Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

MICHEL MENDÈS FRANCE

La fonction « somme des chiffres » et autres fonctions analogues. Une caractérisation des nombres de Pisot

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, nº 1 (1966-1967), exp. nº 8, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_1_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
8e année, 1966/67, n° 8

16 janvier 1967

LA FONCTION "SOMME DES CHIFFRES" ET AUTRES FONCTIONS ANALOGUES
UNE CARACTÉRISATION DES NOMBRES DE PISOT

par Michel MENDÈS FRANCE

1. Introduction.

Lors de sa visite à Paris en octobre 1966, GEL'FOND a établi les résultats suivants [2] :

Soit $g \geqslant 2$ un nombre entier. A chaque entier positif n, on fait correspondre la somme des chiffres de n écrit dans le système à base g. Ceci définit une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ que nous notons f. En symboles, si

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)\, g^k \qquad \text{(somme finie)} \quad ,$$

où $e_k(n)$ prend ses valeurs parmi les chiffres $0 , 1 , \ldots , g - 1$, alors

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) \quad .$$

THÉORÈME A. - *Soient* p *un nombre premier avec* $g - 1$, *et* a, ℓ *et* $m > 0$ *des entiers fixés. Lorsque* x *croît indéfiniment, l'estimation suivante a lieu* :

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \equiv a \pmod p \ ; \ n \equiv \ell \pmod m \ ; \ n \leqslant x\} = \frac{x}{mp} + O(x^{\lambda}) \quad ,$$

où $\lambda \in \,]0 , 1[$.

Soit $\mu \geqslant 2$ un entier donné. Notons par $\mathbb{N}_\mu$ l'ensemble des entiers positifs qui ne contiennent aucun facteur qui soit une puissance μ-ième. Par exemple, $\mathbb{N}_2$ est connu sous le nom de l'ensemble des nombres "quadratfrei".

THÉORÈME B. - *Soient* $\mu \geqslant 2$ *et* a *deux entiers ; soit* p *un nombre entier premier avec* $g - 1$. *Alors*,

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \equiv a \pmod p \ ; \ n \in \mathbb{N}_\mu \ ; \ n \leqslant x\} = \frac{x}{p\zeta(\mu)} + O(x^{\lambda_1}) \quad ,$$

où ζ *est la fonction de Riemann et* $\lambda_1 \in \,]0 , 1[$.

GEL'FOND démontre ces deux théorèmes en s'appuyant sur la notion de fonctions g-additives (voir paragraphe 6). Dans cet exposé, nous nous contenterons d'établir ses résultats, dans le cas où p est un diviseur premier de g, par une technique de fonctions pseudo-aléatoires. Nos résultats sont valables pour une classe de fonctions g-additives qui contient la fonction f "somme des chiffres". Au paragraphe 5, une caractérisation des nombres de Pisot est donnée en termes de répartition modulo 1 .

2. Résultats obtenus.

Soit n un nombre entier positif ou nul, et soit

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)\, g^k$$

sa représentation dans le système à base g (e_k est une application définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs sur $\{0 , 1 , \ldots , g - 1\}$). Soit $c = (c_0 , c_1 , \ldots , c_m , \ldots)$ une suite infinie d'entiers. On définit la fonction f_c^g par

$$f_c^g(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)\, c_k \quad .$$

Si en particulier $c_0 = c_1 = \ldots = c_m = \ldots = 1$, alors $f_c^g = f$.

Si α et β sont deux nombres réels, on note par $[\alpha\mathbb{N} + \beta]$ l'ensemble des entiers de la forme $[\alpha n + \beta]$, $n \in \mathbb{N}$.

Nous démontrons ici les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. - *Soient p un nombre premier, et $c = (c_0 , c_1 , \ldots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite d'entiers qui contient une infinité de termes non divisibles par p . Soient a un entier, et d'autre part, $\alpha \geqslant 1$ et β deux nombres réels donnés. Si g est un multiple de p , alors :*

$$\operatorname{card}\{n \in [\alpha\mathbb{N} + \beta] \mid f_c^g(n) \equiv a \pmod p \ ; \ n \leqslant x\} = \frac{x}{p\alpha} + o(x) \quad .$$

THÉORÈME 2. - *Soient p un nombre premier, $\mu \geqslant 2$, et a trois entiers. Si la suite $c \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ contient une infinité de termes non divisibles par p et si g est multiple de p , alors*

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N}_\mu \mid f_c^g(n) \equiv a \pmod p \ ; \ n \leqslant x\} = \frac{x}{p\zeta(\mu)} + o(x) \quad .$$

3. Démonstration du théorème 1.

On se sert de quatre lemmes.

LEMME 1. - *Soit* $f : \mathbb{N} \to \{\exp \frac{2i\pi}{p} k\}_{k=0,1,\dots,p-1}$ *une fonction telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} f^k(q) = 0 \qquad (k = 1 , 2 , \dots , p - 1) .$$

Soit a *un entier. Alors,*

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = \exp \frac{2i\pi}{p} a \ ; \ n \leqslant x\} = \frac{x}{p} + o(x) .$$

En effet, posons $E_x(f , a) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = \exp \frac{2i\pi}{p} a \ ; \ n \leqslant x\}$. Dire que f^k est de moyenne nulle, s'écrit sous la forme

$$\sum_{a=0}^{p-1} \sum_{q\in E_n(f^k,a)} \exp \frac{2i\pi}{p} a = o(n) ,$$

soit encore

$$\sum_{a=0}^{p-1} \exp(\frac{2i\pi}{p} a) \operatorname{card} E_n(f^k , a) = o(n) .$$

Comme p est un nombre premier et $k \not\equiv 0 \pmod p$, k admet un inverse dans le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}$. On peut donc écrire

$$E_n(f^k , a) = E_n(f , ak^{-1}) .$$

En posant $b = ak^{-1}$, on a donc

$$\sum_{b=0}^{p-1} \exp(\frac{2i\pi}{p} bk) \operatorname{card} E_n(f , b) = o(n) \qquad (k = 1 , 2 , \dots , p - 1) .$$

Ces $(p - 1)$ équations, dans lesquelles $\operatorname{card} E_n(f , b)$ $(b = 0 , 1 , 2 , \dots , p - 1)$, sont les inconnues, associées à

$$\sum_{b=0}^{p-1} \operatorname{card} E_n(f , b) = n ,$$

constituent p équations à p inconnues. La résolution du système conduit à

$$\operatorname{card} E_n(f , b) = \frac{n}{p} + o(n) .$$

C. Q. F. D.

LEMME 2. - <u>Soient</u> p <u>un nombre premier, et</u> $f : \mathbb{N} \to \{\exp \frac{2i\pi}{p} k\}_{k=0,1,\dots,p-1}$ <u>une fonction pseudo-aléatoire. Si</u> a <u>est un entier, et</u> $\alpha \geqslant 1$ <u>et</u> β <u>deux nombres réels donnés, on a</u>

$$\operatorname{card}\{n \in [\alpha\mathbb{N} + \beta] \mid f(n) = \exp \frac{2i\pi}{p} a \ ; \ n \leqslant x\} = \frac{x}{p\alpha} + o(x) \quad .$$

En effet, posons $f_{\alpha,\beta}(q) = f([\alpha q + \beta])$. On considère le nombre

$$T(x) = \operatorname{card}\{q \in \mathbb{N} \mid f_{\alpha,\beta}(q) = \exp \frac{2i\pi}{p} a \ ; \ q \leqslant \frac{x}{\alpha}\} \quad .$$

Grâce au lemme 3 qui suit, on voit que $f_{\alpha,\beta}$ est de moyenne nulle. Le lemme 1 permet alors de conclure que

$$T(x) = \frac{x}{p\alpha} + o(x) \quad .$$

LEMME 3. - <u>Soit</u> f <u>une fonction pseudo-aléatoire. Si</u> $\alpha \geqslant 1$ <u>et</u> β <u>sont des nombres réels, alors la fonction</u> $f_{\alpha,\beta}$, <u>définie par</u> $f_{\alpha,\beta}(q) = f([\beta + q\alpha])$, <u>est de moyenne nulle</u>.

<u>Démonstration</u>. - Si f est une fonction pseudo-aléatoire et si θ est une fonction presque-périodique (dans B^2), il est connu que $f.\theta$ est de moyenne nulle [1]. Appelons θ la fonction caractéristique de l'ensemble $\{[\beta + q\alpha] \mid q \in \mathbb{Z}\}$. θ est bien presque-périodique. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\ \theta(k) = 0 \quad ,$$

ou encore

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{q\leqslant\frac{n}{\alpha}} f([\beta + q\alpha]) = 0 \quad ;$$

soit enfin

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \sum_{q=1}^{s} f([\beta + q\alpha]) = 0 \quad .$$

C. Q. F. D.

LEMME 4. - <u>Soient</u> $p \geqslant 2$ <u>un entier, et</u> g <u>un multiple de</u> p . <u>Soit</u> $c \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ <u>une suite qui contient une infinité de termes non divisibles par</u> p . <u>La fonction</u>

$$\Psi = \exp \frac{2i\pi}{p} f_c^g = \exp \frac{2i\pi}{p} \sum_{k=0}^{\infty} c_k\ e_k$$

<u>est pseudo-aléatoire</u>.

Ce résultat, long à démontrer, s'établit comme dans [3], chapitre III.

Le théorème 1 est une conséquence immédiate des lemmes 2 et 4.

Remarque. - Supposons $g = 2$. Si à partir d'un certain rang les termes de c sont tous pairs, alors $\Psi = \exp i\pi f_c^2$ est une fonction périodique, et le théorème 1 n'a plus nécessairement lieu. Par exemple, si $f_c^2 = e_0$ $(c = (1, 0, 0, \ldots))$, on a

$$\operatorname{card}\{n \in \underset{\sim}{N} \mid f_c^2(n) \equiv 0 \pmod 2 \ ; \ n \equiv 1 \pmod 2 \ ; \ n \leqslant x\} = 0$$

pour tout x.

4. Démonstration du théorème 2.

On s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME 5. - Sous les mêmes hypothèses que celles du lemme 4, on a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ n\in \underset{\sim}{N}_\mu}} \exp \frac{2i\pi}{p} f_c^g(n) = 0 \qquad (p \geqslant 2 \text{ entier}) .$$

En effet, supposons x entier, et posons $\Psi = \exp \frac{2i\pi}{p} f_c^g$. Appelons $M(x)$ la moyenne

$$M(x) = \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ n\in \underset{\sim}{N}_\mu}} \Psi(n) .$$

Si μ représente la fonction de Möbius, on a

$$M(x) = \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \Psi(n) \sum_{d^\mu | n} \mu(d)$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{d\leqslant x} \mu(d) \sum_{k\leqslant x/d^\mu} \Psi(d^\mu k)$$

$$= \sum_{d\leqslant x} \frac{\mu(d)}{d^\mu} \Big(\frac{1}{x/d^\mu} \sum_{k\leqslant x/d^\mu} \Psi(d^\mu k)\Big) .$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Soit y un entier compris entre 1 et x. On décompose $M(x)$ en deux sommes :

$$M_1 = \sum_{d\leqslant y} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \sum_{y\leqslant d\leqslant x} .$$

M_2 s'évalue aisément :

$$|M_2| \leqslant \sum_{y \leqslant d \leqslant x} \left|\frac{\mu(d)}{d^2}\right| < \int_y^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{y} \quad .$$

On choisit $y = [\frac{2}{\varepsilon}] + 1$, de sorte que $|M_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par ailleurs,

$$|M_1| \leqslant \sum_{d \leqslant y} \left|\frac{\mu(d)}{d^2}\right| \left|\frac{1}{x/d^{\mu}} \sum_{k \leqslant x/d^{\mu}} \Psi(k.d^{\mu})\right| \quad .$$

D'après le lemme 4, Ψ est pseudo-aléatoire. Tenant alors compte du lemme 3, il vient :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x/d^{\mu}} \sum_{k \leqslant x/d^{\mu}} \Psi(k.d^{\mu}) = 0 \quad .$$

Il existe donc un nombre x_0 tel que, pour tout $x > x_0$, on ait

$$\left|\frac{1}{x/d^{\mu}} \sum_{k \leqslant x/d^{\mu}} \Psi(k.d^{\mu})\right| \leqslant \frac{6}{\pi^2} \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Dès lors, sitôt que x est supérieur à x_0 , on a

$$|M(x)| \leqslant |M_1| + |M_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad .$$

C. Q. F. D.

En combinant le lemme 5 et le lemme 1, et en notant par $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n , \ldots$ les éléments de l'ensemble $\underset{\sim}{N}_{\mu}$, il vient

$$\mathrm{card}\{\lambda_n \mid f_c^g(\lambda_n) \equiv a \pmod p \ ; \ \lambda_n \leqslant x\} = \frac{x}{p} + o(x) \qquad (\ p \ \text{premier}) \quad .$$

Par ailleurs, le nombre d'éléments de $\underset{\sim}{N}_{\mu}$, qui ne dépasse pas x , est équivalent à $x/\zeta(\mu)$. D'où

$$\mathrm{card}\{n \in \underset{\sim}{N} \mid f_c^g(n) \equiv a \pmod p \ ; \ n \in \underset{\sim}{N}_{\mu} \ ; \ n \leqslant x\} = \frac{x}{p\,\zeta(\mu)} + o(x) \quad .$$

Le théorème 2 est ainsi démontré.

5. Appendice 1 : Une caractérisation des nombres PV .

Au paragraphe 2, on a défini les applications f_c , où c est une suite d'entiers. On peut évidemment étendre la définition au cas où c est une suite de nombres réels. En particulier, si θ est un nombre réel, on pose $(\theta) = (1 , \theta , \theta^2 , \theta^3 , \ldots)$, et l'on considère la fonction $f_{(\theta)}$:

$$f_{(\theta)}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)\, \theta^k \quad .$$

Ici, $e_k(n)$ représente le $(k+1)$-ième chiffre de n écrit en <u>système à base</u> 2 .

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> $\theta > 1$ <u>un nombre réel. Une condition nécessaire et suffisante pour que le nombre</u> θ <u>soit un nombre</u> PV <u>est que la suite</u> $u_n = f_{(\theta)}(n)$ <u>ne soit pas équirépartie</u> modulo 1 .

<u>Démonstration</u>. - Soit T l'opérateur de translation sur l'ensemble $\underset{\sim}{R}^{\underset{\sim}{N}}$ de sorte que

$$T(c_0\,,\, c_1\,,\, \ldots\,,\, c_n\,,\, \ldots) = (c_1\,,\, c_2\,,\, \ldots\,,\, c_{n+1}\,,\, \ldots) \quad .$$

Soit $e_k(n)$ le $(k+1)$-ième chiffre de l'entier n écrit dans le système binaire. Notons les égalités

$$(1) \qquad \begin{cases} e_0(2n+a) = a\,, \quad a = 0 \text{ ou } 1 \\ e_k(2n+a) = e_{k-1}(n)\,, \quad k = 1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\quad a = 0 \text{ ou } 1 \quad . \end{cases}$$

On pose

$$\varphi_c(p) = \exp 2i\pi f_c(p) \quad ,$$

et

$$S_c(n) = \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_c(p) \quad .$$

Les relations (1) entraînent les suivantes :

$$\begin{cases} f_c(2n) = f_{Tc}(n) \\ f_c(2n+1) = c_0 + f_{Tc}(n) \quad . \end{cases}$$

Par suite,

$$S_c(2n) = \sum_{p=0}^{2n-1} \varphi_c(p) = \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_c(2p) + \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_c(2p+1)$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_{Tc}(p) + \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_{Tc}(p) \exp 2i\pi c_0 \quad ,$$

soit enfin

$$S_c(2n) = (1 + \exp 2i\pi c_0)\, S_{Tc}(n) \quad ,$$

et

$$S_c(2n+1) = (1 + \exp 2i\pi c_0)\, S_{Tc}(n) + \varpi_c(2n+1) \quad .$$

Il s'ensuit que

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{S_c(2n)}{2n} = \exp i\pi c_0 \cos \pi c_0 \dfrac{S_{Tc}(n)}{n} \\[2ex] \dfrac{S_c(2n+1)}{2n+1} = \exp i\pi c_0 \cos \pi c_0 \dfrac{S_{Tc}(n)}{n} + O(\frac{1}{n}) \end{cases} ,$$

formules qui montrent que

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{S_c(2n)}{2n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{S_c(2n+1)}{2n+1}\right| \quad .$$

Appelons $M(c) = \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{S_c(n)}{n}\right|$ la valeur commune. On a alors

$$M(c) = |\cos \pi c_0|\; M(Tc) \quad ,$$

et plus généralement, pour $\nu \in \underset{\sim}{N}$,

$$(3) \qquad M(c) = \left|\prod_{k=0}^{\nu} \cos \pi c_k\right| M(T^{\nu+1} c) \quad .$$

De cette formule découle le théorème 3.

En effet, soit $q \geqslant 1$ un entier. Posons $q\theta^k = c_k$, où $\theta > 1$ n'est pas un nombre de Pisot-Vijayaraghavan. En remarquant que $M(T^{\nu+1} c) \leqslant 1$, on voit que

$$M(c) \leqslant \left|\prod_{k=0}^{\nu} \cos \pi q\theta^k\right| , \qquad \forall\ \nu \in \underset{\sim}{N} \quad .$$

Le produit infini $\left|\prod\limits_{k=0}^{\infty} \cos \pi q\theta^k\right|$ étant divergent [4], on voit que $M(c) = 0$. Le critère de Weyl montre alors que la suite $u_n = f_{(\theta)}(n)$ est équirépartie (mod 1).

Réciproquement, supposons que θ est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan. D'après la formule (3), on a

$$M(c) = \left|\prod_{k=0}^{\nu-1} \cos \pi\theta^k\right| M(T^{\nu} c) \qquad (q = 1) \quad .$$

Nous allons voir que, pour ν suffisamment grand, $M(T^{\nu} c)$ est non nul, donc $M(c) \neq 0$. En effet,

$$M(T^{\nu}\, c) = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \exp(2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} e_k(p)\, \theta^{k+\nu})\right| \quad .$$

Comme θ est un nombre PV , il existe $\tau \in \,]0\,,\,1[$ tel que, pour tout entier $k > 0$, on ait

$$|\theta^k| < \tau^k \pmod 1 \quad .$$

Ainsi,

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} e_k(p)\, \theta^{k+\nu}\right| < \tau^{\nu} + \tau^{\nu+1} + \ldots = \frac{\tau^{\nu}}{1-\tau} \pmod 1 \quad .$$

On choisit ν suffisamment grand pour que $\tau^{\nu}/1-\tau$ ne dépasse pas $\frac{1}{4}$. Alors, $M(\tau^{\nu}\, c)$ ne peut être nul. $f_{(\theta)}(n)$ est alors une suite non équirépartie modulo 1 .

Remarque. - La démonstration précédente permet d'établir que, pour tout θ , on a

$$M(c) = \left|\prod_{k=0}^{\infty} \cos \pi q \theta^k\right| \,, \qquad q \in \mathbb{Z} \quad .$$

6. Appendice 2 : Les fonctions g-additives.

Dans ce paragraphe, g représente à nouveau un nombre entier supérieur ou égal à 2 .

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est g-additive si, chaque fois que l'entier n s'écrit sous la forme

$$n = n_1 + n_2 \qquad (n_1 \in \mathbb{N}\,,\ \ n_2 \in \mathbb{N}) \quad ,$$

où $n_1 < g^{\mu}$ et $n_2 = g^{\mu}\, n_3$ ($\mu = \mu(n)$ et n_3 sont des entiers positifs), on a

$$f(n) = f(n_1) + f(n_2) \quad .$$

Par exemple, la fonction $f(n) = n$ est g-additive. Plus généralement, les fonctions f_c^g $(c \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, étudiées précédemment, sont g-additives. On peut établir le résultat suivant :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f soit g-additive est qu'elle s'écrive sous la forme

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \circ e_k \quad ,$$

où $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est une famille d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (dépendant évidemment de f).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Suites pseudo-aléatoires et critères d'équirépartition modulo 1 , Compos. Math., Groningen, t. 16, 1964, p. 23-28.

[2] GEL'FOND (A. O.). - Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1968, p. 259-265.

[3] MENDÈS FRANCE (Michel). - Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires, J. Anal. math., Jérusalem, t. 20, 1967, p. 1-56 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).

[4] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup. di Pisa, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).