Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Marie-Claude Durix

Prolongement multiforme des fonctions analytiques dans les corps valués non archimédiens

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, nº 2 (1966-1967), exp. nº 20, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_2_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
8e année, 1966/67, n° 20

8 mai 1967

PROLONGEMENT MULTIFORME DES FONCTIONS ANALYTIQUES DANS LES CORPS VALUÉS NON ARCHIMÉDIENS

par Marie-Claude DURIX

Soit k un corps valué ultramétrique complet, algébriquement clos. Considérons la série de Taylor sur k :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\, x^i \quad ,$$

de cercle de convergence C .

On ne peut pas prolonger analytiquement $f(x)$ par la méthode de Weierstrass, car si $a \in C$, le domaine de convergence de $f(x + a)$ est toujours C .

M. KRASNER a trouvé une autre méthode, en employant un certain type de domaines D contenus dans le "projectivisé" $k' = k \cup \{\infty\}$ de k , et en définissant les fonctions analytiques de support D comme limites uniformes de fractions rationnelles sans pôles dans le domaine D .

Toutefois, le prolongement analytique localement uniforme ne fournit que des fonctions globalement uniformes ; si l'on veut obtenir des fonctions analytiques multiformes, il faut se servir d'éléments analytiques plus généraux.

Mais on constate qu'une série de Taylor se comporte sur un sous-cercle circonférencié de son cercle de convergence, dans une certaine mesure, comme un polynôme. Cela suggère que tout prolongement analytique multiforme pourrait se faire à l'aide des seules fonctions algébriques des fonctions analytiques uniformes.

La preuve complète de ce fait demanderait la démonstration d'une "hypothèse de monodromie", mais il peut être vérifié directement dans certains cas, par exemple pour les fonctions inverses.

1. Rappels et définitions.

DÉFINITION 1. - Soit D un sous-ensemble de k' de diamètre R , et soit $a \in D$, $a \neq \infty$. D est dit ultra-ouvert en a si, quel que soit $r \leqslant R$, il n'y a qu'un nombre fini de distances $d(a\ , y) \leqslant r$ telles que $y \notin D$.

DÉFINITION 2. - Le sous-ensemble D de k' est dit quasi-connexe s'il contient au moins deux points et s'il est ultra-ouvert en chacun de ses points distincts de ∞ .

Propriétés.

1° Le transformé d'un ensemble quasi-connexe par une homographie non singulière est quasi-connexe.

2° L'intersection d'un nombre fini d'ensembles quasi-connexes est quasi-connexe ou vide.

3° La réunion d'une famille enchaînée d'ensembles quasi-connexes est quasi-connexe.

DÉFINITION 3. - D étant un ensemble quasi-connexe contenu dans un corps algébriquement clos k, la fonction

$$f : D \to k$$

est dite un élément analytique de support D, s'il existe une suite

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

de fractions rationnelles appartenant à $k(x)$ et sans pôles sur D, qui converge uniformément vers $f(x)$ sur D.

THÉORÈME D'UNICITÉ. - Soient f et f' deux éléments analytiques de supports D, D' non disjoints, et soit $\Delta \subseteq D \cap D'$ un ensemble de points, ayant un point limite $a \in D \cap D'$, et tel que, pour tout x de Δ, $f(x) = f'(x)$. Alors f et f' coïncident partout sur $D \cap D'$.

DÉFINITION 4. - E étant un sous-ensemble de k', une fonction

$$F : E \to k$$

sera appelée fonction analytique localement uniforme sur E, s'il existe une famille enchaînée I d'éléments analytiques f de k telle que :

1° D_f désignant le support d'un élément analytique f, les D_f (où f parcourt I) forment un recouvrement de E ;

2° Si $f, f' \in I$ sont tels que $D_f \cap D_{f'} \neq \emptyset$, f et f' se prolongent ;

3° Pour tout $a \in E$, $F(a)$ est la valeur commune que prennent en a tous les $f \in I$ tels que $a \in D_f$.

On démontre que toute fonction localement uniforme est uniforme, et que l'analycité est préservée par les opérations rationnelles : addition, dérivation, inversion, substitution. La structure de l'ensemble des fonctions analytiques uniformes sur D est donc bien connue.

DÉFINITIONS 5. - Soit D un sous-ensemble quasi-connexe de k'. On appellera :

- <u>Anneau analytique local de</u> D, l'anneau A_D formé par les fonctions analytiques uniformes sur D ;
- <u>Corps analytique local de</u> D, le corps-quotient K_D de A_D ;
- R_D, <u>la clôture algébrique de</u> K_D.

Chaque élément ω de R_D est un zéro de son polynôme minimal $f(t) \in K_D[t]$, qui est unitaire et irréductible dans K_D.

Un <u>élément analytique multiforme de base</u> D, sera l'ensemble

$$\{\omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_n\}$$

des zéros d'un polynôme unitaire irréductible $f(t) \in K_D[t]$.

On peut le caractériser par le couple $(D , f(t))$, et ce couple sera aussi appelé, par abus de langage, un <u>élément analytique multiforme</u>.

Nous allons chercher à mettre en évidence les zéros d'un tel polynôme $f(t)$, et à établir une correspondance entre $f(t)$ et ses zéros.

2. Correspondance entre un élément multiforme de base D et un élément multiforme de base $D' \subset D$.

Soient D et D' deux ensembles quasi-connexes tels que $D \supset D'$.

Si f est une fonction analytique sur D, sa restriction f' à D' en est une aussi.

Considérons l'application

$$\eta_{D,D'} : f \to f' = f|D' ;$$

c'est une injection de A_D dans $A_{D'}$, car, en vertu du théorème d'unicité,

$$f' = g' \quad \text{implique} \quad f = g .$$

Ce n'est pas une surjection (car des fonctions analytiques peuvent être définies sur D' sans l'être sur D), mais c'est un monomorphisme d'anneaux.

On peut prolonger cette injection d'une manière unique en un monomorphisme, qui sera noté de même $\eta_{D,D'}$, de K_D dans $K_{D'}$, et même de $K_D[t]$ dans $K_{D'}[t]$.

Soit $K_{D'}^D$ l'image par $\eta_{D,D'}$ de K_D, et soit $R_{D'}^D$ la clôture algébrique de $K_{D'}^D$,

$$\eta_{D,D'} : K_D \to K_{D'}^D \subset K_{D'} ,$$

donc

$$R^D_{D'} \subset R_{D'} \ .$$

$K_D[t]$ est isomorphe à $K^D_{D'}[t]$ dans l'isomorphisme $\eta_{D,D'}$, en conséquence, on a le théorème suivant.

THÉORÈME FONDAMENTAL 1. - Les clôtures algébriques R_D et $R^D_{D'}$ de K_D et $K^D_{D'}$ sont isomorphes dans un isomorphisme λ qui prolonge $\eta_{D,D'}$ (et qui n'est pas unique, en général).

$$\lambda : R_D \to R^D_{D'} \subset R_D \ .$$

Appliquons le monomorphisme λ à un élément analytique $(D , f(t))$, soit à l'ensemble des zéros de $f(t)$:

$$\{\varphi_1 , \varphi_2 , \dots , \varphi_n\} \ .$$

L'image de cet élément par λ est

$$\{\lambda\varphi_1 , \lambda\varphi_2 , \dots , \lambda\varphi_n\} \ ,$$

c'est l'ensemble des zéros du polynôme

$$f'(t) = \eta_{D,D'} f(t) \in K^D_{D'}[t] \subseteq K_{D'}[t] \ ;$$

$f'(t)$, irréductible dans $K^D_{D'}$ comme $f(t)$ l'est dans K_D , n'est pas nécessairement irréductible dans $K_{D'}$, car il n'y a aucune raison pour que $K^D_{D'}$ soit algébriquement clos dans $K_{D'}$.

En général, $f'(t)$ se décompose dans $K_{D'}$ en un produit de polynômes $f'_i(t)$ unitaires et irréductibles, et l'élément analytique $(D , f(t))$ prolonge tous les éléments analytiques $(D' , f'_i(t))$.

Les polynômes $f'_i(t)$ ont un degré inférieur à celui de $f(t)$: nous allons chercher un domaine D' où la fonction $f'(t)$ se décompose en facteurs qui n'aient qu'une seule racine, de manière à ce que les éléments analytiques $(D' , f'_i(t))$ soient des fonctions uniformes sur D' .

3. Cas particulier : D' est un cercle.

Supposons que D soit un cercle de centre a et de rayon r . Alors :

1° A_D est l'anneau des séries de Taylor en $(x - a)$ qui convergent sur D : on le notera $A_{a,r}$;

2° K_D est le corps des fonctions méromorphes sur D : on le notera $K_{a,r}$;

3° R_D est le corps des fonctions algébriques par rapport aux fonctions méromorphes sur D : on le notera $R_{a,r}$.

Si $r' < r$, $C(a , r') \subset C(a , r)$.

On écrira $\eta^{(a)}_{r,r'}$ le monomorphisme $\eta_{C(a,r),C(a,r')}$.

La famille des $A_{a,r}$ (de paramètre $r > 0^+$) organisée par les injections $\eta^{(a)}_{r,r'}$ $(0^+ < r' < r)$ forme un système injectif. Sa limite injective A_a sera dite <u>l'anneau analytique local en</u> a . A_a est l'anneau des séries de Taylor en $(x - a)$ de rayon de convergence non nul.

La famille des $K_{a,r}$ organisée de même par les injections $\eta^{(a)}_{r,r'}$ forme elle aussi un système injectif. Sa limite injective K_a sera appelée <u>le corps analytique local en</u> a : c'est le corps des fonctions méromorphes dans quelque cercle ouvert de centre a .

On peut prolonger le monomorphisme $\eta^{(a)}_{r,r'}$ par des monomorphismes (d'après le théorème fondamental 1)

$$\lambda_{r,r'} : R_{a,r} \to R_{a,r'} ,$$

de manière que, si $r'' < r' < r$, on ait

$$\lambda_{r,r''} = \lambda_{r'r''} . \lambda_{r,r'} .$$

Les $R_{a,r}$ forment alors un système injectif ; leur limite injective R_a est la clôture algébrique de K_a .

Il est facile de voir que, plus le diamètre de D' est petit, plus il y a de chances que le correspondant $f'(t) \in K^D_{D'}[t]$ de $f(t) \in K_D[t]$ se décompose en polynômes qui n'aient qu'une racine. Nous allons donc chercher un monomorphisme qui envoie K_D sur un ensemble $K_{a,r}$, et même sur un ensemble K_a .

Soit $a \in D$, et soit r_1 la plus petite des distances $d(a , y)$ telle que $y \notin D$.

Quel que soit $r < r_1$, $C(a , r) \subseteq D$. Il existe donc un monomorphisme unique

$$\eta_{D,C(a,r)} : K_D \to K_{a,r} ,$$

et si $r' < r$, on a

$$\eta_{D,C(a,r')} = \eta_{r,r'} \eta_{D,C(a,r)} .$$

On pourra donc définir, <u>d'une seule manière</u>, le monomorphisme $\eta_{D,a}$ de K_D dans K_a , limite inductive des $K_{a,r}$.

On va noter :

1° K_a^D , l'image de K_D par $\eta_{D,a}$;

2° R_a^D , la clôture algébrique de K_a^D .

En application du théorème fondamental 1, de même qu'on pouvait prolonger le monomorphisme $\eta_{D,D'}$ en un monomorphisme de R_D dans $R_{D'}$, on pourra prolonger, de multiples manières, $\eta_{D,a}$ par un monomorphisme λ de R_D dans R_a , et l'image de R_D par l'un de ces monomorphismes est toujours R_a^D ,

$$\eta_{D,a} : K_D \to K_a^D \subset K_a \quad ,$$

$$\lambda : R_D \to R_a^D \subset R_a \quad .$$

Nous allons maintenant essayer d'utiliser l'un de ces monomorphismes pour envoyer $f(t)$ dans un ensemble où il se décompose en facteurs qui n'aient qu'une racine.

THÉORÈME FONDAMENTAL 2. - Etant donné un élément analytique $(D , f(t))$, il existe toujours des points $a \in D$ tels que $\eta_{D,a} f(t)$ se décompose dans K_a en facteurs qui n'aient qu'une racine.

Démonstration. - $f(t)$ est un polynôme unitaire irréductible de $K_D[t]$.

Si la caractéristique p' de k' n'est pas nulle, il se peut que $f(t)$ ait des racines multiples, $f(t)$ est alors un polynôme en $t^{p'}$. On posera donc

$$f(t) = g(t^q) \quad ,$$

où $g(t)$ est un polynôme séparable, unitaire, irréductible, q est une puissance de p' $(q = 1$, si $p' = 0)$.

$g(t) \in K_D[t]$, $g(t)$ est un polynôme en t , mais une fonction méromorphe par rapport à x ; le discriminant de $g(t)$ est une fonction analytique sur D .

DÉFINITION. - Un point a de D tel que a^q ne soit pas un zéro du discriminant de $g(t)$ sera dit quasi-simple.

Prenons un point a de D quasi-simple (il en existe toujours car les zéros du discriminant non nul de $g(t)$, qui est une fonction analytique sur D , ne peuvent avoir aucun point limite sur D , en vertu du théorème d'unicité). Si $x = a$, $g(t)$ n'a pas de racine multiple en t .

Appliquons à $g(t)$ les monomorphismes

$$\eta_{D,C(a,r)} : K_D \to K_{a,r} \quad .$$

On obtient

$$\eta_{D,C(a,r)}\ g(t) = g_0(x - a) + g_1(x - a)t + \dots + g_{n-1}(x - a)t^{n-1} + t^n \quad ,$$

où $g_i(x - a)$ $(0 \leqslant i < n)$ est un élément de $K_{a,r}$, donc, pour r assez petit, une série de Taylor en $(x - a)$, convergente si $|x - a| < r$.

Le polynôme $\eta_{D,C(a,r)}\ g(t) = g'(t)$ est irréductible et unitaire. D'après le corollaire du lemme de Hensel, tous ses coefficients sont de module inférieur ou égal à 1 .

Considérons le polynôme $\overline{g'(t)}$, classe de $g'(t)$,

$$\overline{g'(t)} = \overline{g_0(x - a)} + \overline{g_1(x - a)}t + \dots + t^n \quad .$$

Pour $|x - a|$ assez petit, $\overline{g_i(x - a)} = \overline{g_i(0)}$ $(0 \leqslant i < n)$,

$$\overline{g'(t)} = \overline{g_0(0)} + \overline{g_1(0)}t + \dots + t^n \quad .$$

Ce polynôme est un polynôme unitaire de $k[t]$. Comme a est quasi-simple, il n'a pas de racine multiple. k étant algébriquement clos, il se décompose en un produit de facteurs du 1er degré ; d'après le lemme de Krasner, il en sera de même pour $g'(t)$,

$$g'(t) = (f_1(x - a) - t)(f_2(x - a) - t) \dots (f_n(x - a) - t) \quad ,$$

où $f_1\ f_2 \dots f_n$ sont des séries de Taylor en $(x - a)$.

Donc $\eta_{D,a}\ f(t)$ se décompose lui aussi,

$$\eta_{D,a}\ f(t) = (f_1(x - a) - t^q)(f_2(x - a) - t^q) \dots (f_n(x - a) - t^q) \quad .$$

Les racines $\varphi_i^{(a)}$ de $\eta_{D,a}\ f(t)$ sont des racines q-ièmes des $f_i(x - a)$ (chaque $f_i(x - a)$ a une racine q-ième unique dans K_a , car p' est la caractéristique de k'). Ces racines $\varphi_i^{(a)}$ sont donc des séries de Taylor en $(x - a)^{1/q}$, et $[D\ ,\ f(t)]$ prolonge chacune de ces séries.

Si on note $\hat{K}_a$ le plus petit surcorps parfait de K_a (c'est le corps fixe de K_a), on remarque que $\varphi_i^{(a)} \in \hat{K}_a$.

On peut donc passer par un monomorphisme λ bien choisi, de $[D\ ,\ f(t)]$ à un élément $\varphi^{(a)}$ de R_a . On va essayer maintenant de relier un élément $\varphi^{(a)}$ de R_a à un élément $\varphi^{(b)}$ de R_b , où a et b sont deux points de D , en les prolongeant par un même élément analytique $[D\ ,\ f(t)]$.

4. Chemins de a à b .

Soit D un ensemble quasi-connexe, et soient a et b deux points de D , distincts ou confondus.

Soit λ un isomorphisme de R_D sur R_a^D , soit μ un isomorphisme de R_D sur R_b^D ; alors $\mu\lambda^{-1}$ est un isomorphisme de R_a^D sur R_b^D .

DÉFINITION. - Si $\varphi^{(a)} \in R_a^D$, alors

$$\varphi^{(b)} = \mu\lambda^{-1} \varphi^{(a)} \in R_b^D \quad ,$$

φ_b sera appelé le prolongement de φ_a par le chemin $\mu\lambda^{-1}$ à travers D .

Ce chemin permet de passer d'une fonction définie sur un cercle de centre a à une fonction définie sur un cercle de centre b , en les considérant toutes deux comme prolongées par un même élément analytique $(D , f(t))$.

DÉFINITION. - On appellera chemin de départ $(a , \varphi^{(a)})$, la structure suivante :

1° Une chaîne $D_1 , D_2 , \dots , D_n$ de domaines quasi-connexes tels que $a \in D_1$;
2° La suite $a = a_0 , a_1 , \dots , a_n = b$ de points tels que,

$$a_i \in D_i \cap D_{i+1} , \qquad \text{pour tout } i = 1 , 2 , \dots , n - 1 ,$$

et que

$$a_n = b \in D_n \quad ;$$

3° La suite $\xi_1 , \xi_2 , \dots , \xi_n$, où ξ_i est un chemin de a_{i-1} à a_i à travers D_i .

DÉFINITION. - Ce chemin sera dit praticable pour $\varphi^{(a)}$, si l'on a

$$\xi_1 \cdot \varphi^{(a)} \in R_{a_1}^{D_2} , \qquad \xi_2 \cdot \xi_1 \, \varphi^{(a)} \in R_{a_2}^{D_3} \quad ,$$

et, en général, pour $i < n$,

$$\xi_i \cdot \xi_{i-1} \dots \xi_1 \, \varphi^{(a)} \in R_{a_i}^{D_{i+1}} \quad .$$

Alors $\varphi^{(b)} = \xi_n \, \xi_{n-1} \dots \xi_1 \, \varphi^{(a)}$ a un sens, et $(b , \varphi^{(b)})$ est appelé l'arrivée du chemin considéré.

DÉFINITION. - Deux chemins de départ $(a , \varphi^{(a)})$ sont dits équivalents, si leurs arrivées sont les mêmes.

DÉFINITION. - La longueur du chemin précédent sera le maximum des diamètres des D_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

5. Construction d'une surface de Riemann.

Nous avons vu que, pour tout polynôme irréductible $f(t) \in K_D[t]$, il existe des points a quasi-simples dans D . Pour obtenir toutes les fonctions analytiques et construire leurs surfaces de Riemann, il suffit donc de prendre comme point de départ tous les couples $(a , \varphi^{(a)})$, où a est un point arbitraire de k , et $\varphi^{(a)}$ un élément arbitraire de $\hat{K}_a$.

On peut maintenant définir la surface de Riemann D_F du prolongement F de $\varphi^{(a)} \in \hat{K}_a$: son support est l'ensemble des $(b , \varphi^{(b)})$ qu'on peut atteindre à partir de $(a , \varphi^{(a)})$ par des chemins praticables.

b sera dit la base de $(b , \varphi^{(b)})$, et on définira F comme une fonction sur D_F par

$$F[b , \varphi^{(b)}] = \varphi^{(b)}(b) \quad .$$

Propriétés.

1° On définit la distance

$$d[(b , \varphi^{(b)}) , (c , \varphi^{(c)})] \quad ,$$

comme l'infimum sur la droite semi-réelle des diamètres des chemins de départ $(b , \varphi^{(b)})$ qui aboutissent à $(c , \varphi^{(c)})$. Cette distance prend les valeurs semi-réelles d'espèces 0 ou $+$ et obéit à l'inégalité ultramétrique ; elle permet de définir la topologie sur D_F .

2° Soit $(b , \varphi^{(b)}) \in D_F$ tel que b soit quasi-simple ; alors $\varphi^{(b)} \in \hat{K}_b$. $\varphi^{(b)}$ peut être considéré comme un zéro d'un élément analytique $[D , f(t)]$ tel que $b \in D$. Alors, pour deux points x et y de D , le passage de $(x , \varphi^{(x)})$ à $(y , \varphi^{(y)})$ se fait par un chemin à travers le plus petit sous-ensemble quasi-connexe de D qui contienne x et y ,

$$d[(x , \varphi^{(x)}) , (y , \varphi^{(y)})] = d(x , y)$$

est le diamètre de ce sous-ensemble.

Il existe donc un voisinage de $(b , \varphi^{(b)})$ tel que l'application

$$(x , \varphi^{(x)}) \to x$$

en est une homéomorphie sur sa base.

3° Par contre, si $\varphi^{(b)} \notin \widehat{K_b}$, la structure de D_F autour de $(b , \varphi^{(b)})$ ressemble à celle d'un paquet de feuillets recollés au voisinage de b ; en b , F prend un certain nombre de fois la valeur $\varphi^{(b)}(b)$. Puisque $\varphi^{(b)} \notin \widehat{K_b}$, $\varphi^{(b)}$ est racine d'un polynôme irréductible de $K_D[t]$, qui admet des racines multiples pour $x = b$. Pour passer de l'une à l'autre des racines de ce polynôme, il faut employer les éléments du groupe de Galois de $K_b(\varphi^{(b)})/K_b$, qui n'est pas cyclique en général ; le "recollement" dans l'analyse valuée sera plus compliqué que dans le cas complexe.

DÉFINITION. - On dira que les prolongements de $(a , \varphi^{(a)})$ et de $(b , \psi^{(b)})$ ont les mêmes surfaces de Riemann, s'il existe un prolongement $(a , \psi^{(a)})$ de $(b , \psi^{(b)})$ tel que :

1° Tout chemin praticable à partir de $(a , \varphi^{(a)})$, l'est aussi à partir de $(a , \psi^{(a)})$;

2° Deux chemins praticables à partir de $(a , \varphi^{(a)})$, aboutissent en même temps à une même arrivée pour $(a , \varphi^{(a)})$ et $(a , \psi^{(a)})$.

Avec ces conventions, les fonctions analytiques sur une surface de Riemann D forment un anneau A_D .

Le corps quotient K_D de A_D est dit le corps des fonctions méromorphes sur D . L'analycité sur D est aussi préservée par dérivation et convergence uniforme.

6. Justification.

Cette méthode sera suffisante, si on peut montrer qu'un prolongement plus large ne peut pas se faire par l'emploi direct des courbes analytiques irréductibles $\subseteq k'^n$, de dimension 1 au sens de Tate.

Or, étant donnée une telle variété analytique, on peut montrer que :

1° Au voisinage de chacun de ses points, $A = (a , b)$, la variété analytique est algébrique sur K_a (ce qui permet de représenter chaque point sous la forme $(a , \varphi^{(a)})$ où $\varphi^{(a)} \in R_a$) ;

2° La projection de la variété sur sa première coordonnée peut être recouverte par une famille enchaînée d'ensembles quasi-connexes D_α , telle qu'il existe au moins une partie de la variété de projection D_α , qui soit algébrique sur K_{D_α} .

Toutefois, <u>il n'est pas prouvé que cette méthode permette de relier les points quelconques de la variété</u>. L'hypothèse qu'il en est ainsi est appelée "hypothèse de monodromie".

8. Cas particulier : fonctions inverses.

Il s'agit du cas des fonctions inverses des séries de Taylor, c'est-à-dire des solutions de l'équation

$$f(y) - x = 0 \quad ,$$

où

$$f(y) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \, x^i$$

est une série de Taylor de cercle de convergence C , de rayon de convergence R , et de polygone de Newton P . Nous supposerons que $f(0) = 0$.

On peut considérer trois cas :

1er cas : P a un nombre fini de côtés et se termine par un côté infini L d'ordonnée à l'origine φ , et l'ensemble des valeurs de $f(y)$ est le cercle non circonférencié de centre 0 et de rayon $e^{-\varphi}$.

2° cas : P a un nombre fini de côtés et se termine par un côté infini L d'ordonnée à l'origine φ , et l'ensemble des valeurs de $f(y)$ est le cercle circonférencié de centre 0 et de rayon $e^{-\varphi}$.

3° cas : P a un nombre infini de côtés. Le i-ième côté L_i a pour ordonnée à l'origine φ_i . Soit φ la limite de la suite décroissante des φ_i ; l'ensemble des valeurs de $f(y)$ est le cercle non circonférencié de centre 0 et de rayon $e^{-\varphi}$.

Donc l'équation $f(y) - x = 0$ n'admet de solution que si $|x| < e^{-\varphi}$ (ou $\leqslant e^{-\varphi}$ dans le 2° cas).

Etendons la valuation de k à $k(x)$ en posant, pour un polynôme $\sum_i c_i \, x^i$,

$$\left|\sum_i c_i \, x^i\right| = \max_i \, (|c_i|\,|x|^i) \quad .$$

Soit $\overline{k(x)}$ le complété de $k(x)$ muni de cette valuation, $f(y) - x$ est une série de Taylor à coefficients dans $\overline{k(x)}$.

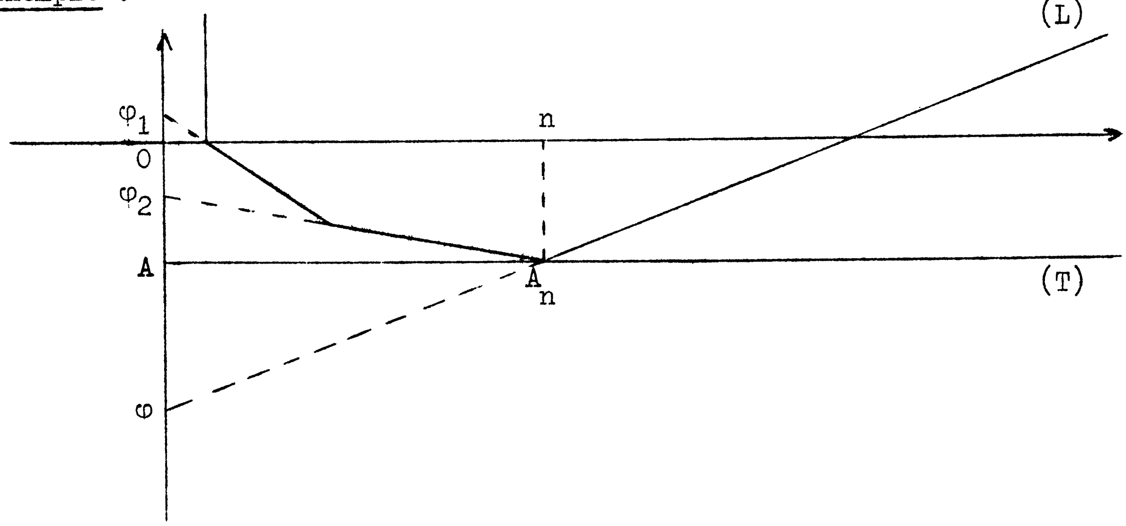
Le terme $- x$ de cette série a comme point représentatif

$$A \begin{cases} 0 \\ - \log|x| \end{cases} .$$

Comme $-\log|x|$ est $\geqslant \varphi$ dans le 2° cas, $> \varphi$ dans les autres, il est possible de mener de A la tangente T au polygone de Newton P de $f(y)$. Soit n l'abscisse du point de contact.

Le polygone de Newton P' de $f(y) - x$ dans le corps $\overline{k(x)}$ s'obtient en remplaçant par le morceau de T de projection $[0 , n]$ la partie de P de projection $[0 , n]$.

<u>Exemple</u> :



On peut donc appliquer à $f(y) - x$ le lemme de Hensel généralisé ; si $|x| = u$,

$$f(y) - x = F_u(y)\; G_u(y) \quad ,$$

où $F_u(y)$ est un polynôme correspondant à AA_n , et $G_u(y)$ une série correspondant au reste du polygone de Newton de $f(y) - x$.

Ces facteurs ont pour coefficients, si l'on choisit convenablement leur coefficient majeur, des séries de puissances en x , qui convergent dans $\overline{k(x)}$, donc qui convergent quand on remplace x par $x' \in k$ tel que $|x'| < u$; ces coefficients sont des séries de Taylor en x à coefficients dans $C(0 , u)$.

D'autre part :

1° $F_u(y)$ est un polynôme en y de degré n , irréductible dans $\overline{k(x)}$, donc dans $K_{0,u}$.

2° Si $u' < u$, $F_{u'}(y)$ est un facteur de $F_u(y)$ dans $K_{0,u'}$.

Les zéros de $F_u(y)$ sont des éléments analytiques multiformes appartenant à $R_{0,u}$, et le prolongement analytique permet de passer à travers $C(0 , u)$ de l'un à l'autre de ces zéros.

D'ailleurs, étant donnés deux zéros y_1 et y_2 de $f(y) - x$, s'ils sont définis sur deux cercles $C(0 , u_1)$ et $C(0 , u_2)$, l'un est un zéro de $F_{u_1}(y)$, l'autre de $F_{u_2}(y)$; si, par exemple, $u_1 \leqslant u_2$, $F_{u_1}(y)$ est un facteur de $F_{u_2}(y)$.

y_1 et y_2 sont tous deux des zéros de $F_{u_2}(y)$; y_1 se prolonge en y_2 par un chemin convenable à travers l'élément analytique multiforme

$$\{C(0 , u_2) , F_{u_2}(y)\} ,$$

et l'hypothèse de monodromie est vraie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du CNRS : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143. 1964. Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1966.

Sur les fonctions analytiques uniformes :

[2] SCHÖBE (W.). - Thèse Sc. math., Univ. Halle, 1930.

Sur les domaines quasi-connexes :

[3] KRASNER (Marc). - Théorie des corps valués, Prolongement analytique dans les corps valués complets : Domaines quasi-connexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 238, 1954, p. 2385-2387.

Démonstration du théorème d'unicité :

[4] KRASNER (Marc). - Théorie des corps valués, Prolongement analytique dans les corps valués complets : Eléments analytiques, préliminaires du théorème d'unicité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 239, 1954, p. 468-470.

[5] KRASNER (Marc). - Théorie des corps valués, Prolongement analytique dans les corps valués complets : Démonstration de la loi d'unicité, fonctions analytiques uniformes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 239, 1954, p. 745-747.

Sur le prolongement uniforme :

[6] KRASNER (Marc). - Théorie des corps valués, Prolongement analytique dans les corps valués complets : Préservation de l'analycité par les opérations rationnelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 1304-1306 ; Théorie des corps valués, Prolongement analytique dans les corps valués complets : Préservation de l'analycité par les opérations rationnelles, quasi-connexité et éléments analytiques réguliers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 1599-1602 ; Théorie des corps valués, Prolongement analytique dans les corps valués complets : Uniformité des fonctions analytiques, l'analycité des fonctions méromorphes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 1996-1999 ; Théorie des corps valués, Prolongement analytique dans les corps valués complets : Préservation de l'analycité par la convergence uniforme et par la dérivation, théorème de Mittag-Löffler généralisé par les éléments analytiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 2570-2573.

[7] KRASNER (Marc). - Théorie des corps valués, Prolongement analytique dans les corps valués complets : Démonstration du théorème de Mittag-Löffler, singularités au bord, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 1285-1288.