SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.
THÉORIE DES NOMBRES

GEORGES RHIN

Deux théorèmes sur l'équirépartition modulo 1 de suites $f_n(\theta)$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, n° 2 (1967-1968), exp. n° G1 et G4, p. G1-G3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_2_A8_0>

Groupe d'Etudes de
THÉORIE DES NOMBRES
Année 1967/68, n° 1 et 4

13 novembre et 11 décembre 1967

DEUX THÉORÈMES SUR L'ÉQUIRÉPARTITION MODULO 1 DE SUITES $f_n(\theta)$

par Georges RHIN

1. Dans le corps des réels.

DÉFINITION. - Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels dans $[0, 1[$. Si $0 \leq a < b \leq 1$, soit $\nu(a, b, N)$ le nombre de n tels que

$$x_n \in [a, b[\qquad \text{et} \qquad 1 \leq n \leq N .$$

La suite (x_n) est dite équirépartie si

$$\forall\ (a, b) \qquad \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \nu(a, b, N) = b - a .$$

Une suite (x_n) de réels sera dite équirépartie modulo 1 si la suite des parties fractionnaires est équirépartie dans $[0, 1[$.

CRITÈRE de Hermann Weyl (1916). - Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ soit équirépartie modulo 1 est que, pour tout h entier relatif non nul, on ait :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0 .$$

THÉORÈME de Koksma (1935) [2]. - Soit $(x_n(t))_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dérivables dans $[\alpha, \beta]$. On pose, si $n_1 \neq n_2$,

$$\varphi(n_1, n_2, t) = x'_{n_1}(t) - x'_{n_2}(t) .$$

On suppose que $\varphi'_t(n_1, n_2, t)$ ne s'annule pas et est une fonction monotone de t dans $[\alpha, \beta]$.

On pose $A_N = \frac{1}{N^2} \sum_{n_1=2}^{N} \sum_{n_2=1}^{n_1-1} \max\left[\frac{1}{|\varphi'_t(n_1, n_2, \alpha)|}, \frac{1}{|\varphi'_t(n_1, n_2, \beta)|}\right]$.

Si l'on peut extraire une suite $(N_k)_{k\geq 1}$ d'entiers telle que

$$\frac{N_{k+1}}{N_k} \to 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_k A_{N_k} < +\infty ,$$

alors la suite $(x_n(t))_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout t dans $[\alpha , \beta]$.

COROLLAIRE 1. - Etant donnée une suite de fonctions dérivables sur $[\alpha , \beta]$ telles que $|x'_{n_1}(t) - x'_{n_2}(t)| \geq K > 0$ pour $n_1 \neq n_2$ et tout $t \in [\alpha , \beta]$, alors la suite $(x_n(t))_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout $t \in [\alpha , \beta]$.

COROLLAIRE 2. - Les suites $(t\theta^n)$ $(\theta \in R$, $|\theta| > 1)$, et $(u_n t)$ $(u_n \in \mathbb{Z}$ et $n \to u_n$ injective) sont équiréparties modulo 1 pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

La suite (λt^n) $(\lambda \neq 0)$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout t tel que $|t| > 1$.

2. Dans le corps p-adique élémentaire.

Soit $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique, et soit $x \in \mathbb{Q}_p$. Alors

$$x = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n p^n \qquad \text{avec} \quad a_n \in \mathbb{Z} .$$

Le rationnel $\sum_{n=-k}^{-1} a_n p^n$ est défini modulo 1 . On pose

$$H_p(x) = \text{ partie fractionnaire de } \sum_{n=-k}^{-1} a_n p^n .$$

DÉFINITION. - Une suite (x_n) est dite équirépartie modulo 1 si la suite $(H_p(x_n))$ est équirépartie dans $[0 , 1[$.

On posera $|x|_p = p^k$ si $a_{-k} \neq 0$.

THÉORÈME ([1], p. 81-96). - Soit D un disque de $\mathbb{Q}_p$. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications continues de D dans $\mathbb{Q}_p$. Pour tout couple d'entiers positifs, soit

$$F_{m,n} = f_m - f_n .$$

Soit K un sous-ensemble de $N^* \times N^*$ contenant les couples tels que $m = n$, et K_N désigne le nombre d'éléments (m , n) de K tels que $\sup(m , n) \leq N$.

On suppose les deux conditions suivantes réalisées :

1° si $(m , n) \notin K$, $\forall x , y \in D$

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\Lambda_{m,n}} |x - y|_p$$

où $\Lambda_{m,n} \in \mathbb{Z}$ et vérifie $\Lambda_{m,n} \to +\infty$ quand $\sup(m , n) \to +\infty$;

2° il existe une suite croissante N_k $(k = 1 , 2 , \ldots)$ d'entiers positifs tels que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_{k+1}}{N_k} = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_k \frac{K_{N_k}}{N_k^2} < +\infty .$$

Alors la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1 dans $\mathbb{Q}_p$ pour presque tout x de D .

COROLLAIRE. - Les suites

$(x\theta^n)$ $(\theta \in \mathbb{Q}_p , |\theta|_p > 1)$ avec D quelconque,

(λx^n) $(\lambda \in \mathbb{Q}_p , \lambda \neq 0)$ avec $D \cap \mathbb{Z}_p = \emptyset$,

$(u_n x)$ $(u_n \in \mathbb{Q}_p , |u_n|_p \geq a$ et $n \to u_n$ injective) avec D quelconque,

vérifient les conditions du théorème ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, VI + 98 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[2] KOKSMA (J. F.). - Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins , Compos. Math., Groningen, t. 2, 1935, p. 250-258.