Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Gérard Garandel

Espaces de Banach ultramétriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, nº 2 (1967-1968), exp. nº G2, p. G1-G8

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_2_A9_0>

Groupe d'Etudes de
THÉORIE DES NOMBRES
Année 1967/68, n° 2

ESPACES DE BANACH ULTRAMÉTRIQUES

par Gérard GARANDEL

(d'après J.-P. SERRE [3])

Soit K un corps muni d'une valeur absolue, ultramétrique, pour laquelle il est complet. On désigne par A l'anneau de valuation, par $\mathfrak{M}$ l'idéal de valuation, par G^* le groupe multiplicatif des valeurs absolues, sous-groupe de $\underset{\sim}{R} > 0$.

On appelle espace de Banach ultramétrique E , un espace vectoriel sur K normé, complet, dont la norme vérifie l'inégalité ultramétrique $\|x + y\| \leqslant \max(\|x\| , \|y\|)$, $(\forall\ x , \forall\ y \in E)$. Le A-module E_0 des éléments de E de norme inférieure ou égale à 1 est complet. Si $\mathfrak{a}$ désigne l'ensemble des idéaux de A , les sous-A-modules $\mathfrak{A}E_0$ pour $\mathfrak{A}$ décrivant $\mathfrak{a}$ constituent un système de voisinages fondamentaux de zéro. E_0 est homéomorphe à $\varprojlim(E_0/\mathfrak{A}E_0 , \mathfrak{A} \in \mathfrak{a})$, les $(A/\mathfrak{A})$-modules $E_0/\mathfrak{A}E_0$ étant munis de la topologie discrète.

On appelle condition (N) :

$$\text{(N)} \qquad (\forall\ x \in E , \quad x \neq 0 , \quad \|x\| \in \overline{G^*}) ,$$

$\overline{G^*}$ étant l'adhérence de G^* dans $R > 0$. Tout sous-groupe de $R > 0$ étant, soit discret, donc isomorphe à l'ensemble des $e^{-\alpha}$, $\alpha \in \underset{\sim}{Z}$, soit dense dans $R > 0$, si la valeur absolue sur K n'est pas discrète, la propriété (N) est toujours vérifiée, si la valeur absolue sur K est discrète, la condition (N) est équivalente à

$$\text{(N')} \qquad (\forall\ x \in E , \quad x \neq 0 , \quad \|x\| \in G^*) .$$

PROPOSITION 1. - Soit E un espace de Banach ultramétrique, toute norme $\| \ \|_1$ sur E est équivalente à une norme $\| \ \|_2$ vérifiant la condition (N). On pose

$$\|x\|_2 = \inf\{r \in G \mid \ r \geqslant \|x\|_1\} .$$

Exemple fondamental : Soient I un ensemble, $c(I)$ le K-espace vectoriel des familles $x = (x_i)_{i\in I}$, $x_i \in K$, telles que $x_i \to 0$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I (on écrira $x_i \to 0$). $c(I)$ est normé par la norme ultramétrique

$$\|x\| = \max_{i\in I}\{|x_i|\} .$$

Cette norme vérifie la condition (N), et $c(I)$ est complet pour cette norme. On remarque que, pour $x = (x_i)_{i\in I}$ appartenant à $c(I)$, $pr_i(x) = x_i$ est nul, sauf pour une partie dénombrable $T(x)$ de I . Considérons alors les éléments e_i de $c(I)$ tels que $pr_j(e_i) = \delta_{ij}$. On a

$$\|e_i\| = 1 \quad (i \in I) \qquad \text{et} \qquad x = \sum_{i\in T(x)} x_i\, e_i\ ,$$

que l'on écrira aussi

$$x = \sum_{i\in I} x_i\, e_i\ .$$

Base normale. - Soit E un espace de Banach ultramétrique, on dit que E admet une base normale, s'il est isomorphe comme espace de Banach à un $c(I)$ (isomorphisme d'espaces vectoriels + isométrie) ; c'est-à-dire, s'il existe une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E appelée base normale telle que tout élément x de E puisse s'écrire de façon unique sous la forme

$$x = (x_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} x_i\, e_i \quad (x_i \to 0) \qquad \text{avec} \quad \|x\| = \max_{i\in I} \{|x_i|\}\ .$$

PROPOSITION 2. - Si la valeur absolue sur K est discrète, alors tout espace de Banach qui vérifie (N), est isomorphe à un espace $c(I)$.

On utilise le lemme suivant :

LEMME. - Si la valeur absolue sur K est discrète, si la norme sur E vérifie la condition (N), une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E soit une base normale, est que les e_i appartiennent à E_0 , et que la famille des $\overline{e_i}$ $(i \in I)$, images des e_i dans $E_0/\mathfrak{M}E_0$, forme une base algébrique du $(A/\mathfrak{M})$-espace vectoriel $E_0/\mathfrak{M}E_0$.

La condition nécessaire est facile puisque, si $x = \sum_{i\in I} x_i\, e_i$, alors $\|x_i\, e_i\| \to 0$ Réciproquement, si $(\overline{e_i})_{i\in I}$ est une base algébrique de $E_0/\mathfrak{M}E_0$, alors toute la famille $(e_i)_{i\in I}$ de représentants est une base normale de E .

On obtient alors, en combinant la proposition 1 et la proposition 2 , le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - Si la valeur absolue sur K est discrète, tout espace de Banach sur K est homéomorphe à un espace $c(I)$.

1. Applications n-linéaires continues.

Soient $E_1 , \ldots , E_n , F$, $(n+1)$ espaces de Banach sur K , $E_1 \times \ldots \times E_n$ est muni de la norme

$$\|(x_1 , \ldots , x_n)\| = \max(\|x_1\| , \ldots , \|x_n\|) .$$

$E_1 \times \ldots \times E_n$ est alors un espace de Banach ultramétrique, si $E_1 , \ldots , E_n$ vérifient la condition (N), alors $E_1 \times \ldots \times E_n$ vérifie la condition (N).

LEMME. - Si u est une application n-linéaire de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F , alors, u est continue si, et seulement si, $\exists\, B \in R \geqslant 0$ telle que

$$\|u(x_1 , \ldots , x_n)\| \leqslant B\|x_1\| \ldots \|x_n\| , \quad \forall\ (x_1 , \ldots , x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n .$$

L'espace $B_n(E_1 , E_2 , \ldots , E_n ; F)$ des applications n-linéaires continues de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F , muni de la norme

$$\|u\| = \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in E_1\times\ldots\times E_n} \frac{\|u(x_1 , \ldots , x_n)\|}{\|x_1\| \ldots \|x_n\|} ,$$

est un espace de Banach ultramétrique.

On a, pour tout $(x_1 , \ldots , x_n)$ de $E_1 \times \ldots \times E_n$,

$$\|u(x_1 , \ldots , x_n)\| \leqslant \|u\|\cdot\|x_1\| \ldots \|x_n\| .$$

Si $E_1 , \ldots , E_n$ vérifient la condition (N), alors

$$\|u\| = \sup_{\|(y_1,\ldots,y_n)\|\leqslant 1} \|u(y_1 , \ldots , y_n)\| .$$

Si $E_1 , \ldots , E_n$ vérifient la condition (N), si F vérifie la condition (N), $B_n(E_1 , \ldots , E_n ; F)$ vérifie la condition (N).

On voit aussi facilement que $B_n(E_1 , \ldots , E_n ; F)$ est isomorphe à $B_1(E_1 ; B_1(E_2 ; B_1(E_3 ; \ldots ; (B_1(E_n ; F)) \ldots)))$.

PROPOSITION 3. - Si la valeur absolue sur K est discrète, si E est un espace de Banach vérifiant la condition (N), si F est un sous-espace vectoriel fermé de E , il existe un projecteur continu de E sur F , de norme égale à 1 .

En effet, $E' = E/F$, muni de la norme : $\|\bar{x}\| = \inf_{x\in\bar{x}} \|x\|$, est un espace de Banach sur K qui vérifie la condition (N).

Soit $(e'_i)_{i\in I}$ une base normale de E' , choisissant une famille $(e_i)_{i\in I}$ de représentants des e'_i , nous pouvons alors construire, à l'aide de l'application : $e'_i \to e_i$, une application linéaire continue π $(\|\pi\| = 1)$ de E' dans E . Si ω est l'application linéaire continue canonique de E dans E' $(\|\omega\| = 1)$, on a $\omega \circ \pi = 1_{E'}$. Le projecteur cherché sera $p = 1_E - \pi \circ \omega$.

PROPOSITION 4. - Si $E = c(I)$ et si F est un sous-espace vectoriel fermé de dimension finie de E , alors, même si la valeur absolue de K n'est pas discrète, il existe un projecteur continu de E sur F , de norme égale à 1 .

On procède par récurrence. Tout d'abord, si $\dim(F) = 1$, si f engendre F , il existe $\lambda \in K$ et une base normale de E contenant λf . Il est alors aisé de construire un projecteur de norme 1 sur F et une base normale de E/F . Si le théorème est vrai pour $\dim F = (n-1)$, si F' est de dimension n , si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de F' , soit F_{n-1} le sous-espace engendré par $e_1, \dots, e_{n-1}$, on a alors la somme directe topologique

$$\frac{E}{F_{n-1}} = \frac{E}{F} \oplus \frac{F}{F_{n-1}} .$$

Si E vérifie la condition (N), le A-module $B_{1,0}(E ; F)$ des applications linéaires continues de E dans F de norme inférieure ou égale à 1 est isomorphe au A-module $B_1(E_0 ; F_0)$ des applications linéaires continues de E_0 dans F_0 .

PROPOSITION 5. - Le A-module $B_{1,0}(E ; F)$ est isomorphe à la limite projective des $(A/\mathfrak{A})$-modules $\mathrm{Hom}(E_0/\mathfrak{A}E_0 ; F_0/\mathfrak{A}F_0)$.

En effet, si $u \in B_{1,0}(E ; F)$, u définit un élément de $B_1(E_0 ; F_0)$, et par passage au quotient un homomorphisme $u_{\mathfrak{A}}$ de $E_0/\mathfrak{A}E_0$ dans $F_0/\mathfrak{A}F_0$. Réciproquement, tout système projectif $(u_{\mathfrak{A}})_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{a}}$ d'homomorphismes définit un homomorphisme continu, $\varprojlim u_{\mathfrak{A}}$, de E_0 dans F_0 .

PROPOSITION 6. - Si $E = c(I)$, soit $(e_i)_{i\in I}$ la base normale ; l'application π qui associe à un élément $u \in B_1(E ; F)$ la famille $(u(e_i))_{i\in I}$, est un isomorphisme de l'espace de Banach $B_1(E ; F)$ sur l'espace $b_F(I)$ des familles bornées $f = (f_i)_{i\in I}$ d'éléments de F , muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{i\in I} \|f_i\| .$$

En effet, pour tout $i \in I$, $\|u(e_i)\| \leq \|u\|$. E vérifiant la condition (N) , on a

$$\|u\| = \sup_{\substack{x\in E_0 \\ x\neq 0}} \|u(x)\| ,$$

par conséquent

$$\|\pi(u)\| = \sup_{i\in I} \|u(e_i)\| \leqslant \|u\| , \qquad \text{d'où } \|\pi\| \leqslant 1 .$$

Réciproquement, soit ω l'application linéaire de $b_F(I)$ dans $B_1(E ; F)$ qui, à $f = (f_i)_{i\in I}$, associe u défini par

$$u(\sum_{i\in I} x_i e_i) = \sum_{i\in I} x_i f_i .$$

On a

$$\|u\| = \sup_{\substack{x\in E_0 \\ x\neq 0}} \|u(x)\| .$$

Comme $\|x\| \leqslant 1 \implies |x_i| \leqslant 1 \quad (\forall i)$, on a

$$\|u\| \leqslant \sup_{i\in I} \|f_i\| , \qquad \text{d'où } \|\omega\| \leqslant 1 .$$

On vérifie que $\pi \circ \omega = 1_{b_F(I)}$ et $\omega \circ \pi = 1_{B_1(E;F)}$.

COROLLAIRE. - Si E' désigne le dual topologique de E, E' est isomorphe à l'espace $b(I)$ des famille bornées $a = (a_i)_{i\in I}$ d'éléments de K, muni de la norme

$$\|a\| = \sup_{i\in I} |a_i| .$$

Matrices infinies : Si $E = c(I)$, si $F = c(J)$, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base normale de E, si (f_j) est une base normale de F, si $u \in B_1(E ; F)$,

$$u(e_i) = \sum_{j\in J} \alpha_{ij} f_j , \qquad \alpha_{ij} \in K \quad (\alpha_{ij} \to 0 \text{ si } j \to \infty) .$$

(α_{ij}) est la matrice associée à u suivant les deux bases normales. On a

$$\|u\| = \sup_i \|u(e_i)\| = \sup_i (\sup_j |\alpha_{ij}|) ,$$

$$\|u\| = \sup_{ij} |\alpha_{ij}| .$$

2. Applications complètement continues.

Définition. - Soient E et F deux espaces de Banach sur K ; un élément u de $B_1(E ; F)$ est dit complètement continu, si u est adhérent dans $B_1(E ; F)$ au sous-espace $B_{1,f}(E ; F)$ des application linéaires continues de rang fini. On note par $\mathcal{C}(E ; F)$, l'espace de Banach des applications complètement continues de E dans F.

Si $u \in B_1(E\ ;\ F)$, $v \in B_1(F\ ;\ G)$, si $u \in \mathcal{C}(E\ ;\ F)$ ou $v \in \mathcal{C}(F\ ;\ G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{C}(E\ ;\ G)$.

Si $F = c(J)$, si $u \in \mathcal{C}(E\ ;\ F)$, on a, pour tout x de E , $u(x) = (\omega_j(x))_{j\in J}$, $\omega_j \in E'$.

PROPOSITION 7. - Si $F = c(J)$, l'application π qui, à tout $u \in \mathcal{C}(E\ ;\ F)$, associé $\omega = (\omega_j)_{j\in J}$, est un isomorphisme de l'espace de Banach $\mathcal{C}(E\ ;\ F)$ sur l'espace $c_{E'}(J)$ des familles $\gamma = (\gamma_j)_{j\in J}$ d'éléments de E' tendant vers zéro, muni de la norme

$$\|\gamma\| = \max_j \|\gamma_j\| .$$

En effet, si $u \in B_{1,f}(E\ ;\ F)$, on sait, d'après la proposition, qu'il existe une base normale de F contenant une base algèbrique de $u(E)$. Soit $(\omega_j)_{j\in J}$, $\omega_j \in E'$ la décomposition de u suivant cette base normale, alors $\omega_j = 0$, sauf pour une partie finie de J .

Si $u \in \mathcal{C}(E\ ;\ F)$, il existe une suite $\{u_n\}$ d'éléments de $B_{1,f}(E\ ;\ F)$, on voit que $\{\omega_{nj}\}$ tend vers ω_j uniformément vis-à-vis de j ; ω_{nj} tendant vers zéro, si $j \to \infty$, ω_j tend vers zéro.

On a

$$\|u(x)\| = \sup_j \|\omega_j(x)\| , \qquad (\forall\ x \in E) ,$$

d'où

$$\|u\| = \sup_j \|\omega_j\| , \qquad \text{d'où } \|\pi\| = 1 .$$

Réciproquement, si $(\gamma_j)_{j\in J} \in c_{E'}(J)$, on définit l'application linéaire u qui, à x , associe

$$u(x) = \sum_{j\in J} \gamma_j(x)\ f_j .$$

u est complètement continue car, pour tout n entier positif, il existe une partie finie T_n de J telle que $\|\gamma_j\| \leq \frac{1}{n}$ pour $j \notin T_n$. Posons $u_n = (u_{nj})_{j\in J}$, où $u_{nj} = \gamma_j$ si $j \in T_n$, et $u_{nj} = 0$ si $j \notin T_n$. u_n est linéaire, de rang fini, et $u_n \to u$.

3. Produits tensoriels topologiques.

Etant donnés deux espaces de Banach ultramétriques E_1 et E_2 sur un même corps K , il existe un espace de Banach ultramétrique $E_1 \hat{\otimes} E_2$ sur K unique à un isomorphisme près, et une application bilinéaire continue φ de $E_1 \times E_2$ dans $E_1 \hat{\otimes} E_2$, tels que, pour tout espace de Banach ultramétrique H sur K, et pour toute application bilinéaire continue u de $E_1 \times E_2$ dans H, il existe une application linéaire f continue unique de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans H, telle que $u = f \circ \varphi$.

On sait que l'espace vectoriel $L_2(E_1, E_2 ; H)$ des applications bilinéaires de $E_1 \times E_2$ dans H est isomorphe à $L(E_1 \otimes E_2 ; H)$. Munissons $E_1 \otimes E_2$ de la semi-norme suivante γ : si $z \in E_1 \otimes E_2$, il existe plusieurs façons d'écrire z sous la forme

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i .$$

On dit que $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ est un système représentant z. On pose

$$\gamma(z) = \inf ,$$

pour tous les systèmes $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ représentant z de $\sup_i \|x_i\| . \|y_i\|$.

On considère le complété $E_1 \hat{\otimes} E_2$ de $E_1 \otimes E_2$ et l'application φ de $E_1 \times E_2$ dans $E_1 \otimes E_2$ telle que $\varphi(x , y) = x \otimes y$. On a $\|\varphi\| \leqslant 1$. Si u est bilinéaire, continue de $E_1 \times E_2$ dans H, u définit une application f linéaire de $E_1 \otimes E_2$ dans H. On a $\|f\| = \|u\|$, et f se prolonge, de manière unique, en une application linéaire continue $\tilde{f}$ de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans H, telle que $u = \tilde{f} \circ \varphi$.

On peut d'ailleurs montrer [2] que l'application canonique de $E_1 \otimes E_2$ dans $E_1 \hat{\otimes} E_2$ est injective : $E_1 \otimes E_2$ est donc séparé.

PROPOSITION 8 [1]. - <u>Si</u> $E_1 = c(I)$ <u>et</u> $E_2 = c(I)$, <u>soit</u> $(e_i)_{i\in I}$ <u>une base normale de</u> E_1, $(f_j)_{j\in J}$ <u>une base normale de</u> E_2, <u>alors</u> $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ <u>est une base normale de</u> $E_1 \hat{\otimes} E_2$.

On construit l'application π bilinéaire continue ($\|\pi\| \leqslant 1$) de $c(I) \times c(J)$ dans $c(I \times J)$, telle que

$$\pi((x_i)_{i\in I} , (y_j)_{j\in J}) = (x_i\, y_j)_{(i,j)\in I\times J} .$$

π définit donc une application $\overline{\pi}$ linéaire continue de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans $c(I \times J)$, telle que $\|\overline{\pi}\| \leqslant 1$.

Réciproquement, nous définissons une application ω de $c(I \times J)$ dans $E_1 \hat{\otimes} E_2$, en posant

$$\omega[(\eta_{ij})_{(i,j)\in I\times J}] = \sum_{(i,j)\in I\times J} \eta_{ij}(e_i \otimes f_j) .$$

ω est bien linéaire, et $\|\omega\| \leqslant 1$. On vérifie facilement que $\overline{\pi} \circ \omega = \underset{\sim}{1}_{c(I\times J)}$ et $\omega \circ \overline{\pi} = \underset{\sim}{1}_{E_1 \hat{\otimes} E_2}$.

PROPOSITION 9. - <u>Pour tout espace de Banach</u> E , $E \hat{\otimes} c(J)$ <u>est isomorphe à l'espace</u> $c_E(J)$ <u>des familles</u> $(z_j)_{j \in J}$ <u>d'éléments de</u> E <u>tendant vers zéro, muni de la norme</u> $\max_j \|z_j\|$.

En effet, soit $(f_j)_{j \in J}$ la base normale canonique de $c(J)$; pour $(z_j)_{j \in J}$ élément de $c_E(J)$, posons

$$\omega((z_j)_{j \in J}) = \sum_{j \in J} z_j \otimes f_j ,$$

ce qui a bien un sens puisque $\gamma(z_j \otimes f_j) \leqslant \|z_j\|$, ω est une application linéaire continue $(\|\omega\| \leqslant 1)$ de $c_E(J)$ dans $E \hat{\otimes} c(J)$.

Réciproquement, soit π l'application bilinéaire continue de $E \times c(J)$ dans $c_E(J)$ qui, à $x \in E$ et à $y = \sum_{j \in J} \eta_j f_j$, associe $\pi(x , y) = (\eta_j x)_{j \in J}$. π définit une application $\overline{\pi}(\|\overline{\pi}\| \leqslant 1)$ de $E \hat{\otimes} c(J)$ dans $c_E(J)$.

On a $\omega \circ \overline{\pi} = \underset{\sim}{1}_{E \hat{\otimes} c(J)}$ et $\overline{\pi} \circ \omega = \underset{\sim}{1}_{c_E(J)}$.

COROLLAIRE. - $\mathcal{C}(E ; c(J))$ <u>est isomorphe à</u> $E' \hat{\otimes} c(J)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[2] GRUSON (Laurent). - Théorie de Fredholm p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 94, 1966, p. 67-95.

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Études scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).