

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

EVE HELSMOORTEL

**Module de continuité des polynômes d'interpolation. Application
à l'étude du comportement local des fonctions continues sur
un compact régulier d'un corps local**

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 1 (1968-1969),
exp. n° 10, p. 1-12

[<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A10_0>](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A10_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODULE DE CONTINUITÉ DES POLYNÔMES D'INTERPOLATION
APPLICATION À L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT LOCAL DES FONCTIONS CONTINUES
SUR UN COMPACT RÉGULIER D'UN CORPS LOCAL

par Eve HELSMOORTELT

Sur un compact régulier M ([1]) contenu dans la boule unité A d'un corps local K où π est une uniformisante, on définit les polynômes d'interpolation Q_n relatifs à une suite u très bien répartie (TBR) dans M et bien ordonnée, et, pour tout entier naturel n , on évalue la quantité

$$\omega_{Q_n}(k) = \inf_{v(x-y)=kv(\pi)} v(Q_n(x) - Q_n(y)) .$$

Puis, à toute fonction continue f de M dans A , on associe sa série d'interpolation sur la base normale (Q_n) de $C(M, A)$:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x) ,$$

et on déduit de l'ordre de croissance des $v(a_n)$ une condition de Lipschitz d'un certain ordre pour f .

1. Notations.

K est un corps local, π une uniformisante, A l'anneau de la valuation, et M un compact régulier contenu dans A (cf. [1]),

$$M = \varprojlim M_k , \quad \text{où } M_k = M/\pi^k M .$$

On note p_k la projection canonique de M sur M_k , et $N_k = q_1 q_2 \dots q_k = \text{Card} M_k$. La suite des entiers q_i étant ainsi définie, tout entier naturel n s'exprime de manière unique sous la forme

$$(1.1) \quad n = n_0 + n_1 N_1 + \dots + n_{h-1} N_{h-1} , \quad 0 \leq n_i < q_{i+1} \quad \text{et} \quad n_{h-1} \neq 0 ;$$

les n_i seront appelés : chiffres de n .

A partir de la suite $\tilde{q} = (q_i)$, on construit l'ensemble $\underline{Z}_{\tilde{q}} = \varprojlim \underline{Z}/N_k \underline{Z}$ sur lequel est définie la valuation $v_{\tilde{q}}$: pour un élément z de $\underline{Z}_{\tilde{q}}$,

$$z = z_0 + z_1 N_1 + \dots + z_k N_k + \dots ,$$

on a

$v_q(z) = m$, lorsque $z_i = 0$ pour $i = 0, \dots, m-1$ et $z_m \neq 0$.

Soit une suite u TBR dans M , $\{u_0, u_1, \dots, u_{N_k-1}\}$ est un système de représentants de M_k .

Pour tout entier naturel k et pour tout élément x de M , il existe un entier $r(k)$ et un seul, tel que

$$(1.2) \quad 0 \leq r(k) < N_k \quad \text{et} \quad p_k(x) = p_k(u_{r(k)}) .$$

L'entier n étant fixé, pour tout élément x de M on définit les entiers naturels N' et ρ par

$$(1.3) \quad N' = \sup_{0 \leq i \leq n-1} \frac{v(x - u_i)}{v(\pi)}$$

et

$$\rho = \inf\{j ; v(x - u_j) = N' \cdot v(\pi)\} .$$

Si $N' \geq h$, $\rho = r(h)$ et $v(x - u_\rho) = N'v(\pi)$, $v(x - u_i) \leq (h-1)v(\pi)$ si $i \neq \rho$.

Si $N' = h-1$, $\rho = r(h-1)$ et $v(x - u_\rho) = (h-1)v(\pi)$, et il peut exister d'autres indices j tels que $v(x - u_j) = (h-1)v(\pi)$.

Suite très bien répartie bien ordonnée. - On dira qu'une suite u , très bien répartie dans M , est bien ordonnée (TBR BO), lorsque

$$v(u_i - u_j) = v_q(i - j) \cdot v(\pi) .$$

Si $r(k)$ et $r(k-1)$ sont associés au même élément x de M et à une suite TBR BO par la définition (1.2), alors :

$$v(u_{r(k)} - u_{r(k-1)}) \geq (k-1) \cdot v(\pi) ,$$

donc

$$v_q(r(k) - r(k-1)) \geq k-1 ,$$

c'est-à-dire que

$$r(k) = r(k-1) + x_{k-1} N_{k-1} , \quad \text{avec} \quad 0 \leq x_{k-1} < q_k .$$

On peut ainsi associer à tout élément x de M la suite des entiers x_i telle que

$$r(k) = x_0 + x_1 N_1 + \dots + x_{k-1} N_{k-1} ,$$

et faire correspondre à x l'élément $S(x)$ de $\mathbb{Z}_q$:

$$(1.4) \quad S(x) = x_0 + x_1 N_1 + \dots + x_{k-1} N_{k-1} + \dots$$

On définit de cette manière une application S de M sur $\mathbb{Z}_q$, qui est liée à la suite u TBR BO ; on a

$$S(u_m) = m, \quad \text{pour tout entier naturel } m,$$

et d'autre part,

$$(1.5) \quad v(x - y) = v(\pi) \cdot v_q(S(x) - S(y))$$

S est une homométrie de M sur $\mathbb{Z}_q$.

Les chiffres x_i de $S(x)$ dans $\mathbb{Z}_q$ seront, par analogie, appelés : chiffres de x .

2. Préliminaires.

(a) Problème. - Etant donnés deux entiers k et n , et une suite u TBR BO dans M , on cherche à évaluer la quantité :

$$\omega_{Q_n}(k) = \inf_{v(x-y)=kv(\pi)} v(Q_n(x) - Q_n(y)), \quad \text{pour } x \text{ et } y \text{ dans } M.$$

$$Q_n(x) = \frac{(x - u_0)(x - u_1) \dots (x - u_{n-1})}{(u_n - u_0)(u_n - u_1) \dots (u_n - u_{n-1})}.$$

Si deux éléments x et y de M sont tels que $v(x - y) = kv(\pi)$, on leur associe par (1.2) le même entier $r(k) = r$, et on obtient les inégalités :

$$(2.1) \quad \inf_{\substack{v(x-u_r) \geq kv(\pi) \\ 0 \leq r < N_k}} v(Q_n(x) - Q_n(u_r)) \leq \inf_{v(x-y)=kv(\pi)} v(Q_n(x) - Q_n(y)) \\ \leq \inf_{\substack{v(x-u_r)=kv(\pi) \\ 0 \leq r < N_k}} v(Q_n(x) - Q_n(u_r)).$$

(b) Calcul de $v(Q_n(x))$.

$$\begin{aligned} v(Q_n(x)) &= v(x - u_\rho) + \sum_{i=0}^{\rho-1} v(x - u_i) + \sum_{i=\rho+1}^{n-1} v(x - u_i) - \sum_{i=0}^{n-1} v(u_n - u_i) \\ &= v(x - u_\rho) + \sum_{i=0}^{\rho-1} v(u_\rho - u_i) - \sum_{i=0}^{n-1} v(u_n - u_i) + \sum_{i=\rho+1}^{n-1} v(u_\rho - u_i) \\ &= v(x - u_\rho) + v(\pi) \sum_{m \geq 1} \left[\frac{\rho}{N_m} \right] - v(\pi) \sum_{m \geq 1} \left[\frac{n}{N_m} \right] + \sum_{i=\rho+1}^{n-1} v(u_\rho - u_i), \end{aligned}$$

car la suite u est TBR, et comme elle est de plus bien ordonnée :

$$(2.2) \quad v(Q_n(x)) = v(x - u_\rho) + v(n) \sum_{m \geq 1} \left(\left[\frac{0}{N_m} \right] + \left[\frac{n - \rho - 1}{N_m} \right] - \left[\frac{n}{N_m} \right] \right) .$$

(c) LEMME. - Etant donnés deux entiers n et s tels que $N_{h-1} \leq n < N_h$ et $0 \leq s < n$,

$$(2.3) \quad \sum_{m \geq 1} \left(\left[\frac{s}{N_m} \right] + \left[\frac{n - s - 1}{N_m} \right] - \left[\frac{n}{N_m} \right] \right) \geq 1 - h ,$$

et l'égalité est réalisée si, et seulement si, s obéit à la définition :

s est "bon pour n " lorsque les chiffres s_i de s dans Z_q vérifient les inégalités suivantes :

$$s_{h-1} < n_{h-1} \quad \text{et,} \quad \text{si } h \neq 1, \quad s_i \geq n_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq h-2 .$$

Pour démontrer ce lemme, on étudie la soustraction : $(n-1) - s$, dans le système de numération lié à la suite q_i , dans lequel n s'exprime selon (1.1) ; si on note b_i les chiffres de $n-1-s$, on obtient les relations :

$$s_m + b_m = n_m - e_m + e_{m+1} q_{m+1} , \quad \text{pour } 0 \leq m \leq h-2 ,$$

$$\text{avec } \begin{cases} e_{m+1} = \begin{cases} 0 , & \text{si } e_m + s_m \leq n_m , \\ 1 , & \text{si } e_m + s_m > n_m , \end{cases} \\ e_0 = 1 , \end{cases}$$

et

$$s_{h-1} + b_{h-1} = n_{h-1} - e_{h-1} .$$

Avec ces notations,

$$\left[\frac{s}{N_m} \right] + \left[\frac{n - s - 1}{N_m} \right] - \left[\frac{n}{N_m} \right] = - e_m ,$$

et par conséquent,

$$\sum_{m \geq 1} \left[\frac{s}{N_m} \right] + \left[\frac{n - s - 1}{N_m} \right] - \left[\frac{n}{N_m} \right] = - \sum_{m=1}^{h-1} e_m \geq 1 - h .$$

L'égalité est donc réalisée si, et seulement si,

$$e_m = 1 , \quad \text{pour } m = 1, 2, \dots, h-1 ,$$

c'est-à-dire si s est "bon pour n ".

3. Etude de $v(Q_n(x) - Q_n(u_r))$ et de $v(Q_n(x) - Q_n(y))$,

$$\begin{cases} \text{pour une suite } u \text{ TBR BO ,} \\ \text{pour } n < N_k , \quad v(x - y) = kv(\pi) , \quad r = r(k) \text{ commun à } x \text{ et } y . \end{cases}$$

(a) Si $r < n$, u_r est racine de Q_n , et r est aussi la valeur ρ commune à x et y ; la relation (2.2) et le lemme impliquent que

$$(3.1) \quad v(Q_n(x) - Q_n(u_r)) \geq (k + 1 - h) v(\pi) ;$$

l'égalité est réalisée si, et seulement si,

$$v(x - u_r) = kv(\pi) \quad \text{et} \quad r \text{ "bon pour } n \text{ " .}$$

(b) Si $r \geq n$, à x et u_r correspondent les mêmes entiers N' et ρ ; d'après (2.2),

$$v(Q_n(u_r)) = v(x - u_\rho) + v(\pi) \sum_{m \geq 1} ([\frac{\rho}{N_m}] + [\frac{n - \rho - 1}{N_m}] - [\frac{n}{N_m}]) ;$$

d'autre part,

$$\frac{Q_n(x)}{Q_n(u_r)} - 1 = \pi^k \cdot \alpha \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{u_r - u_i} + \dots + \pi^{mk} \alpha^m \sum_m + \dots + \pi^{nk} \alpha^n \sum_n ,$$

avec $x = u_r + \pi^k \cdot \alpha$, $v(\alpha) \geq 0$, et

$$\sum_m = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n-1} \frac{1}{(u_r - u_{i_1}) \dots (u_r - u_{i_m})} ;$$

on en déduit alors que

$$v\left(\frac{Q_n(x)}{Q_n(u_r)} - 1\right) \geq v(\alpha) + (k - N') v(\pi) .$$

L'égalité est réalisée si, et seulement si,

$$v\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{u_r - u_i}\right) = -N' v(\pi) ;$$

ceci se produit en particulier si ρ est le seul $j < n$, tel que

$$v(x - u_j) = N' v(\pi) ,$$

et il en est certainement ainsi si $N' \geq h$. On obtient ainsi le résultat suivant :

$$(3.2) \quad v(Q_n(x) - Q_n(u_r)) \geq (k + 1 - h) v(\pi) ;$$

l'égalité est réalisée si, et seulement si,

$$v(x - u_r) = kv(\pi) , \quad \rho \text{ "bon pour } n \text{ " , } \quad \text{et} \quad v\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{u_r - u_i}\right) = -N' v(\pi) .$$

En raison de la double inégalité (2.1), on peut conclure, d'après (3.1) et (3.2), que

$$(3.3) \quad \omega_{Q_n}(k) = (k + 1 - h) v(\pi) \quad \text{pour } N_{h-1} \leq n < N_h \leq N_k .$$

On démontre ainsi, à partir de (3.1) et (3.2), que

$$(3.4) \quad \text{Si } v(x - y) = kv(\pi) \text{ et si } 1 \leq n < N_k , \\ v(Q_n(x) - Q_n(y)) = (k + 1 - h) v(\pi)$$

est équivalent à :

$$(\alpha) \quad x_0 \geq n_0 , \dots , x_{h-2} \geq n_{h-2} , \quad \text{pour } h \neq 1 ,$$

$$(\beta) \quad x_{h-1} < n_{h-1} ,$$

ou bien

$$x_{h-1} \geq n_{h-1} \quad \text{et} \quad v\left(\sum_{0 \leq d < n_{h-1}} \frac{1}{u_{r(h)} - u_{r(h-1)+dN_{h-1}}}\right) = (1 - h) v(\pi) ;$$

et on en déduit le corollaire suivant :

(3.5) COROLLAIRE. - Pour tout couple d'éléments x, y de M tels que

$$v(x - y) \geq (h - 1) v(\pi) ,$$

on a

$$v(Q_{N_{h-1}}(x) - Q_{N_{h-1}}(y)) = v(x - y) + (1 - h) v(\pi) .$$

Dans le cas $v(x - y) = h - 1$, si $y_{h-1} \neq 0$, on évalue $v\left(\frac{Q_{N_{h-1}}(x)}{Q_{N_{h-1}}(y)} - 1\right)$.

4. Etude de $v(Q_n(x) - Q_n(y))$ pour $n \geq N_k$.

D'après (2.2) et le lemme,

$$v(Q_n(x)) \geq (N' + 1 - h) v(\pi) \geq 0 ,$$

et on ne peut avoir $v(Q_n(x)) = 0$ que si $N' = h - 1$ et ρ "bon pour n "; cette remarque entraîne que

(4.1) Les éléments x de M , tels que $v(Q_n(x)) = 0$, sont caractérisés par les inégalités

$$x_i \geq n_i, \quad \text{pour } 0 \leq i \leq h-1,$$

et que

$$(4.2) \quad \omega_{Q_n}(k) = 0, \quad \text{pour } n \geq N_k.$$

Enfin, si pour un nombre réel λ on note $(\lambda)^+ = \sup(\lambda, 0)$, on peut conclure par le théorème suivant.

(4.3) THÉOREME. - Pour tout entier naturel n , et pour toute suite u TBR B0,

$$\omega_{Q_n}(k) = (k + 1 - h)^+ v(\pi).$$

5. Cas particulier : $M = \underline{\mathbb{Z}}_p$ et $u_m = m$.

$M = \underline{\mathbb{Z}}_p = \lim_{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^k \mathbb{Z}$, l'application S , définie par (1.4) et relative ici à la suite des entiers naturels, est l'application identique ; on suppose la valuation de $\underline{\mathbb{Q}}_p$ normalisée de telle sorte que $v(p) = 1$ et $|p| = \frac{1}{p}$; dans ces conditions,

$$Q_n(x) = \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{n!},$$

et

$$(5.1) \quad \omega_{Q_n}(k) = \inf_{v(x-y)=k} v(Q_n(x) - Q_n(y)) = (k + 1 - h)^+, \quad \text{pour } p^{h-1} \leq n < p^h.$$

Les relations précédemment obtenues pour M se transposent aisément :

$$(5.2) \quad v(Q_n(x)) = v(x - \rho) + v(\rho!) + v((n - \rho - 1)!) - v(n!).$$

(5.3) LEMME. - Si $0 \leq s < n$, on a

$$v(s!) + v((n - s - 1)!) - v(n!) \geq - \left[\frac{\log n}{\log p} \right] = 1 - h,$$

ou encore

$$v(C_{n-1}^s) \leq -v(n) + \left[\frac{\log n}{\log p} \right],$$

ou

$$v(C_n^s) \leq -v(n - s) + \left[\frac{\log n}{\log p} \right].$$

L'égalité est réalisée si, et seulement si, " s est bon pour n ", c'est-à-dire si

$$s_{h-1} < n_{h-1} \quad \text{et,} \quad \text{pour } h \neq 1, \quad s_i \geq n_i, \quad 0 \leq i \leq h-2,$$

les s_i étant les chiffres de s dans le système de numération de base p .

Dans la propriété (3.4), la condition (β) s'exprime ici plus simplement, et porte sur les chiffres de x dans son développement de Hensel :

$$(\beta) \quad x_{h-1} < n_{h-1} ,$$

ou bien

$$x_{h-1} \geq n_{h-1} \quad \text{et} \quad v\left(\sum_{0 \leq d < n_{h-1}} \frac{1}{x_{h-1} - d}\right) = 0 .$$

On obtient enfin les résultats analogues à (3.5) et (4.1).

Remarque. - Lorsque $M = A$, et u TBR BO dans A , on a encore quelques simplifications :

$$h - 1 = \left[\frac{\log n}{\log q} \right] , \quad q = \text{card } A/\pi A ,$$

et dans le lemme intervient $v_q(n!)$, et la valuation dans A correspond à l'expression de n dans le système de numération de base p .

6. Application aux fonctions continues de M dans A .

Pour une fonction continue f du compact régulier M dans A , on définit de même

$$\omega_f(k) = \inf_{v(x-y)=kv(\pi)} v(f(x) - f(y)) .$$

Les polynômes Q_n associés à la suite u TBR BO dans M , constituent une base normale de $C(M, A)$; soit alors la série d'interpolation de f ,

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x) ,$$

on a

$$(6.1) \quad \omega_f(k) \geq \rho_f(k) v(\pi) , \quad \text{avec} \quad \rho_f(k) = \inf_{\substack{n \geq 1 \\ v(x-y)=kv(\pi)}} \left(\frac{v(a_n)}{v(\pi)} + \frac{v(Q_n(x) - Q_n(y))}{v(\pi)} \right) .$$

Posons $\lambda_h = \inf \frac{v(a_n)}{v(\pi)}$ pour $N_{h-1} \leq n < N_h$, alors

$$\rho_f(k) = \inf_{h \geq 1} (\lambda_h + (k + 1 - h)^+) .$$

Pour étudier $\rho_f(k)$, on considère le polygone de Newton P de l'ensemble E des points (h, λ_h) , à coordonnées entières; l'ordonnée du point d'abscisse k sur P est notée $Nw(k)$.

$\lambda_h - h$ est l'ordonnée à l'origine de la droite de pente 1 passant par le point (h, λ_h) ; deux cas se présentent :

(a) P admet une droite d'appui de pente 1 , D . - Ceci se produit lorsque

$$\inf_{h \geq 1} (\lambda_h - h) = C_0 \text{ est fini ,}$$

c'est-à-dire lorsqu'il existe C , tel que

$$(6.2) \quad v(a_n) \geq (C + h) v(\pi) , \quad \text{pour } N_{h-1} \leq n < N_h \text{ et } h \geq 1 ,$$

soit

$$|a_n| \leq |\pi|^C \cdot |\pi|^h .$$

Pour $h > k$,

$$\lambda_h \geq h + C \geq k + 1 + C ,$$

et pour $1 \leq h \leq k$,

$$\lambda_h + k + 1 - h \geq k + 1 + C ,$$

donc

$$\rho_f(k) \geq k + 1 + C , \quad \text{pour tout } k .$$

Remarque. - Si h_0 est l'abscisse minima des points de P situés sur D , c'est-à-dire le plus petit h tel que

$$\lambda_h - h = C_0 = \inf_{h \geq 1} (\lambda_h - h) ,$$

alors,

$$\text{pour } k \geq h_0 , \quad \rho_f(k) = k + 1 + C_0 .$$

En revenant à la fonction f ,

$$v(f(x) - f(y)) \geq k + (1 + C) v(\pi) ,$$

et on en déduit le résultat.

(6.3) THÉORÈME. - S'il existe $K > 0$ tel que

$$|a_n| \leq K |\pi|^h , \quad \text{avec } N_{h-1} \leq n < N_h \text{ et } h \geq 1 ,$$

alors, pour tout couple (x, y) d'éléments de M ,

$$|f(x) - f(y)| \leq |\pi| K |x - y| .$$

(b) P n'admet pas de droite d'appui de pente 1 . - Soient (h_i) la suite des abscisses des sommets de P , rangées par ordre croissant, et m_i la pente du côté de P qui se projette selon (h_i, h_{i+1}) ; la suite m_i est croissante, majorée par 1 d'après l'hypothèse (b), on note $\mu = \lim m_i$, $0 < \mu \leq 1$. Soit i_0 , tel que pour $i \geq i_0$, $m_i > 0$; prenons $k \geq h_{i_0}$,

Pour $h > k$, $\lambda_h \geq Nw(h) > Nw(k)$,

Pour $1 \leq h \leq k$, les points correspondants de P sont au-dessus de la droite de pente 1 passant par le point $(k, Nw(k))$, $\lambda_h - h + k + 1 \geq Nw(k) + 1$.

On en déduit donc que

$$\rho_f(k) \geq 1 + [Nw(k)] > Nw(k) , \quad \text{pour } k \geq h_{i_0} ,$$

et, en un sommet de P ,

$$\rho_f(h_i) = 1 + Nw(h_i) .$$

Pour tout nombre réel β , $0 < \beta < \mu$, P admet une droite d'appui de pente β , et

$Nw(k) \geq \beta k + C$ ou $v(a_n) \geq (\beta h + C) v(\pi)$, pour $N_{h-1} \leq n < N_h$ et $h \geq 1$, donc

$$\rho_f(k) > \beta k + C , \quad \text{pour } k \geq h_{i_0} ,$$

d'où le résultat suivant.

(6.4) S'il existe $K > 0$ et β dans $]0, 1[$ tels que

$$|a_n| \leq K |\pi|^{\beta h} , \quad \text{pour } N_{h-1} \leq n < N_h \text{ et } h \geq 1 ,$$

alors il existe $K' > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour $|x - y| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K' |x - y|^\beta .$$

En réunissant les deux résultats (6.3) et (6.4), on peut conclure par le théorème suivant.

(6.5) THÉORÈME. - S'il existe $K > 0$ et $\gamma > 0$ tels que

$$|a_n| \leq K |\pi|^{h\gamma} , \quad \text{pour } N_{h-1} \leq n < N_h \text{ et } h \geq 1 ,$$

alors il existe $K' > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour $|x - y| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K' |x - y|^{\inf(\gamma, 1)} .$$

Applications.

1° Isométries. - A partir du corollaire (3.5) et de la remarque du paragraphe (6.(a)), on obtient le résultat suivant :

(6.6) S'il existe un indice $h_0 \leq 1$ tel que

$$v(a_{N_{h_0-1}}) = (h_0 - 1) v(\pi)$$

et

$$v(a_n) > (h - 1) v(\pi) , \quad \text{pour } n \neq N_{h_0-1} \text{ et } N_{h-1} \leq n < N_h , \quad h \geq 1 ,$$

alors, pour $v(x - y) \geq (h_0 - 1) v(\pi)$, on a

$$v(f(x) - f(y)) = v(x - y) .$$

Si $h_0 = 1$, ceci fournit une classe d'isométries de M avec la condition :

$$\begin{cases} v(a_1) = 0 , \\ v(a_n) > (h - 1) v(\pi) , \quad \text{pour } n \geq 2 . \end{cases}$$

2° Si tous les termes de la suite (q_i) , définie par le compact régulier M , sont égaux à un même entier q (ce qui est le cas lorsque $M = A$) , alors

$$h - 1 = \left[\frac{\log n}{\log q} \right] ,$$

et le théorème (6.5) s'exprime plus simplement sous la forme :

(6.7) S'il existe $K > 0$ et $\gamma > 0$ tels que

$$|a_n| \leq K \left(\frac{1}{n^{\gamma D}} \right) , \quad n \geq 1 , \quad \text{où } D = \frac{-\log |\pi|}{\log q} ,$$

alors il existe $K' > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour $|x - y| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K' |x - y|^{\inf(\gamma, 1)} .$$

Exemples :

$$\text{Si } M = \mathbb{Z}_p \quad \text{et} \quad u_n = n ,$$

la constante D est égale à 1 , et on a, en particulier :

(6.8) S'il existe $K > 0$ tel que, pour $n \geq 1$, $|a_n| \leq \frac{K}{n}$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y| \quad \text{dans } \mathbb{Z}_p ,$$

et (6.6) fournit une classe d'isométries de $\mathbb{Z}_p$.

(6.9) Si $f \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_p)$, et si sa série d'interpolation par les polynômes binômiaux a pour coefficients a_n :

$$\underline{\text{Si}} \quad |a_1| = 1 ,$$

$$\underline{\text{Si}} \quad |a_n| < \frac{1}{p^{\lfloor (\log n)/(\log p) \rfloor_h}} \quad (\underline{\text{ce qui est réalisé si}} \quad |a_n| < \frac{1}{n}) ,$$

alors f est une isométrie de $\mathbb{Z}_p$.

Si K est une extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$ de degré s , et si $M = A$, la constante D est alors égale à $\frac{1}{s}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

(Texte reçu le 24 février 1969)

Mlle Eve HELSMOORTEL
26 rue du Maréchal Joffre
33 - BORDEAUX