f(x) = f(h) + (x-h) f'(h) + (x-h)^2 \frac{f^{(2)}(h)}{2!} + \dots \\ + (x-h)^n f^{(n)}(h) + (x-h)^{n+1} \varphi(x),$$

où  $\varphi(x) \in L^+$ ,

$$\langle \mu | \frac{xf(x)}{(x-h)^{n+1}} \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle \mu | \frac{xf^{(i)}(h)}{i!(x-h)^{n+1-i}} \rangle + \langle \mu | \frac{xf^{(n)}(h)}{n!(x-h)} \rangle + \langle \mu | x\varphi(x) \rangle,$$

d'après le lemme,

$$\langle \mu | \frac{xf^{(n)}(h)}{n!(x-h)} \rangle = \frac{1}{n!} f^{(n)}(h) \quad \text{et} \quad \langle \mu | \frac{xf^{(i)}(h)}{i!(x-h)^{n+1-i}} \rangle = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n-1,$$

enfin  $x\varphi(x) \in xL^+$ , donc  $\langle \mu | x\varphi(x) \rangle = 0$ .

4. Définition de  $\langle \mu_a^r | f(x) \rangle$  dans le cas où  $f(x)$  est analytique dans un cercle de rayon  $\geq r$ , de centre  $a$  ( $r \in$  groupe de valuation).

DÉFINITIONS. - On pose

$$\langle \mu_a^1 | f(x) \rangle = \langle \mu_0^1 | g(y) \rangle, \quad \text{où } g(y) = f(x+a).$$

On pose

$$\langle \mu_0^r | f(x) \rangle = \langle \mu_0^1 | f(ry) \rangle \quad \text{et} \quad |y| = 1.$$

On justifie facilement cette définition en remarquant que la suite  $r\alpha^n$  est une suite très bien répartie dans la couronne de rayon  $r$ , et que, dans ces conditions, toute la théorie du paragraphe 2 peut être refaite, et conduit au résultat

$$\langle \mu_0^r | f(x) \rangle = \langle \mu_0^1 | f\left(\frac{x}{r}\right) \rangle.$$

Remarque 1. - Toute la théorie précédente est valable dans un sous-groupe  $G$  de la couronne unité d'un corps local, défini comme suit :

$$G = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots \mid |\alpha| = 1 \text{ et } \alpha^n \neq 1, \forall n\}.$$

En particulier, elle est valable dans une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . Il faut alors

considérer la suite  $\mu_{q^k(q-1)-1}$ , où  $q = p^s$  est le nombre d'éléments du corps résiduel.

Remarque 2. - A partir des formules précédentes, on peut obtenir une formule des résidus par la même méthode que SCHNIRELMAN (cf. [1]).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ADAMS (William W.). - Transcendental numbers in the  $p$ -adic domain, Amer. J. of Math., t. 88, 1966, p. 274-308.
- [2] AMICE (Yvette). - Interpolation  $p$ -adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).
- [3] HILLY (Jacques). - Sur les espaces de Banach ultramétriques. Algèbres de fonctions localement analytiques (Thèses Sc. math. Nancy, 1969).
- [4] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143. 1964. Clermont-Ferrand], p. 91-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.
- [5] MONNA (A. F.). - Sur le théorème de Banach-Steinhaus, Proc. Kon. Ned. Akad. Van Wetensch., t. 66, 1963, p. 121-131.

(Texte reçu le 8 décembre 1969)

Daniel BARSKY  
 Stag. Rech. C. N. R. S.  
 10 avenue Stéphane Mallarmé  
 75 - PARIS 17

---