Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Yves Meyer

Caractérisation des nombres de Pisot-Vijayaraghavan (P.-V.)

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, nº 1 (1967-1968), exp. nº 8, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_1_A8_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CARACTÉRISATION DES NOMBRES DE PISOT-VIJAYARAGHAVAN (P.-V.)

par Yves MEYER

Nous établissons un nouveau lien entre les nombres de P.-V. et les problèmes posés par l'analyse harmonique.

Définition. - Soit Λ un ensemble de nombres réels. On dira que Λ est un spectre régulier si l'on peut trouver deux nombres strictement positifs T et ε tels que, pour toute suite $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de nombres complexes dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini, on a

$$(1) \qquad \sup_{|x|\leq T} \Big|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\, e^{i\lambda x}\Big| \geq \varepsilon \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\, e^{i\lambda x}\Big| \quad .$$

THÉORÈME 1. - *Soient* θ *un nombre réel,* $\theta > 1$, *et* Λ *l'ensemble de toutes les sommes finies*

$$\sum_{k\geq 0} \varepsilon_k\, \theta^k \ , \quad \varepsilon_k \in \{0 , 1\} \quad .$$

Alors Λ *est un spectre régulier si, et seulement si,* θ *est un nombre de* P.-V.

1° Supposons d'abord que θ ne soit pas un nombre de P.-V. Alors, grâce à un théorème de C. PISOT, pour aucun x non nul, la série $\sum_{n\geq 1} \sin^2(x\theta^n)$ ne converge, et l'on en déduit aussitôt que, pour tout x non nul, la suite

$$p_n(x) = \cos(x/2)\cos(\theta x/2)\ \ldots\ \cos(\theta^n x/2)$$

tend vers 0 . Posons alors

$$P_n(x) = p_n(x)\exp((ix/2)(1 + \theta + \ldots + \theta^n)) \quad .$$

Alors $P_n(x)$ est bien de la forme $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\, e^{i\lambda x}$. Pour tout x non nul, les fonctions $|P_n(x)|$ tendent, en décroissant, vers 0 , et donc, sur tout compact K ne contenant pas 0 , les $P_n(x)$ convergent uniformément vers 0 . Mais (1) a pour conséquence immédiate

$$(2) \qquad \sup_{T\leq x\leq 3T} \Big|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\, e^{i\lambda x}\Big| \geq \varepsilon \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\, e^{i\lambda x}\Big| \quad .$$

Dans notre cas, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_n(x)| = |P_n(0)| = 1$, et (2) ne peut être vérifié.

2° Supposons maintenant que θ est un nombre de P.-V., et montrons pourquoi Λ est un spectre régulier. Un théorème général d'analyse harmonique (que nous ne démontrerons pas) nous sera utile. Pour alléger les notations, nous appellerons Λ un ensemble de nombres réels, et $P(x)$ toute fonction d'une variable réelle s'écrivant $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$.

THÉORÈME 2. - Soit Λ un ensemble de nombres réels. Les propriétés (a), (b) et (c) sont équivalentes et entraînent (d).

(a) Pour tout ε , $\varepsilon > 0$, on peut trouver un T_ε , $T_\varepsilon > 0$, tel que tout intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur $2T_\varepsilon$ contienne un nombre réel τ ayant la propriété que, pour tout $P(x)$, $(P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x})$,

$$\|P(x + \tau) - P(x)\|_\infty \leqslant \varepsilon \|P(x)\|_\infty \ .$$

(b) Pour tout ε , $\varepsilon > 0$, on peut trouver un T_ε , $T_\varepsilon > 0$, tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $t_x \in [- T_\varepsilon , T_\varepsilon]$ avec la propriété que

$$|P(x) - P(t_x)| \leqslant \varepsilon \|P(x)\|_\infty \ .$$

(c) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un S_ε , $S_\varepsilon > 0$, tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $t_x \in [- S_\varepsilon , S_\varepsilon]$ tel que

$$(\forall\ \lambda) \qquad \lambda \in \Lambda \implies |e^{i\lambda t_x} - e^{i\lambda x}| \leqslant \varepsilon \ .$$

Cela entraîne :

(d) Pour tout ε , $\varepsilon > 0$, il existe un T_ε , $T_\varepsilon > 0$, tel que, pour tout $P(x)$, $\sup_{|x| \leqslant T_\varepsilon} |P(x)| \geqslant (1 - \varepsilon)\|P\|_\infty$.

Il nous suffit donc, pour prouver le théorème 1, de montrer que la condition (c) du théorème 2 est satisfaite. C'est le cas (comme nous allons le voir), et cela entraîne la proposition suivante.

PROPOSITION. - A tout nombre de P.-V., θ , et à tout ε , $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $T(\theta , \varepsilon)$ tel que tout intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur $2T(\theta , \varepsilon)$ contienne une solution u de l'inégalité

$$\sum_{k\geq 0} |\exp(iu\theta^k) - 1| \leq \varepsilon \quad .$$

Passons à la preuve de (c). On la présentera dans le cas (typique) où θ est quadratique : $\theta^2 + p\theta + q = 0$, $p \in \underset{\sim}{Z}$, $q \in \underset{\sim}{Z}$. On appelle $(\ell_n)_{n\geq 0}$ (resp. $(m_n)_{n\geq 0}$) une suite d'éléments de $\underset{\sim}{Z}$ définis par

$$\ell_{n+2} + p\ell_{n+1} + q\ell_n = 0 \ , \quad \ell_0 = 1 \ , \quad \ell_1 = 0$$

$$m_{n+2} + pm_{n+1} + qm_n = 0 \ , \quad m_0 = 0 \ , \quad m_1 = 1 \quad .$$

On a alors $\theta^n = \ell_n + m_n\,\theta$ et si η est le conjugué de θ , on a

$$\eta^n = \ell_n + m_n\,\eta \quad .$$

On appelle I l'ensemble de toutes les suites de 0 ou de 1 qui sont nulles à partir d'un certain moment, et I_A est l'ensemble des éléments $\sigma = (\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ de I tels que $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{A-1} = 0$.

On pose, pour tout σ de I , $\lambda(\sigma) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon_k\,\theta^k$ (si $\sigma = (\varepsilon_0 , \varepsilon_1 , \dots))$, $\ell(\sigma) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon_k\,\ell_k$ et $m(\sigma) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon_k\,m_k$. On a alors, si $\sigma \in I_A$,

$$|\ell(\sigma) + \eta m(\sigma)| \leq \frac{|\eta|^A}{1 - |\eta|} \quad .$$

Soit enfin x' et x_1' définis par $x \equiv x'(2\pi)$ et $|x'| \leq \pi$, $\theta x \equiv x_1'(2\pi)$ et $|x_1'| \leq \pi$. On a alors $\exp(i\lambda(\sigma)x) = \exp(i(\ell(\sigma) + \theta m(\sigma))x) = \exp(i(\ell(\sigma)x' + m(\sigma)x_1'))$. On écrit $\ell(\sigma) + \eta m(\sigma) = z_A(\sigma)$, si $\sigma \in I_A$. Alors

$$\exp(i\lambda(\sigma)x) = \exp(ix'z_A(\sigma) + im(\sigma)(x_1' - \eta x')) \quad .$$

Si t est réel, on a aussi

$$\exp(i\lambda(\sigma)t) = \exp(i(\ell(\sigma)t + \theta m(\sigma)t)) = \exp(i(z_A(\sigma)t + (\theta - \eta)m(\sigma)t)) \quad .$$

Si $t = (x_1' - \eta x')(\theta - \eta)^{-1}$, on a

$$|\exp\, i\lambda(\sigma)t - \exp\, i(\lambda(\sigma)x)| \leq |z_A|(|t| + \pi)$$

$$\leq \pi|\eta|^A\,(1 - |\eta|)^{-1}\,(1 + (1 + |\eta|)(\theta - \eta)^{-1}) \quad .$$

On a donc, si A est assez grand,

$$|e^{i\lambda t} - e^{i\lambda x}| \leq \varepsilon \qquad (\lambda = \lambda(\sigma) \ , \quad \sigma \in I_A)$$

avec $|t| \leq \pi(1 + |\eta|)(\theta - \eta)^{-1}$.

On remarque alors, pour régler le cas général, que la partie de Λ relative à $\sigma \in I_A$ est homothétique à Λ tout entier.

Remarques. - Si $1 < \theta < 2$, l'application de I dans $\mathbb{R}$, $\sigma \to \lambda(\sigma)$ n'est pas injective. Une conséquence de la propriété, " Λ est un spectre régulier", est : $\inf\{|\lambda' - \lambda| \; ; \; \lambda \in \Lambda \, , \; \lambda' \in \Lambda \, , \; \lambda \neq \lambda'\} > 0$. Donc, si $1 < \theta < 2$, il peut arriver que $\sum_{k\geq 0} \varepsilon_k \theta^k = \sum_{k\geq 0} \varepsilon'_k \theta^k$, $\varepsilon_k \in \{0 \, , \, 1\}$, $\varepsilon'_k \in \{0 \, , \, 1\}$. Mais il existe un nombre d , $d > 0$, ne dépendant que de θ , tel que si $\sum_{k\geq 0} \varepsilon_k \theta^k$ et $\sum_{k\geq 0} \varepsilon'_k \theta^k$ diffèrent, alors ils diffèrent d'au moins d .

Le théorème 1 s'étend à la situation suivante : soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers tels que $0 \leq n_k \leq n_{k+1}$ $(k \geq 0)$

$$(\forall \; t) \qquad t \in \,]0 \, , \, 1[\implies \sum_{k\geq 0} n_k t^k < +\infty \; ,$$

et soit Λ l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k\geq 0} \varepsilon_k \theta^k$ où $|\varepsilon_k| \leq n_k$. Alors Λ est un spectre régulier si, et seulement si , θ est un nombre de Pisot.