Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Xavier Stefani

Algébricité des fonctions méromorphes prenant certaines valeurs algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, nº 2 (1968-1969), exp. nº 18, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_2_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 18, 3 p.

19 mai 1962

ALGÉBRICITÉ DES FONCTIONS MÉROMORPHES PRENANT CERTAINES VALEURS ALGÉBRIQUES

par Xavier STEFANI

L'exposé consiste dans la présentation d'un article de G. RAUZY [5]. Nous donnons ici un bref résumé de cet article.

A est un anneau intègre muni d'une valeur absolue notée $|\ |$; on note K le corps des quotients de A , $\hat{K}$ le complété de K pour $|\ |$, et $\bar{\hat{K}}$ la clôture algébrique de $\hat{K}$.

Si k est un corps, on note $k\{X^{-1}\}$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans k du type :

$$f(X) = \sum_{n=-h}^{+\infty} \frac{a_n}{X^n} ,$$

et l'on définit la valuation à l'infini de f :

$$v(f) = \inf\{n \in \underset{\sim}{Z} ;\quad a_n \neq 0\} .$$

Dans les notations précédentes, un élément de $\hat{K}\{X^{-1}\}$ est dit méromorphe à l'infini si $\overline{\lim}|a_n|^{1/n} < +\infty$, autrement dit, si la série $\sum_{n=-h}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n}$ converge au voisinage de l'infini.

On note $\mathfrak{M}$ le sous-corps de $\hat{K}\{X^{-1}\}$, constitué par l'ensemble des éléments méromorphes à l'infini. On montre ([1], p. 44) que $\mathfrak{M}$ est algébriquement clos dans $\hat{K}\{X^{-1}\}$.

Le but de l'article est d'étudier certaines relations entre l'algébricité d'un élément f de $\mathfrak{M}$ et l'algébricité des valeurs prises par f sur les éléments de A . On est pour cela amené à donner une généralisation des nombres de Pisot dans certaines familles d'anneaux.

1. Définition des ensembles $S(A , \gamma)$.

Notons $(\mathcal{H})$ le système d'hypothèses suivant :

1° $|\ |$ est non triviale,
2° $(\alpha \in A$ et $\alpha \neq 0) \implies (|\alpha| \geq 1)$,
3° A est de Fatou (pour l'étude de ces anneaux, voir [3]).

Soit A satisfaisant à $(\mathcal{H})$; γ étant un nombre réel strictement positif, on peut alors donner la définition suivante.

DÉFINITION. - $\theta \in S(A, \gamma)$, si, et seulement si :

1° $\theta \in \hat{K}$;

2° $|\theta| > 1$;

3° Les conjugués de θ par rapport à K ont, dans $\overline{\hat{K}}$, une valeur absolue inférieure ou égale à $|\theta|^{-\gamma}$.

On pose $S(A) = \bigcup_{\gamma>0} S(A, \gamma)$. Les cas particuliers bien connus sont obtenus pour $A = \underset{\sim}{Z}$ [$\underset{\sim}{Z}$ étant muni de la valeur absolue usuelle], et pour $A = K[X]$ [K étant un corps, et A étant muni de la valuation à l'infini] ([2] et [4]).

Propriété caractéristique. - Pour $\theta \in \hat{K}$, $|\theta| > 1$, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

(a) $\theta \in S(A, \gamma)$;

(b) $\exists\, c > 0$, $\forall\, n \in N$, $\inf_{\alpha \in A} |\theta^n - \alpha| < c|\theta|^{-n\gamma}$.

On montre ensuite le résultat important suivant.

THÉORÈME. - $\forall\, \gamma > 0$, les ensembles $S(A, \gamma)$ sont discrets pour la topologie sur $\hat{K}$ associée à $|\ |$.

2. Etude d'anneaux satisfaisant aux hypothèses $(\mathcal{H})$.

On peut montrer (CAHEN, article à paraître) que lorsque A est de Fatou, $A[X]$ est lui-même un anneau de Fatou. L'anneau $A[X]$, muni de la valuation à l'infini (ou plus exactement d'une valeur absolue associée), satisfait alors aux hypothèses $(\mathcal{H})$.

Dans [5], on considère l'ensemble suivant :

$$B(A) = \{P \in K[X] ;\ \forall\, \alpha \in A ,\ P(\alpha) \in A\} .$$

On montre alors que $B(A)$ est un sous-anneau de $K[X]$, et que, muni de la valuation à l'infini, il satisfait aux hypothèses $(\mathcal{H})$. En particulier, B est de Fatou.

3. Dernier résultat.

G. RAUZY donne finalement le résultat suivant.

THÉORÈME. - Si γ est irrationnel, il y a équivalence entre les conditions suivantes :

1° $f \in \mathfrak{M}$, f <u>non constante, et pour</u> $\alpha \in A$ <u>assez grand</u>, $f(\alpha) \in S(A, \gamma)$;
2° $f \in S(B(A), \gamma)$.

En particulier, si f est une fraction rationnelle non constante, et telle que $f(\alpha) \in S(A, \gamma)$ pour $\alpha \in A$ et α assez grand, alors f est un polynôme, et $f \in B(A)$.

La solution de valuation négative de $X^2 - xX + 1 = 0$, dont on obtient facilement le développement en résolvant l'équation du second degré, est un élément de $S(B(\underset{\sim}{Z}), 1)$, ses valeurs sur les entiers sont de toute évidence des éléments de $S(\underset{\sim}{Z}, 1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions, I. - Princeton, Princeton University Press ; New York, New York University Press, 1950/51 (multigr.).

[2] BATEMAN (P. T.) and DUQUETTE (A. L.). - The analogue of the Pisot-Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 594-606.

[3] BENZAGHOU (Benali). - Anneaux de Fatou, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 10e année, 1968/69, n° 9, 8 p.

[4] GRANDET-HUGOT (Marthe). - Nombres de Pisot dans un corps de séries formelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 4, 12 p.

[5] RAUZY (Gérard). - Algébricité des fonctions méromorphes prenant certaines valeurs algébriques, Bull. Soc. math. France, t. 96, 1968, p. 197-208.

(Texte reçu le 20 septembre 1969)

Xavier STEFANI
35 avenue des Peupliers
75 - PARIS 16