

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

HUBERT DELANGE

## Sur les fonctions additives à valeurs entières

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 10, n° 1 (1968-1969),  
exp. n° 5, p. 1-3

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1968-1969\\_\\_10\\_1\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A4_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LES FONCTIONS ADDITIVES À VALEURS ENTIÈRES

par Hubert DELANGE

Un article sur ce sujet doit paraître prochainement dans le "Journal of Number Theory".

Aussi, nous donnons seulement ici un résumé de notre exposé.

I

Soit  $f$  une fonction arithmétique à valeurs entières, autrement dit, une application de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{Z}$ .

Etant donné un entier  $q > 1$ , nous dirons que  $f$  possède une loi de distribution asymptotique modulo  $q$  si, pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ , l'ensemble des  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour lesquels

$$f(n) \equiv r \pmod{q},$$

possède une densité.

Nous dirons que  $f$  est uniformément distribuée modulo  $q$  (u. d. mod  $q$ ) si, pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ , l'ensemble considéré ci-dessus possède une densité égale à  $\frac{1}{q}$ .

Des résultats récents de WIRSING concernant les fonctions multiplicatives permettent de traiter le cas où  $f$  est additive, c'est-à-dire  $f(mn) = f(m) + f(n)$  quand  $(m, n) = 1$ .

1° Toute fonction additive à valeurs entières possède une loi de distribution asymptotique modulo  $q$  pour tout  $q > 1$ .

2° Soit  $f$  une fonction additive à valeurs entières, et soit  $q$  un entier  $> 1$ .

(a) Si  $q$  est impair, une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit u. d. mod  $q$  est que :

Pour tout diviseur premier  $d$  de  $q$ ,  $\sum_{d|f(p)} \frac{1}{p} = +\infty$  (la lettre  $p$  désignant, comme il est d'usage, un nombre premier).

(b) Si  $q$  est pair, pour que  $f$  soit u. d. mod  $q$ , il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

(1) Pour tout diviseur premier  $d$  de  $q$ ,  $\sum_{d|f(p)} \frac{1}{p} = +\infty$ .

(2) Pour tout diviseur premier  $d > 2$  de  $q$ , et aussi pour  $d = 4$  si  $4/q$ ,  
 $\sum_{d|f(p)} \frac{1}{p} = +\infty$ .

En outre, pour tout  $r \in \underline{\mathbb{N}}^*$ ,  $f(2^r)$  est un nombre impair.

3° On déduit immédiatement de ce qui précède une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit u. d. mod  $q$  pour tout  $q > 1$ .

## II

1°  $E$  étant une partie infinie de  $\underline{\mathbb{N}}^*$ , et  $f$  étant encore une fonction arithmétique à valeurs entières, on peut définir les propositions suivantes :

"  $f$  possède une loi de distribution asymptotique modulo  $q$ ,  
 quand  $n$  parcourt  $E$  " ,

et

"  $f$  est uniformément distribuée modulo  $q$ , quand  $n$  parcourt  $E$  " .

Pour cela, on considère la densité relative par rapport à  $E$  de l'ensemble des  $n \in E$  tels que

$$f(n) \equiv r \pmod{q} .$$

Le problème se traite très bien si,  $f$  étant encore additive,  $E$  est un ensemble multiplicatif (c'est-à-dire dont la fonction caractéristique est multiplicative) de densité  $> 0$ . (Rappelons qu'un ensemble multiplicatif possède toujours une densité et que celle-ci est  $> 0$  si, et seulement si,  $\sum_{p \in E} \frac{1}{p} < +\infty$ .)

Il y a toujours une loi de distribution asymptotique modulo  $q$ .

Si  $E$  contient toutes les puissances de 2, les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $f$  soit u. d. mod  $q$  sont exactement les mêmes que plus haut.

Si  $E$  ne contient pas toutes les puissances de 2, on a pour tous les  $q > 1$  la même condition que plus haut pour  $q$  impair.

2° Au lieu d'une seule fonction arithmétique à valeurs entières et un seul entier  $q > 1$ , on peut considérer par exemple un couple  $[f, g]$  de telles fonctions et un couple  $[q, q']$  d'entiers  $> 1$ .

On dira que le couple  $[f, g]$  possède une loi de distribution asymptotique modulo  $[q, q']$  si, quels que soient  $r$  et  $r' \in \underline{\mathbb{Z}}$ , l'ensemble des  $n \in \underline{\mathbb{N}}^*$ , pour lesquels

$$f(n) \equiv r \pmod{q} \quad \text{et} \quad g(n) \equiv r' \pmod{q'} ,$$

possède une densité.

On dira que le couple  $[f, g]$  est uniformément distribué modulo  $[q, q']$  si, quels que soient  $r$  et  $r' \in \underline{\mathbb{Z}}$ , cet ensemble possède une densité égale à  $\frac{1}{qq'}$ .

(a) Si  $f$  et  $g$  sont additives, il y a toujours une loi de distribution asymptotique modulo  $[q, q']$ .

(b) Il est clair que, pour que le couple  $[f, g]$  soit u. d. mod  $[q, q']$ , il est nécessaire que  $f$  soit u. d. mod  $q$  et  $g$  soit u. d. mod  $q'$ .

Si  $f$  et  $g$  sont additives, cette condition est suffisante lorsque  $(q, q') = 1$ , mais pas lorsque  $(q, q') > 1$ .

Pour le cas où  $f$  et  $g$  sont additives et  $(q, q') = \delta > 1$ , on a le résultat suivant :

Pour que  $[f, g]$  soit u. d. mod  $[q, q']$ , il faut et il suffit que :

- ( $\alpha$ )  $f$  soit u. d. mod  $q$ , et  $g$  soit u. d. mod  $q'$ ,  
 ( $\beta$ ) en outre, pour tout couple d'entiers  $\lambda$  et  $\mu$  satisfaisant à  $0 < \lambda < \delta$ ,  $0 < \mu < \delta$ , et  $(\lambda, \mu) = 1$ ,  $\lambda f + \mu g$  soit u. d. mod  $\delta$ .
-