Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Yvette Amice

Frontières analytiques dans le disque unité d'un corps valué non archimédien complet et algébriquement clos

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, nº 1 (1968-1969), exp. nº 6, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 6

13 janvier 1969

FRONTIÈRES ANALYTIQUES DANS LE DISQUE UNITÉ D'UN CORPS VALUÉ NON ARCHIMÉDIEN COMPLET ET ALGÉBRIQUEMENT CLOS

par Yvette AMICE

Le problème suivant m'a été posé par B. de MATHAN : Soit K le complété de la clôture algébrique de Q_p ,

$$\Gamma = \{x \in K \mid \exists\, n \in \underset{\sim}{N} ,\ x^{p^n} = 1\} \qquad \text{et} \qquad \Gamma^* = \Gamma - \{1\} .$$

La fonction $\frac{1}{1 - x}$ est-elle limite uniforme de polynômes sur Γ^* ? La réponse est non, comme nous le verrons à la fin du § 1, car aucune fonction strictement analytique sur la boule unité de K ne coïncide avec $\frac{1}{1 - x}$ sur Γ^* . En tentant de caractériser les fonctions définies sur Γ^* , et qui y sont limite uniforme de polynômes, la notion de frontière analytique s'introduit naturellement.

1. Notations. Cas du disque unité.

Soient K un corps valué complet non archimédien et algébriquement clos, et A son anneau de valuation (disque unité fermé). Nous noterons $|K|$ l'ensemble des $|x|$ où $x \in K$.

Soient B une partie de K , et f une fonction continue sur B et à valeurs dans K , nous noterons

$$\|f\|_B = \sup_{x \in B} |f(x)| \quad ,$$

la norme de f pour la convergence uniforme sur B (éventuellement $\|f\|_B = + \infty$).

DÉFINITION. - Soit B une partie de A ; nous dirons que B est une frontière analytique dans A , où y est analytiquement dense, si toute fonction à valeurs dans K , définie sur B et qui y est limite uniforme d'une suite de polynômes, est prolongeable de façon unique en une fonction strictement analytique sur A .

A propos du problème initialement posé, nous allons montrer que Γ^* , ou plus généralement toute partie infinie de Γ , est une frontière analytique dans A , d'où il résulte évidemment que $\frac{1}{1 - x}$ n'est limite uniforme de polynômes sur aucune partie infinie de Γ .

PROPOSITION 1. - Pour que B soit une frontière analytique dans A, il faut et il suffit que l'une des propriétés équivalentes suivantes soit satisfaite :

(i) Le diamètre transfini $\tau(B)$ est égal à 1 ;

(ii) Pour tout $r < 1$, tout recouvrement de B par des disques fermés de rayon r est infini ;

(iii) Pour tout polynôme $P \in K[X]$, $\|P\|_A = \|P\|_B$.

Soit E l'espace de Banach des fonctions strictement analytiques sur A, muni de la norme de la convergence uniforme sur A. On sait que E s'identifie à $K\{X\}$, espace des séries restreintes à coefficients dans K, muni de la norme " sup des coefficients", et que l'espace E_0 des fonctions polynômes y est dense. Soient $E_{0,A}$ et $E_{0,B}$ l'espace des fonctions polynômes muni de la norme de la convergence uniforme sur A et sur B respectivement, et soient $E_A = E$ et E_B leurs complétés.

La restriction à B définit une bijection φ de E_A dans E_B si, et seulement si, B est infinie. Dire que B est frontière analytique équivaut à dire que φ est bijective et bicontinue. Donc, d'après le théorème de Banach, il existe M tel que,

$$\forall\ f \in E_A\ , \qquad \|f\|_B \leqslant \|f\|_A \leqslant M\|f\|_B\ .$$

LEMME. - Soient E et F deux algèbres de Banach sur K, et soit φ un homomorphisme d'algèbres injectif et continu de E dans F tel que $\|\varphi(x)\|_F \geqslant \|x\|_E$. Si la norme de F est multiplicative, φ est une isométrie.

En effet, φ étant continu, il existe M tel que,

$$\forall\ x \in E\ , \qquad \|\varphi(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E\ .$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|\varphi(x^n)\|_F = \|\varphi(x)\|_F^n \leqslant M\|x^n\|_E \leqslant M\|x\|_E^n\ ,$$

d'où

$$\|\varphi(x)\|_F \leqslant \|x\|_E\ .$$

La norme de E_A est multiplicative : la condition (iii) équivaut donc à la "densité analytique".

Rappelons que le diamètre transfini d'une partie B de K est défini de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\tau_n(B) = \sup_{x_1,\dots,x_n \in B} \Big(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_i - x_j| \Big)^{2/n(n-1)} ,$$

on montre que la suite τ_n est non décroissante, le diamètre transfini de B est $\tau(B) = \lim \tau_n(B)$ (cf. par exemple [1] ou [3]).

Soient B satisfaisant à (iii), et $r < 1$: choisissons $b_1 \in B$, il existe $b_2 \in B$ tel que, si $Q_1(X) = X - b_1$, on ait

$$|Q_1(b_2)| > r .$$

On peut ainsi construire par récurrence une suite $b_1 , \dots , b_n , \dots , b_n \in B$, telle que, si $Q_n(X) = (X - b_1) \dots (X - b_n)$, on ait

$$|Q_n(b_{n+1})| > r .$$

Alors

$$(\tau_n(B))^{n(n-1)/2} \geqslant \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |b_i - b_j| = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |Q_i(b_{i+1})| > r^{n-1} ,$$

donc $\tau_n(B) > r^{2/n}$, d'où $\tau(B) = 1$.

Soit B une partie de A contenue dans une réunion de q disques fermés situés à des distances mutuelles majorées par d et de rayon r ; un calcul classique montre qu'alors

$$\tau(B) \leqslant d^{1-1/q} \, r^{1/q} ,$$

donc si $\tau(B) = 1$, la condition (ii) est satisfaite.

Supposons enfin que B satisfasse à (ii) ; pour montrer que (iii) est vraie, il suffit de montrer que si P est un polynôme unitaire à coefficients entiers, $P \in A[X]$; $\|P\|_B = 1$. En effet s'il en est ainsi, soit $P \in K[X]$, on peut représenter P sous la forme

$$P = p_0 P_0 + p_1 P_1 + \dots + p_k P_k ,$$

où $P_i \in A[X]$, P_i unitaire et $p_i \in K$ avec $|p_0| = \|P\|_A > |p_1| > \dots > |p_n|$. Alors

$$\|P\|_B = |p_0| \, \|P_0\|_B = |p_0| = \|P\|_A .$$

Soit donc $Q \in A[X]$, Q unitaire : $Q(X) = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$ où $\alpha_i \in A$. Quel que soit $r < 1$, d'après la condition (ii), il existe $b \in B$ et tel que $|b - \alpha_i| > r$, $i = 1 , \dots , n$, donc $|Q(b)| > r^n$, d'où $\sup_{b \in B} |Q(b)| = 1$, ce qui achève la démonstration.

Exemple : Toute famille infinie de racines de l'unité a un diamètre transfini égal à 1 : c'est donc une frontière analytique.

2. Généralisation à d'autres quasi-connexes fermés.

Soient D un quasi-connexe de K, et B une partie de D ; nous dirons encore que B est analytiquement dense dans D, si toute fonction définie sur B et à valeurs dans K, qui y est fractions rationnelles sans pôles dans D, est prolongeable, de façon unique en une fonction analytique sur D. On déduit immédiatement de la proposition ci-dessus les corollaires suivants.

COROLLAIRE 1. - *Soit D un disque fermé de rayon r ; une partie B de D y est analytiquement dense si, et seulement si,* $\tau(B) = r$.

COROLLAIRE 2. - *Soit* $D = \{x \in K \mid |x - a| \geq r\}$; *une partie B de D y est analytiquement dense si, et seulement si,* $\tau(\frac{1}{B - a}) = \frac{1}{r}$ (*où* $\frac{1}{B - a}$ *désigne l'image de B dans l'inversion* $x \to \frac{1}{x - a}$).

Plus généralement, si l'espace $H(D)$ des fonctions strictement analytiques sur D se décompose en somme directe d'espaces $H(D_i)$, où D_i est un disque fermé ou le complémentaire d'un disque ouvert, nous pouvons encore caractériser les ensembles analytiquement denses.

Condition de Gruson. - Nous dirons qu'un fermé D de K est un *ensemble de Gruson*, s'il satisfait aux conditions suivantes :

(i) D est borné, soit D_0 le plus petit disque fermé contenant D ;

(ii) D contient au moins deux points ;

(iii) Pour toute boule fermée b de rayon $r \in |K|$, contenue dans D_0, l'ensemble des boules ouvertes de rayon r contenues dans b et rencontrant D est infini.

D étant fermé, son complémentaire dans D_0 est réunion disjointe d'une famille de boules ouvertes $(b_i)_{i\in I}$. Soit $D_i = \complement b_i$, on a $D = D_0 \cap (\bigcap_{i\in I} D_i)$.

Soit D un fermé de Gruson, et soit $H(D)$ l'espace des fonctions analytiques sur D, c'est-à-dire le complété de l'algèbre des fractions rationnelles sans pôles dans D pour la filtration de la convergence uniforme sur D. L. GRUSON a montré ([2]) la proposition ci-après.

PROPOSITION (GRUSON). - *Si D est un fermé de Gruson, l'espace de Banach* $H(D)$ *s'identifie par les restrictions à la somme directe de* $H(D_0)$ *et des* $H_0(D_i)$

$(i \in I)$, où $H(D_0)$ est l'espace des fonctions strictement analytiques sur D_0 , et $H_0(D_i)$ l'espace des fonctions strictement analytiques sur D_i et nulles à l'infini.

De ce résultat, et de la proposition 1, on déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. - Soit D un fermé de Gruson, $D = D_0 \cap (\bigcap_{i \in I} D_i)$ où D_0 est un disque fermé de rayon r et $D_i = \{x \in K \mid |x - \alpha_i| \geqslant r_i\}$. Pour qu'une partie B de D y soit analytiquement dense, il faut et il suffit que $\tau(B) = r$ et $\tau(\frac{1}{B - \alpha_i}) = \frac{1}{r_i}$, $i \in I$.

Exemples :

1° Soit D la couronne fermée $r_1 \leqslant |x| \leqslant r$; la condition de densité analytique s'écrit alors $\tau(B) = r$ et $\tau(\frac{1}{B}) = \frac{1}{r_1}$.

2° Soit D le complémentaire dans A d'une famille de disques ouverts D_i , dont les rayons r_i tendent vers zéro : c'est un fermé de Gruson, et on peut appliquer le corollaire 3.

3. Problèmes.

1° Quel sens raisonnable faut-il donner à la notion de frontière analytique dans un disque ouvert ?

2° Comment généraliser la proposition 1 au cas de plusieurs variables ? Plus précisément, si $K\{X_1 , \dots , X_n\}$ est l'espace des séries restreintes en n variables, qui définit les fonctions analytiques sur le polydisque unité

$$A^n = \{X \mid |X_i| \leqslant 1 , \quad i = 1 , \dots , n\} ,$$

$K[X_1 , \dots , X_n]$ y est dense.

Il est alors naturel de dire qu'une partie B de A^n est une frontière analytique si toute limite uniforme sur B de polynômes est prolongeable de façon unique en une fonction analytique sur A^n . On voit que, grâce au lemme 1, ceci équivaut encore à la condition (iii) de la proposition 1 :

$$\|P\|_{A^n} = \|P\|_B , \qquad \forall\ P \in K[X_1 , \dots , X_n] .$$

Pour cela il est nécessaire que, pour toute forme linéaire $\varphi \in (K^n)'$, de norme 1 , on ait $\tau(\varphi(B)) = 1$ (sinon on peut construire des polynômes de la forme $Q_k = \prod_{i=1}^{k} \varphi(X - a_i)$ tels que $\|Q_k\|_{A^n} = 1$ et $\|Q_k\|_B \to 0$), mais cette condition n'est pas suffisante. Soit, par exemple, pour $n = 2$,

$$B = \{(X_1 , X_2) , \quad X_1 = 0 \quad \text{ou} \quad X_2 = 0\} \quad .$$

Soit φ une forme linéaire $\varphi(X) = a_1 X_1 + a_2 X_2$, de norme $1 = \sup(|a_1| , |a_2|)$; alors $\varphi(B) = a_1 A \cup a_2 A = A$, or il est clair que

$$\|X_1 X_2\|_B = 0 < \|X_1 X_2\|_{A^2} = 1 \ldots \quad .$$

On peut aussi montrer qu'une condition suffisante pour que B soit analytiquement dense est qu'il existe une famille dense d'hyperplans H_i tels que, pour tout i , $\tau(B \cap H_i) = 1$, mais il ne me semble pas, a priori, que cette condition soit nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS (Françoise). - Diamètre transfini dans un corps valué. Application au prolongement analytique, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 5e année, 1963/64, n° 3, 13 p.

[2] GRUSON (L.). - Algèbres de Banach ultramétriques, Journées Poitou-Aquitaine [1966. Poitiers] (à paraître).

[3] HILLE (Einar). - Analytic function theory. Volume II. - Boston, Ginn and Company, 1962 (Introductions to higher Mathematics).

(Texte remis le 1[illegible] février 1969)

Mme Yvette AMICE
Prof. Fac. Sc. Poitiers
Route de Chauvigny
86 - POITIERS