

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARTHE GRANDET-HUGOT

Nombres de Pisot dans un corps de séries formelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, n° 1 (1966-1967),
exp. n° 4, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_1_A4_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOMBRES DE PISOT DANS UN CORPS DE SÉRIES FORMELLES

par Marthe GRANDET-HUGOT

Dans un article, paru en 1962 [2], P. BATEMAN et A. DUQUETTE introduisent des "PV éléments" dans un corps de séries formelles ; ces éléments ont des propriétés analogues à celles des nombres de Pisot classiques.

Dans cet exposé, nous allons donner la définition de ces éléments, et indiquer leurs principales propriétés.

1. Notations et rappels.

Nous noterons par S l'ensemble des nombres de Pisot, c'est-à-dire : l'ensemble des entiers algébriques θ sur le corps \mathbb{Q} des rationnels, ayant tous leurs conjugués, autres que θ lui-même, de valeur absolue inférieure à 1 [6].

On sait que toute extension algébrique finie réelle de \mathbb{Q} peut être engendrée par un nombre $\theta \in S$, et de plus, on connaît la caractérisation suivante des nombres $\theta \in S$ basée sur la répartition modulo 1 de la suite $\lambda\theta^n$ où λ est réel :

Un nombre θ appartient à S si et seulement s'il existe λ réel, tel que si l'on pose :

$$\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n, \quad \text{où } u_n \in \mathbb{Z} \text{ et } -\frac{1}{2} \leq \varepsilon_n < \frac{1}{2},$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2$ converge.

De même, ces nombres permettent d'obtenir une caractérisation des nombres algébriques à partir d'approximations rationnelles [4], [7].

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel α soit algébrique est qu'il ait des approximations rationnelles "régulièrement réparties", c'est-à-dire qu'il existe une suite de couples d'entiers (u_n, v_n) et un nombre réel $\omega > 1$ tel que

$$|u_n \alpha - v_n| < \frac{C}{u_n^\eta},$$

$$|u_{n+1} - \omega u_n| < \frac{K}{u_n^\eta},$$

et si s est le degré de α : $s \leq 1 + \frac{1}{\eta}$.

Nous verrons, dans la suite, que ces propriétés se généralisent d'une certaine manière aux éléments introduits par BATEMAN et DUQUETTE.

Nous désignerons par k un corps quelconque, $k[x]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée sur k , et $k(x)$ son corps des quotients, c'est-à-dire le corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur k ; $k(x)$ sera muni de sa "valuation à l'infini", c'est-à-dire que si

$$a = \frac{f}{g} \in k(x), \quad \text{où } f \in k[x] \quad \text{et} \quad g \in k[x],$$

$$v_{\infty}(a) = d^{\circ} g - d^{\circ} f \quad \text{et} \quad |a|_{\infty} = e^{-d^{\circ} g + d^{\circ} f},$$

e étant un nombre réel quelconque supérieur à 1 (que l'on peut prendre égal à la base des logarithmes népériens). Quand nous n'utiliserons pas d'autre valuation de $k(x)$, nous noterons simplement $v(a)$ et $|a|$.

La complétion de $k(x)$ pour cette valuation est alors le corps des séries de Laurent formelles de la forme :

$$\alpha = \sum_{j=-h}^{\infty} a_{-j} x^{-j}, \quad \text{où } a_{-j} \in k, \quad a_{-h} \neq 0,$$

que l'on désigne par $k\{x^{-1}\}$, alors $|\alpha| = e^h$.

Un élément $\alpha \in k\{x^{-1}\}$ peut alors s'écrire :

$$\alpha = \sum_{j=-h}^0 a_{-j} x^{-j} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} x^{-j}.$$

En posant

$$E(\alpha) = \sum_{j=-h}^0 a_{-j} x^j \in k[x],$$

$$\varepsilon(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} x^{-j},$$

alors $|\varepsilon(\alpha)| < 1$; on obtient la décomposition suivante :

$$\alpha = E(\alpha) + \varepsilon(\alpha),$$

où $E(\alpha) \in k[x]$ et $|\varepsilon(\alpha)| < 1$ pour tout élément $\alpha \in k\{x^{-1}\}$; cette décomposition est unique et joue un rôle analogue à celui des parties entières et fraction-

naires dans le domaine réel. K désignera la clôture algébrique de $k\{x^{-1}\}$, et \hat{K} sa complétion.

2. Définition et existence des PV éléments.

DEFINITION 1. - Nous désignerons par \mathcal{S}^* l'ensemble ainsi défini : Un élément α de $k\{x^{-1}\}$ appartient à \mathcal{S}^* s'il est entier algébrique sur $k[x]$ et si tous ses conjugués, autres que lui-même, par rapport à $k(x)$ sont de valeur absolue inférieure ou égale à 1 (c'est-à-dire de valuation positive ou nulle).

DEFINITION 2. - Nous désignerons par \mathcal{S} l'ensemble ainsi défini (PV éléments de Bateman et Duquette) : Un élément θ de $k\{x^{-1}\}$ appartient à \mathcal{S} s'il est entier algébrique sur $k[x]$ et si tous ses conjugués, autres que lui-même, par rapport à $k(x)$ sont de valeur absolue inférieure à 1 (c'est-à-dire de valuation positive).

Ces définitions entraînent que les éléments de \mathcal{S}^* ou de \mathcal{S} sont séparables sur $k(x)$.

THEOREME 2.1. - Soit k un corps quelconque. Alors $k\{x^{-1}\}$ contient des éléments de \mathcal{S} de tous degrés sur $k(x)$.

En effet, considérons le polynôme $X^r - xX^{r-1} - 1$, on voit alors facilement, en considérant son polygone de Newton, que ce polynôme, qui est irréductible sur $k(x)$, a une racine $\theta \in k\{x^{-1}\}$ vérifiant $|\theta| > 1$, les autres racines dans K vérifiant $|\theta_i| < 1$ pour $i = 2, \dots, r$.

Remarques sur les éléments $\theta \in \mathcal{S}$. - Soit

$$P(X) = X^s + a_1 X^{s-1} + \dots + a_s, \quad \text{où } a_j \in k[x], \quad j = 1, \dots, s$$

le polynôme minimal de θ ; en considérant son polygone de Newton, on voit immédiatement que

$$|a_1| = |\theta| \quad \text{et} \quad |a_j| < |\theta| \quad \text{pour } j = 2, \dots, s \quad (1).$$

De plus, si θ_i ($i = 2, \dots, s$) désigne les conjugués de θ , on a

(1) Les nombres $\theta \in \mathcal{S}$ vérifient une propriété analogue, en effet [5], il existe un polynôme $\Pi(X)$ tel que $\Pi(\theta) = 0$ et dont les coefficients sont, en valeur absolue, inférieurs ou égaux à θ , toutefois ce polynôme n'est pas nécessairement irréductible.

$$\frac{1}{|\theta|} < |\theta_i| \leq e^{-1/(s-1)} ,$$

et si l'on pose

$$\rho = \max_{i=2, \dots, s} |\theta_i| ,$$

l'on a :

$$|\theta|^{-1/(s-1)} \leq \rho \leq e^{-1/(s-1)} .$$

A l'aide d'un lemme analogue au lemme de Minkowski dans le cas réel, on démontre le théorème suivant.

THÉOREME 2.2 [2]. - Soit k un corps quelconque. Toute extension algébrique finie et séparable de $k(x)$, contenue dans $k\{x^{-1}\}$, peut être engendrée par un élément $\theta \in \mathbb{S}$.

En effet, toute extension algébrique finie et séparable est simple, on peut donc se borner aux extensions $k(x)(\xi)$, où $\xi \in k\{x^{-1}\}$ est algébrique et séparable sur $k(x)$, il existe alors une $k[x]$ -base $\omega_1, \dots, \omega_s$ pour la clôture entière de $k[x]$ dans $k(x)(\xi)$, c'est-à-dire que tout entier de $k(x)(\xi)$ peut s'écrire ([8], p. 265) :

$$\alpha = \sum_{i=1}^s X_i \omega_i .$$

La suite de la démonstration se fait à peu près comme dans le cas réel.

Dans ce cas, $k(x)(\theta)$ contient une infinité de PV-éléments, et peut être engendré par l'un de ces éléments.

Cas particulier où k est un corps parfait. - On obtient alors le lemme suivant:

LEMME 2.1. - Si k est un corps parfait, alors tout élément de $k\{x^{-1}\}$ qui est algébrique sur $k(x)$ est aussi séparable sur $k(x)$.

Si k est de caractéristique zéro, le résultat est trivial puisque $k(x)$ est aussi de caractéristique zéro, donc est parfait.

Si k est de caractéristique $p \neq 0$: Soit α un élément algébrique de $k\{x^{-1}\}$ et soit $g(X) \in k[x][X]$ un polynôme tel que $g(\alpha) = 0$ et dont le degré soit minimum. Supposons que $g(X)$ est inséparable, alors :

$$g(X) = A_n X^{np} + A_{n-1} X^{(n-1)p} + \dots + A_1 X^p + A_0 ,$$

où $A_j \in k[x]$, $j = 1, \dots, n$ et $A_n \neq 0$. On peut alors écrire :

$A_j = A_j(x) = A_{j,0}(x^p) + xA_{j,1}(x^p) + \dots + x^{p-1}A_{j,p-1}(x^p)$ pour $j = 0, 1, \dots, n$

puisque $g(\alpha) = 0$, on a donc :

$$\sum_{i=0}^{p-1} x^i [A_{n,i}(x^p) \alpha^{pn} + A_{n-1,i}(x^p) \alpha^{p(n-1)} + \dots + A_{0,i}(x^p)] = 0,$$

mais puisque k est de caractéristique p :

$$\alpha^{pi} = \alpha(x)^{pi} = [\alpha(x)^p]^i = \{\beta(x^p)\}^i,$$

où $\beta \in k\{x^{-1}\}$ et est obtenu à partir de α en élevant chaque coefficient à la puissance p . Alors chaque terme de la somme précédente ne contient que des puissances de x dont l'exposant est congru à $x \pmod p$, il en résulte que tous les termes doivent être nuls, c'est-à-dire :

$$A_{n,i}(x^p) \alpha^{pn} + A_{n-1,i}(x^p) \alpha^{p(n-1)} + \dots + A_{0,i}(x^p) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, p-1.$$

k étant parfait, tout coefficient de $A_{j,i}$ est une p -ième puissance, donc :

$$A_{j,i}(x^p) = [B_{j,i}(x)]^p, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, p-1,$$

donc on peut écrire :

$$[B_{n,i}(x) \alpha^n + B_{n-1,i}(x) \alpha^{n-1} + \dots + B_{0,i}(x)]^p = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p-1.$$

D'autre part, nous avons supposé $A_n \neq 0$, donc il existe i tel que $A_{n,i} \neq 0$, donc $B_{n,i} \neq 0$. Alors α est zéro du polynôme :

$$B_{n,i}(x) X^n + \dots + B_{0,i}(x) = 0$$

dont les coefficients appartiennent à $k[x]$ mais dont le degré est inférieur à celui de $g(X)$, or nous avons supposé que $g(X)$ était de degré minimum, il en résulte que α est séparable sur $k(x)$.

D'où l'on déduit le théorème suivant.

THÉORÈME 2.3. - Si k est un corps parfait, toute extension algébrique finie de $k(x)$, contenue dans $k\{x^{-1}\}$, peut être engendrée par un élément $\theta \in \mathcal{S}$.

3. Caractérisation.

P. BATEMAN et A. DUQUETTE ont montré le théorème suivant.

Si k est un corps parfait, soit $\theta \in k\{x^{-1}\}$ tel que $|\theta| > 1$, s'il existe un élément λ de $k\{x^{-1}\}$ non nul, tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(\lambda \theta^n) = 0 \quad .$$

Alors $\theta \in \mathcal{S}$ et $\lambda \in k(x)(\theta)$.

En reprenant la démonstration, nous allons voir que le résultat est encore valable si le corps k n'est pas parfait :

THÉORÈME 3.1. - Soit k un corps quelconque. Un élément $\theta \in k\{x^{-1}\}$, tel que $|\theta| > 1$, appartient à \mathcal{S} si, et seulement si, il existe $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in k\{x^{-1}\}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(\lambda \theta^n) = 0$$

et de plus $\lambda \in k(x)(\theta)$.

On obtient ainsi une caractérisation de l'ensemble \mathcal{S} analogue à celle qui avait été obtenue pour les nombres de Pisot classiques. Nous obtiendrons également une caractérisation de l'ensemble \mathcal{S}^* .

THÉORÈME 3.2. - Soit k un corps quelconque, soit $\alpha \in k\{x^{-1}\}$, $|\alpha| > 1$; pour que $\alpha \in \mathcal{S}^*$, il faut et il suffit qu'il existe un élément $\lambda \neq 0$ de $k\{x^{-1}\}$ tel que, pour n assez grand :

$$|\varepsilon(\lambda \alpha^n)| < \frac{1}{|\alpha|^2} \quad .$$

Alors $\lambda \in k(x)(\alpha)$.

La démonstration s'appuie sur les lemmes suivants.

LEMME 3.1. (Lemme de Fatou). - Soit $\{u_n\}$ une suite d'éléments de $k[x]$ vérifiant une relation de récurrence à coefficients constants :

$$a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_r u_{n+r} = 0 \quad .$$

Alors il existe une relation de récurrence du même type où $a_i \in k[x]$ et $a_r = 1$ (élément unité de k).

LEMME 3.2. - Soient k un corps quelconque, et $\{\xi_n\}$ une suite d'éléments de $k\{x^{-1}\}$ satisfaisant à une relation de récurrence

$$\xi_{n+r} + \alpha_{r-1} \xi_{n+r-1} + \dots + \alpha_0 \xi_n = 0 \quad ,$$

où $\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}$ appartiennent à $k\{x^{-1}\}$ et sont des constantes. Soit $\{u_n\}$ une suite d'éléments de $k\{x^{-1}\}$ tels que :

$$|u_n - \xi_n| < \frac{1}{\max(|\alpha_0|, \dots, |\alpha_{r-1}|, 1)^2} \quad \text{pour } n \geq N .$$

Alors la suite $\{u_n\}$ satisfait à une relation de récurrence à coefficients constants.

Pour $n \geq N + r$, posons :

$$\varepsilon_n = u_n + \alpha_{r-1} u_{n-1} + \dots + \alpha_0 u_{n-r} ,$$

alors :

$$|\varepsilon_n| < |u_n - \xi_n + \alpha_{r-1}(u_{n-1} - \xi_{n-1}) + \dots + \alpha_0(u_{n-r} - \xi_{n-r})| ,$$

donc :

$$|\varepsilon_n| < \frac{1}{\max(|\alpha_0|, \dots, |\alpha_{r-1}|, 1)} .$$

Pour $n \geq N + 2r$, nous poserons :

$$\eta_n = \varepsilon_n + \alpha_{r-1} \varepsilon_{n-1} + \dots + \alpha_0 \varepsilon_{n-r} ,$$

on a donc :

$$|\eta_n| < 1 \quad \text{pour } n \geq N + 2r ,$$

donc, puisque $k\{x^{-1}\}$ est à valuation discrète, on a, pour $n \geq N + r$, $|\varepsilon_n| \leq e^{-1}$, et $|\eta_n| \leq e^{-1}$ pour $n \geq N + 2r$, donc si l'on considère le déterminant de Kronecker :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ \vdots & & \\ u_n & \dots & u_{2n} \end{vmatrix} ,$$

par combinaison linéaire des lignes et des colonnes, on obtient :

$$\Delta_n = \det(\delta_{i+j})$$

où

$$\delta_{i+j} = u_{i+j} \quad \text{pour } i < N + r, \quad j < N + r ,$$

$$\delta_{i+j} = \eta_{i+j} \quad \text{pour } i \geq N + 2r, \quad j \geq N + 2r ,$$

$$\delta_{i+j} = \varepsilon_{i+j} \quad \text{dans les autres cas} ,$$

et, en posant :

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{2N+2r-2}|, 1),$$

on obtient :

$$|\Delta_n| \leq M^{N+r} (e^{-1})^{n-N-r+1},$$

donc, pour n assez grand, $|\Delta_n| < 1$, donc puisque $\Delta_n \in k[x]$, $\Delta_n = 0$, et la suite u_n satisfait à une relation de récurrence d'après le théorème de Kronecker.

Démonstration des théorèmes 3.1 et 3.2. - Soit $\alpha \in k\{x^{-1}\}$, tel que $|\varepsilon(\lambda\alpha^n)| < \frac{1}{|\alpha|^2}$ à partir d'un certain rang. En posant $\xi_n = \lambda\alpha^n$, nous obtenons une suite vérifiant les hypothèses du lemme 3.2, on a en effet la relation de récurrence :

$$\xi_{n+1} - \alpha\xi_n = 0,$$

et l'inégalité

$$|u_n - \xi_n| < \frac{1}{|\alpha|^2} \quad \text{pour } n \geq N.$$

Les u_n vérifient donc une relation de récurrence que l'on peut écrire :

$$A_0 u_n + A_1 u_{n+1} + \dots + u_{n+s} = 0$$

d'après le lemme de Fatou.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ représente donc une fraction rationnelle $\frac{A(X)}{Q(X)}$ et, dans K , clôture algébrique de $k\{x^{-1}\}$, cette fonction admet comme pôle, $\frac{1}{\alpha}$, intérieur au disque $|X| < 1$, les autres pôles étant dans le domaine défini par $|X| \geq 1$, ce qui montre que $\alpha \in \mathbb{S}^*$.

Si, de plus, $\varepsilon(\lambda\alpha^n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors les conjugués de α sont de valeur absolue inférieure à 1, et $\alpha \in \mathbb{S}$.

Dans les deux cas, on voit immédiatement que $\lambda \in k(x)(\alpha)$.

Inversement, étant donné un élément α de \mathbb{S} ou \mathbb{S}^* , il est facile de trouver un élément λ tel que les hypothèses du théorème 3.1 ou 3.2 soient vérifiées.

4. Approximation rationnelle des éléments algébriques.

THÉORÈME 4.1. - Pour qu'un élément $\alpha \in k\{x^{-1}\}$ soit algébrique et séparable sur $k(x)$, il faut et il suffit qu'il admette des approximations rationnelles "régulièrement réparties", c'est-à-dire qu'il existe une suite d'approximations rationnelles

$\frac{u_n}{v_n}$ (où u_n et $v_n \in k[x]$) ayant les propriétés suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \alpha v_n| = 0$$

et

$$\exists \omega \in k\{x^{-1}\}, \quad |\omega| > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1} - \omega u_n| = 0 ;$$

alors $\omega \in \mathcal{S}$ et $\alpha \in k(x)(\omega)$.

1° Soit α un élément de $k\{x^{-1}\}$ qui soit algébrique et séparable sur $k(x)$, et soit $\omega \in \mathcal{S} \cap k(x)(\alpha)$.

Alors, $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ où λ et μ sont entiers algébriques sur $k(x)$, on a donc

$$\lambda \omega^n = u_n + \varepsilon_n \quad \text{où} \quad \varepsilon_n = -(\lambda_2 \omega_2^n + \dots + \lambda_s \omega_s^n) ,$$

$$\mu \omega^n = v_n + \varepsilon'_n \quad \text{où} \quad \varepsilon'_n = -(\mu_2 \omega_2^n + \dots + \mu_s \omega_s^n) ,$$

s étant le degré de α .

Alors

$$|\varepsilon_n| \leq C \rho^n$$

$$\text{où} \quad \rho = \max(|\omega_2|, \dots, |\omega_s|) \leq e^{-1/(s-1)} < 1 ,$$

$$|\varepsilon'_n| \leq C \rho^n$$

d'où

$$|u_n - \alpha v_n| < K \rho^n ,$$

$$|u_{n+1} - \omega u_n| < K_1 \rho^n ,$$

$$|v_{n+1} - \omega v_n| < K_1 \rho^n ,$$

K et K_1 étant des constantes. On peut donc dire, comme dans le cas réel, que les u_n et les v_n forment "presque" une progression géométrique.

2° Réciproquement, soit α un élément de $k\{x^{-1}\}$, admettant des approximations "régulièrement réparties", c'est-à-dire : Etant donné ε arbitrairement petit, il existe un entier N tel que

$$n > N \implies \begin{aligned} &|u_n - \alpha v_n| < \varepsilon \\ &|u_{n+1} - \omega u_n| < \varepsilon \end{aligned} \quad \text{où} \quad \omega \in k\{x^{-1}\} \text{ et } |\omega| > 1 ,$$

alors

$$|u_{n+1}| = |\omega| |u_n| .$$

On en déduit que $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, et puisque

$$\left| \frac{u_{n+1}}{\omega^{n+1}} - \frac{u_n}{\omega^n} \right| < \frac{\varepsilon}{|\omega|^{n+1}} ,$$

la suite $\left(\frac{u_n}{\omega^n}\right)$ est une suite de Cauchy, donc admet une limite $\lambda \in k\{x^{-1}\}$.

D'autre part, si $m > n > N$, on a :

$$\left| \frac{u_m}{\omega^m} - \frac{u_n}{\omega^n} \right| < \frac{\varepsilon}{|\omega|^{n+1}} ,$$

d'où, en faisant tendre m vers l'infini :

$$\left| \lambda - \frac{u_n}{\omega^n} \right| < \frac{\varepsilon}{|\omega|^{n+1}} \quad \text{et} \quad |u_n - \lambda \omega^n| < \frac{\varepsilon}{|\omega|} ,$$

donc :

$$\lambda \omega^n = u_n + \varepsilon(\lambda \omega^n) ,$$

où $\varepsilon(\lambda \omega^n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, il en résulte que $\omega \in \mathbb{S}$ et $\lambda \in k(x)(\omega)$.

En appliquant le même raisonnement à la suite (v_n) , on obtient :

$$\mu \omega^n = v_n + \varepsilon(\mu \omega^n) ,$$

où $\mu \in k(x)(\omega)$, et $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \in k(x)(\omega)$ est donc algébrique et séparable sur $k(x)$.

5. Généralisation aux adèles de $k(x)$.

On peut généraliser certaines de ces propriétés à des ensembles d'adèles algébriques sur le corps $k(x)$. Ces généralisations se font d'une manière analogue à celles qui ont été faites dans le cas des adèles de \mathbb{Q} par F. BERTRANDIAS [3].

A tout polynôme premier $p \in k[x]$, on peut associer une valeur-absolue du corps $k(x)$, les valeurs absolues obtenues satisfont à la formule du produit, et nous noterons par $k_p\{x\}$ le complété de $k(x)$ pour la valuation associée au polynôme p (avec $k_{\infty}\{x\} = k\{x^{-1}\}$).

Nous noterons $V(k)$ l'anneau des adèles de $k(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments :

$$\xi \in \prod k_p\{x\} \times k\{x^{-1}\} ,$$

le produit étant étendu à tous les polynômes premiers de $k[x]$, tels que $|\xi|_p \leq 1$, sauf pour, au plus, un nombre fini de p ; e_p désignera l'élément unité de $V(k)$.

Il existe une décomposition d'Artin [1] dans $V(k)$:

Un élément $\xi \in V(k)$ peut se mettre d'une manière unique sous la forme :

$$\xi = E(\xi) e_p + \varepsilon(\xi) ,$$

où $E(\xi) \in k(x)$ et $|\varepsilon(\xi)|_\infty < 1$, $|\varepsilon(\xi)|_p \leq 1$ pour tout p premier de $k[x]$.

Si I désigne un sous-ensemble fini de polynômes premiers de $k[x]$, nous noterons par $V_I(k)$ le sous-ensemble de $V(k)$ ainsi défini :

$$\xi \in V_I(k) , \quad \text{si } \xi_p = 0 \quad \text{pour } p \notin I ;$$

dans la décomposition précédente, on a alors :

$$E(\xi) \in k[x]_I ,$$

où

$$k[x]_I = \{ \xi \in k(x) ; |\xi|_p \leq 1 \text{ pour } p \notin I \cup \{\infty\} \} ,$$

c'est-à-dire l'anneau des fractions rationnelles n'admettant au dénominateur que des facteurs premiers appartenant à I .

Nous allons maintenant introduire les ensembles S_I et $S_I^{p'}$ ainsi définis :

Un élément $\alpha \in V_I(k)$ appartient à S_I si $|\alpha|_p > 1$ pour tout $p \in I$, et si α est racine d'un polynôme $P(X) \in k[x][X]$ dont les zéros sont tels que :

$$|\alpha_j|_p \leq 1 , \quad j = 2 , \dots , s \quad \text{si } p \in I ,$$

$$|\alpha_j|_p \leq 1 , \quad j = 1 , 2 , \dots , s \quad \text{si } p \notin I .$$

α appartient à $S_I^{p'}$ si, en plus des propriétés précédentes, on a :

$$|\alpha_j|_{p'} < 1 \quad \text{pour} \quad \begin{array}{l} j = 1 , 2 , \dots , s \quad \text{si } p' \notin I \\ j = 2 , \dots , s \quad \text{si } p' \in I \end{array} ,$$

p' étant un polynôme premier de $k[x]$.

On peut alors démontrer les théorèmes suivants.

THÉORÈME 5.1. - Pour qu'un élément α de $V_I(k)$ appartienne à S_I , il faut et il suffit qu'il existe un élément inversible λ de $V_I(k)$, tel que, à partir d'un certain rang,

$$|\varepsilon(\lambda\alpha^n)|_p \leq \frac{1}{|\alpha|_p^2} \quad \text{pour tout } p \in I .$$

THÉORÈME 5.2. - Pour qu'un élément θ de $V_I(k)$ appartienne à $S_I^{p'}$, il faut et il suffit qu'il existe un élément inversible λ de $V_I(k)$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_p(\lambda\theta^n) = 0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions. - New York and Princeton University, 1950/51 (multigraphié).
- [2] BATEMAN (P.) and DUQUETTE (A.). - The analogue of the Pisot-Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 594-606.
- [3] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, VI + 98 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).
- [4] BERTRANDIAS (J.-P.). - Applications des nombres θ , Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 3e année, 1961/62, n° 12, 21 p.
- [5] HUGOT (Marthe GRANDET-) et PISOT (C.). - Sur certains entiers algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 2831-2833.
- [6] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).
- [7] PISOT (Charles). - Sur quelques approximations rationnelles caractéristiques des nombres algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 206, 1938, p. 1862-1864.
- [8] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra, Vol. 1. - Princeton, Toronto, D. Van Nostrand Comp., 1958 (The University Series in higher Mathematics).