

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GEORGES RHIN

Deux théorèmes sur l'équirépartition modulo 1 de suites $f_n(\theta)$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, n° 2 (1967-1968),
exp. n° G1 et G4, p. G1-G3

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_2_A8_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEUX THÉORÈMES SUR L'ÉQUIRÉPARTITION MODULO 1 DE SUITES $f_n(\theta)$

par Georges RHIN

1. Dans le corps des réels.

DÉFINITION. - Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels dans $[0, 1[$. Si $0 \leq a < b \leq 1$, soit $v(a, b, N)$ le nombre de n tels que

$$x_n \in [a, b[\quad \text{et} \quad 1 \leq n \leq N.$$

La suite (x_n) est dite équirépartie si

$$\forall (a, b) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} v(a, b, N) = b - a.$$

Une suite (x_n) de réels sera dite équirépartie modulo 1 si la suite des parties fractionnaires est équirépartie dans $[0, 1[$.

CRITÈRE de Hermann Weyl (1916). - Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ soit équirépartie modulo 1 est que, pour tout h entier relatif non nul, on ait :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h x_n} = 0.$$

THÉORÈME de Koksma (1935) [2]. - Soit $(x_n(t))_{n \geq 1}$ une suite de fonctions dérivables dans $[\alpha, \beta]$. On pose, si $n_1 \neq n_2$,

$$\varphi(n_1, n_2, t) = x'_{n_1}(t) - x'_{n_2}(t).$$

On suppose que $\varphi'_t(n_1, n_2, t)$ ne s'annule pas et est une fonction monotone de t dans $[\alpha, \beta]$.

On pose $A_N = \frac{1}{N^2} \sum_{n_1=2}^N \sum_{n_2=1}^{n_1-1} \max \left[\frac{1}{|\varphi'_t(n_1, n_2, \alpha)|}, \frac{1}{|\varphi'_t(n_1, n_2, \beta)|} \right]$.

Si l'on peut extraire une suite $(N_k)_{k \geq 1}$ d'entiers telle que

$$\frac{N_{k+1}}{N_k} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \sum_k A_{N_k} < +\infty,$$

alors la suite $(x_n(t))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout t dans (α, β) .

COROLLAIRE 1. - Etant donnée une suite de fonctions dérivables sur (α, β) telles que $|x'_{n_1}(t) - x'_{n_2}(t)| \geq K > 0$ pour $n_1 \neq n_2$ et tout $t \in (\alpha, \beta)$, alors la suite $(x_n(t))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout $t \in (\alpha, \beta)$.

COROLLAIRE 2. - Les suites $(t\theta^n)$ ($\theta \in \mathbb{R}$, $|\theta| > 1$), et $(u_n t)$ ($u_n \in \mathbb{Z}$ et $n \rightarrow u_n$ injective) sont équiréparties modulo 1 pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

La suite (λt^n) ($\lambda \neq 0$) est équirépartie modulo 1 pour presque tout t tel que $|t| > 1$.

2. Dans le corps p-adique élémentaire.

Soit \mathbb{Q}_p le complété de \mathbb{Q} pour la valuation p-adique, et soit $x \in \mathbb{Q}_p$. Alors

$$x = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n p^n \quad \text{avec } a_n \in \mathbb{Z}.$$

Le rationnel $\sum_{n=-k}^{-1} a_n p^n$ est défini modulo 1. On pose

$$H_p(x) = \text{partie fractionnaire de } \sum_{n=-k}^{-1} a_n p^n.$$

DÉFINITION. - Une suite (x_n) est dite équirépartie modulo 1 si la suite $(H_p(x_n))$ est équirépartie dans $(0, 1[$.

On posera $|x|_p = p^k$ si $a_{-k} \neq 0$.

THÉORÈME ([1], p. 81-96). - Soit D un disque de \mathbb{Q}_p . Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite d'applications continues de D dans \mathbb{Q}_p . Pour tout couple d'entiers positifs, soit

$$F_{m,n} = f_m - f_n.$$

Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ contenant les couples tels que $m = n$, et K_N désigne le nombre d'éléments (m, n) de K tels que $\sup(m, n) \leq N$.

On suppose les deux conditions suivantes réalisées :

1° si $(m, n) \notin K$, $\forall x, y \in D$

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\Lambda_{m,n}} |x - y|_p$$

où $\Lambda_{m,n} \in \mathbb{Z}$ et vérifie $\Lambda_{m,n} \rightarrow +\infty$ quand $\sup(m, n) \rightarrow +\infty$;

2° il existe une suite croissante N_k ($k = 1, 2, \dots$) d'entiers positifs tels que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_{k+1}}{N_k} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_k \frac{N_k}{N_k^2} < +\infty.$$

Alors la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 dans \mathbb{Q}_p pour presque tout x de D .

COROLLAIRE. - Les suites

$$(x\theta^n) \quad (\theta \in \mathbb{Q}_p, \quad |\theta|_p > 1) \quad \text{avec } D \text{ quelconque,}$$

$$(\lambda x^n) \quad (\lambda \in \mathbb{Q}_p, \quad \lambda \neq 0) \quad \text{avec } D \cap \mathbb{Z}_p = \emptyset,$$

$$(u_n x) \quad (u_n \in \mathbb{Q}_p, \quad |u_n|_p \geq a \text{ et } n \rightarrow u_n \text{ injective}) \quad \text{avec } D \text{ quelconque,}$$

vérifient les conditions du théorème ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, VI + 98 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).
- [2] KOKSMA (J. F.). - Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins, Compos. Math., Groningen, t. 2, 1935, p. 250-258.
-