Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Bernard de Mathan

Approximation diophantienne par les éléments de certaines suites

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, nº 1 (1967-1968), exp. nº 12, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_1_A12_0>

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE PAR LES ÉLÉMENTS DE CERTAINES SUITES

par Bernard de MATHAN

Introduction. - Soit E un espace métrique compact, $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de E, dense dans E. On se pose le problème d'approximation suivant : étant donné une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels positifs, on veut étudier pour un élément x de E les solutions de l'inéquation diophantienne (en n)

$$I(x) : \quad d(x , u_n) \leqslant \varepsilon_n$$

(d désigne la distance sur E).

Désignons par B_n la boule : $B_n = \{z \in E \mid d(z , u_n) \leqslant \varepsilon_n\}$. Soit μ une mesure sur E, positive de masse totale 1. Il est facile de voir que si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ est convergente, l'inéquation $I(x)$ n'a qu'un nombre fini de solutions pour μ-presque tout x.

Désignons par β_n la fonction caractéristique de la boule B_n, et pour tout entier positif h, par $N(h ; x)$ le nombre de solutions au plus égales à h de $I(x)$. On a

$$N(h ; x) = \sum_{n=1}^{h} \beta_n(x) ,$$

donc

$$\int N(h ; x) \, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{h} \mu(B_n) \quad .$$

Ceci conduit donc à se demander à quelles conditions sur la suite (u_n) on aura l'estimation :

$$N(h ; x) \sim \sum_{n=1}^{h} \mu(B_n)$$

pour μ-presque tout x, dès que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ sera divergente et, mettons la suite $\mu(B_n)$ décroissante. Nous appellerons $P = P((u_n) , \mu)$ cette propriété.

Le but de cet exposé est d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME. - Soit E un espace ultramétique compact, et soit μ une mesure positive sur E, de masse totale 1, et dont le support soit E. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de E , satisfaisant à la condition de répartition suivante : posant pour tout couple d'entiers (k, ℓ) $(0 \leqslant k < \ell)$ et toute boule D de E

$$\nu(k, \ell ; D) = \mathrm{Card}\{n \mid k < n \leqslant \ell ; \; u_n \in D\} ,$$

il existe une constante positive C telle que l'on ait :

$$\text{(d)} \qquad \nu(k, \ell ; D) \leqslant (\ell - k)\, \mu(D) + C \qquad \forall\, k, \ell, \quad \forall\, D .$$

Alors, pour toute suite de boules $(B_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $u_n \in B_n$, que la suite $\mu(B_n)$ soit décroissante et que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ soit divergente, posant :

$$N(h ; x) = \mathrm{Card}\{n \mid 1 \leqslant n \leqslant h ; \; x \in B_n\}$$

$$\Phi(h) = \sum_{n=1}^{h} \mu(B_n)$$

on a, pour μ-presque tout x , l'estimation

$$\text{(e)} : N(h ; x) = \Phi(h) + O((\Phi(h))^{1/2}(\log \Phi(h))^{(3+\varepsilon)/2}) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \quad (h \to \infty) .$$

Précisons que dans cet énoncé, l'estimation n'est pas uniforme par rapport à x , et que naturellement l'ensemble des x , de complémentaire μ-négligeable, pour lesquels on a l'estimation dépend de la suite des B_n .

La démonstration est basée sur le lemme suivant :

LEMME 1. - Soit E un ensemble muni d'une mesure positive μ , de masse totale 1 , complète. Soit $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur E , à valeurs réelles non négatives, intégrables et de carrés intégrables. Supposons qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels non négatifs, bornée, telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ soit divergente, et telle qu'en posant :

$$N(k, \ell ; x) = \sum_{k<n\leqslant \ell} \gamma_n(x)$$

$$\Phi(k, \ell) = \sum_{k<n\leqslant \ell} \alpha_n \qquad (k, \ell \text{ entiers}, \; 0 \leqslant k < \ell)$$

on ait pour tout (k, ℓ) :

(i) $\int N(k, \ell ; x)\, d\mu(x) = \Phi(k, \ell) + O(1)$;

(ii) $\int N^2(k, \ell ; x)\, d\mu(x) = \Phi^2(k, \ell) + O(\Phi(k, \ell))$.

Alors, posant :

$$N(h\ ;\ x) = N(0\ ,\ h\ ;\ x)$$
$$\Phi(h) = \Phi(0\ ,\ h)$$

on a pour μ-presque tout x l'estimation

(e): $N(h\ ;\ x) = \Phi(h) + O((\Phi(h))^{1/2}(\log \Phi(h))^{(3+\varepsilon)/2}) \qquad \forall\ \varepsilon > 0 \quad (h \to \infty)$.

Remarque. - Pour appliquer ce lemme, il suffira évidemment de prouver, à la place de (ii), que l'on a $\int N^2(k\ ,\ \ell\ ;\ x)\ d\mu(x) \leqslant \Phi^2(k\ ,\ \ell) + O(\Phi(k\ ,\ \ell))$ car l'inégalité en sens contraire est impliquée par (i).

Démonstration. - Ce lemme est inspiré du travail de SCHMIDT [4] dont nous reprenons la méthode. L'hypothèse que la suite (α_n) soit bornée n'est pas nécessaire, mais elle simplifie la démonstration, et cette restriction ne nous gênera pas.

Quitte à tout multiplier par une constante, on peut supposer $\alpha_n \leqslant 1\ \ \forall\ n$. Soit ω la suite définie par $\omega(h) = [\Phi(h)]$ si $h > 0$ et $\omega(0) = 0$. Comme on a $\alpha_n \leqslant 1$ et que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ est divergente, l'ensemble des valeurs de ω est $\mathbb{N}$. Soit Δ une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 , telle que la restriction à Δ de ω soit une bijection de Δ sur $\mathbb{N}$. Pour tout entier positif s , désignons par L_s l'ensemble des couples $(k\ ,\ \ell)$ d'entiers appartenant à Δ tels que $0 \leqslant k < \ell$, $\omega(\ell) \leqslant 2^s$ et qu'il existe des entiers non négatifs u et t tels que

$$\omega(k) = u2^t\ , \qquad \omega(\ell) = (u+1)2^t\ .$$

Désignons par $\lambda(s)$ l'élément de Δ tel que $\omega(\lambda(s)) = 2^s$.

LEMME 2. - On a

$$\sum_{(k,\ell)\in L_s} \int (N(k\ ,\ \ell\ ;\ x) - \Phi(k\ ,\ \ell))^2\ d\mu(x) = O(s2^s)\ .$$

Preuve. - Pour une intégrale, on a

$$\begin{aligned}\int (N(k\ ,\ \ell\ ;\ x) &- \Phi(k\ ,\ \ell))^2\ d\mu(x)\\ &= \int N^2(k\ ,\ \ell\ ;\ x)\ d\mu(x) - 2\Phi(k\ ,\ \ell) \int N(k\ ,\ \ell\ ;\ x)\ d\mu(x) + \Phi^2(k\ ,\ \ell)\\ &= O(\Phi(k\ ,\ \ell))\ .\end{aligned}$$

Pour t fixé $(0 \leq t \leq 1)$, soit $L_{s,t}$ l'ensemble des couples $(k, \ell) \in L_s$ tels que $\omega(k)$ et $\omega(\ell)$ soient de la forme $\omega(k) = u2^t$, $\omega(\ell) = (u+1)2^t$.

$$\sum_{(k,\ell)\in L_{s,t}} \Phi(k, \ell) = \Phi(\lambda(s)) = O(2^s) ,$$

donc en sommant sur t, puisque $0 \leq t \leq s$:

$$\sum_{(k,\ell)\in L_s} \Phi(k, \ell) = O(s2^s) ,$$

d'où le lemme.

LEMME 3. - Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une suite U_s de sous-ensembles intégrables de E, tels que $\mu(U_s) = O(\frac{1}{s^{1+\varepsilon}})$, et que l'on ait l'implication :

$$x \notin U_s , \quad h \in \Delta \quad \text{et} \quad \omega(h) \leq 2^s \quad \Longrightarrow \quad |N(h ; x) - \Phi(h)| \leq s^{(3+\varepsilon)/2}\, 2^{s/2} .$$

Preuve. - Soit $U_s = \{x \in E \mid \sum_{(k,\ell)\in L_s} (N(k, \ell ; x) - \Phi(k, \ell))^2 > s^{2+\varepsilon}\, 2^s\}$.
Le lemme précédent entraîne $\mu(U_s) = O(\frac{1}{s^{1+\varepsilon}})$.

D'autre part, soit $h \in \Delta$ tel que $\omega(h) \leq 2^s$, et soit le développement 2-adique : $\omega(h) = \sum_{i=0}^{s} a_i\, 2^i$.

Soit $i_1 < i_2 < \ldots < i_q$ la suite des i tels que $a_i = 1$, et posons pour $0 \leq r \leq q$:

$$J_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad J_r = \sum_{i=0}^{i_r} a_i\, 2^i \qquad \text{si } r > 0 .$$

Soit $j_r \in \Delta$ tel que $\omega(j_r) = J_r$, on a

$$N(h ; x) - \Phi(h) = \sum_{r=1}^{q} (N(j_{r-1}, j_r ; x) - \Phi(j_{r-1}, j_r)) ,$$

d'où par l'inégalité de Schwarz :

$$(N(h ; x) - \Phi(h))^2 \leq q \sum_{r=1}^{q} (N(j_{r-1}, j_r ; x) - \Phi(j_{r-1}, j_r))^2 .$$

Comme $(j_{r-1}, j_r) \in L_s$ $\forall r$, on a donc si $x \notin U_s$:

$$\sum_{r=1}^{q} (N(j_{r-1}, j_r ; x) - \Phi(j_{r-1}, j_r))^2 \leq s^{2+\varepsilon}\, 2^s ,$$

et puisque $q \leqslant s$:

$$|N(h\ ;\ x) - \Phi(h)| \leqslant s^{(3+\varepsilon)/2}\ 2^{s/2} \quad .$$

Fin de la démonstration du lemme 1. - Comme la série $\sum_{s=1}^{\infty} \mu(U_s)$ est convergente, pour μ-presque tout x , il existe $s_0(x)$ tel que $s \geqslant s_0 \implies x \notin U_s$. Soit alors $h \in \Lambda$, suffisamment grand pour que $\omega(h) \geqslant 2^{s_0}$ et soit s l'entier défini par $2^{s-1} < \omega(h) \leqslant 2^s$. Comme on a $s \geqslant s_0$, x n'appartient pas à U_s et le lemme précédent donne alors

$$|N(h\ ;\ x) - \Phi(h)| \leqslant s^{(3+\varepsilon)/2}\ 2^s = O((\Phi(h))^{1/2}(\log \Phi(h))^{(3+\varepsilon)/2}) \ .$$

Le lemme 1 est donc démontré pour $h \in \Delta$, et ε donné.

Prenons comme ensemble Δ l'ensemble Δ' ou Δ'' suivant :

$$\Delta' = \{h \in \underset{\sim}{N} \mid h > 0 \ ;\ \omega(h-1) < \omega(h)\} \cup \{0\}$$

$$\Delta'' = \{h \in \underset{\sim}{N} \mid 1 \leqslant \omega(h) < \omega(h+1)\} \cup \{0\} \quad .$$

L'estimation du lemme est alors prouvée pour μ-presque tout x , pour $h \in \Delta' \cup \Delta''$ car l'ensemble des x pour lesquels on a (e) pour $h \in \Delta' \cup \Delta''$ est l'intersection des deux sous-ensembles de complémentaires μ-négligeables pour lesquels on a (e) pour $h \in \Delta'$ et pour $h \in \Delta''$ respectivement. Le lemme est alors démontré pour h quelconque, car il existe $h' \in \Delta'$ et $h'' \in \Delta''$ tels que :

$$h' \leqslant h \leqslant h'' \qquad \text{et} \qquad \omega(h') = \omega(h) = \omega(h'')$$

donc

$$\Phi(h') \leqslant \Phi(h) \leqslant \Phi(h'') \leqslant \Phi(h') + 1$$

et comme

$$N(h'\ ;\ x) \leqslant N(h\ ;\ x) \leqslant N(h''\ ;\ x)$$

l'estimation pour $N(h'\ ;\ x)$ et $N(h''\ ;\ x)$ donne celle de $N(h\ ;\ x)$.

Le lemme est alors démontré pour $\varepsilon > 0$ donné, il reste le détail de s'assurer qu'on peut trouver un sous-ensemble A de E , de complémentaire μ-négligeable tel qu'on ait le lemme pour tout $x \in A$ et tout $\varepsilon > 0$. Ceci est bien évident, il suffit de prendre l'intersection des sous-ensembles A_n de E pour lesquels on a le lemme pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Démonstration du théorème. - Soit β_n la fonction caractéristique de la boule B_n . On montre que les conditions du lemme 1 sont satisfaites avec les fonctions

β_n et la suite $\mu(B_n)$. Comme dans le lemme 1, on pose :

$$N(k\ ,\ \ell\ ;\ x) = \sum_{k<n\leqslant\ell} \beta_n(x)$$

$$\Phi(k\ ,\ \ell) = \sum_{k<n\leqslant\ell} \mu(B_n)\quad .$$

LEMME 4. - <u>On a, pour tout couple</u> $(k\ ,\ \ell)$:

(i) $\int N(k\ ,\ \ell\ ;\ x)\ d\mu(x) = \Phi(k\ ,\ \ell)$;

(ii) $\int N^2(k\ ,\ \ell\ ;\ x)\ d\mu(x) \leqslant \Phi^2(k\ ,\ \ell) + (2C + 1)\ \Phi(k\ ,\ \ell)$.

<u>Preuve.</u> - (i) est évidente. Pour (ii) on utilisera le lemme suivant, dont la démonstration est claire :

LEMME 5. - <u>Soit</u> $(\alpha_n)_{n\geqslant1}$ <u>une suite de nombres réels non négatifs tels qu'il existe deux constantes non négatives</u> ρ <u>et</u> C <u>telles que</u> :

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \leqslant \rho N + C \qquad \forall\ N > 0\quad .$$

<u>Soit</u> $(\varepsilon_n)_{n\geqslant1}$ <u>une suite décroissante de nombres réels positifs. On a</u>

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\ \varepsilon_n \leqslant \rho \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n + C\varepsilon_1\quad .$$

Pour obtenir l'inégalité (ii), on écrit alors :

$$N^2(k\ ,\ \ell\ ;\ x) = N(k\ ,\ \ell\ ;\ x) + 2 \sum_{k<m<n\leqslant\ell} \beta_n(x)\ \beta_m(x)\quad ,$$

d'où

$$\int N^2(k\ ,\ \ell\ ;\ x)\ d\mu(x) = \Phi(k\ ,\ \ell) + 2 \sum_{k<m<n\leqslant\ell} \mu(B_n \cap B_m)\quad .$$

L'intersection $B_n \cap B_m$ est non vide si, et seulement si, l'une des boules B_n , B_m est incluse dans l'autre, c'est-à-dire puisque $\mu(B_n) \leqslant \mu(B_m)$ et que le support de μ est E , si, et seulement si, on a $B_n \subset B_m$; d'où

$$\sum_{k<m<n\leqslant\ell} \mu(B_n \cap B_m) = \sum_{k<m<\ell} \Big(\sum_{m<n\leqslant\ell} \beta_m(u_n)\ \mu(B_n)\Big)\quad .$$

La condition de répartition sur la suite (u_n) donne :

$$\sum_{m<n\leqslant\lambda} \beta_m(u_n) \leqslant (\lambda - m)\ \mu(B_m) + C \qquad \forall\ \lambda > m\quad .$$

Puisque la suite $(\mu(B_n))$ est décroissante, on a d'après le lemme 5, pour m fixé :

$$\sum_{m<n\leq \ell} \beta_m(u_n)\, \mu(B_n) \leq \mu(B_m) \sum_{m<n\leq \ell} \mu(B_n) + C\mu(B_{m+1}) \quad ,$$

d'où

$$\sum_{k<m<n\leq \ell} \mu(B_n \cap B_m) \leq \sum_{k<m<n\leq \ell} \mu(B_m)\, \mu(B_n) + C \sum_{k<m\leq \ell} \mu(B_m)$$

d'où résulte :

$$\int N^2(k\ ,\ \ell\ ;\ x)\ dx \leq \Phi^2(k\ ,\ \ell) + (2C + 1)\ \Phi(k\ ,\ \ell)$$

ce qui achève la démonstration.

Remarques.- Il est clair que toute suite $(u_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E satisfaisant à la condition de répartition (d) est μ-répartie (mais pas nécessairement à discrépance finie). D'autre part, si μ est la mesure de E telle que toutes les boules de même rayon aient la même mesure, il est clair que si on a la propriété P, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est nécessairement équirépartie : il suffit pour le voir de prendre des boules B_n de même rayon. Par contre, nous ignorons ce qu'il en est si μ est une autre mesure.

En sens inverse, il est aisé de voir qu'on peut affaiblir légèrement la condition (d), de manière à conserverla propriété P. En effet, il suffit par exemple que :

1° La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ soit μ-répartie.

2° Pour μ-presque tout x , il existe une boule $B = B(x)$ telle que la suite $(u_n)_{n\geq 1, u_n\in B}$ vérifie la condition (d) dans B avec la mesure $\frac{1}{\mu(B)}\mu_B$ (μ_B désigne la trace sur B de la mesure μ , et par l'expression : "la suite $(u_n)_{n\geq 1, u_n\in B}$ " nous entendons la suite $u \circ \varphi$ où φ est la bijection croissante de $\mathbb{N}^*$ sur l'ensemble des entiers positifs n tels que $u_n \in B$).

Naturellement, cette condition est effectivement plus faible que (d), par exemple la suite d'éléments de Z_p : $u_n = n$ si n n'est pas une puissance de p et $u_{p^e} = 1 \ \forall\ e \in \mathbb{N}$, a la propriété P avec la mesure de Haar (du fait que la suite des entiers est très bien répartie et possède donc la propriété P).

Nous ne savons pas si on peut trouver des conditions plus faibles (autres que celles déduites trivialement de (d)) pour avoir P. Cependant, il n'est pas suffisant que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ soit μ-répartie. Disons avec J. LESCA [2] qu'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E est " μ-eutaxique" si pour toute suite de boules B_n , telle que $u_n \in B_n$, que la suite $\mu(B_n)$ soit décroissante et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ divergente, l'inéquation en n, $x \in B_n$, a une infinité de solutions pour μ-presque tout x. D'autre part, sur l'anneau $\mathcal{Z} = F_q[T]$ des polynômes à une indéterminée sur un corps fini, considérons le bon ordre (ensembliste) suivant : on se donne un bon ordre $\preccurlyeq$ sur l'ensemble des éléments de F_q, pour lequel 0 est le plus petit élément et $\mathcal{Z}$ est alors ordonné lexicographiquement, c'est-à-dire que si f et $g \in \mathcal{Z}$, on a $f \preccurlyeq g$ si $f = g$ ou bien si, posant :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$$

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n$$

et désignant par n_0 le plus grand entier n tel que $a_n \neq b_n$, on a $a_{n_0} < b_{n_0}$.

Soit alors $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite croissante des éléments de $\mathcal{Z}$. En d'autres termes, on se donne une bijection φ de l'ensemble $\{0, 1, \dots, q-1\}$ sur F_q telle que $\varphi(0) = 0$ et (f_n) est la suite

$$f_n = \Phi(n)$$

où Φ est la bijection de $\underset{\sim}{N}$ sur $\mathcal{Z}$, définie de la façon suivante :

Si le développement q-adique de l'entier n est

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k q^k \qquad \alpha_k \in \{0, \dots, q-1\} \quad (\alpha_k = 0 \text{ à partir d'un certain rang}),$$

$$\Phi(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\alpha_k) T^k \quad .$$

LESCA démontre alors ([2]), que pour tout $X \notin \mathfrak{F}$, la suite $(\mathcal{H}_0(f_n X))$ est équirépartie dans le groupe compact $\mathfrak{M}_0$ (pour les notations, nous renvoyons à [3]). Il démontre que par contre la suite $(\mathcal{H}_0(f_n X))_{n\geq 1}$ est eutaxique (pour la mesure de Haar) si, et seulement si, le développement en fraction continue de X est à quotients partiels bornés, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(\mathcal{H}_0(f_n X))_{n\geq 1}$ soit à discrépance finie. Comme la propriété $P((u_n), \mu)$ entraîne que (u_n) est μ-eutaxique, cela fournit donc un contre-exemple fort pour montrer que la μ-répartition ne suffit pas pour avoir P. Signalons pour terminer que, même si μ est la mesure de Haar, LESCA trouve des suites eutaxiques qui ne sont pas équiréparties, ce qui montre que la propriété d'eutaxie diffère de la propriété P.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-160 (Thèse Sc. Math. Paris, 1963).

[2] LESCA (Jacques). - Thèse (À soutenir et à paraître) et autres papiers non publiés.

[3] MATHAN (Bernard de). - Théorème de Koksma dans un corps de séries formelles sur un corps fini, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 9e année, 1967/68, n° 4, 12 p.

[4] SCHMIDT (Wolfgang). - A metrical theorem in diophantine approximation, Canadian J. of Math., t. 12, 1960, p. 619-631.