Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Annette Decomps-Guilloux

Nombres de Salem dans les I-adèles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, nº 1 (1966-1967), exp. nº 3, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_1_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
8e année, 1966/67, n° 3

21 novembre 1966

NOMBRES DE SALEM DANS LES I-ADÈLES

par Annette DECOMPS-GUILLOUX

Nous avons, dans un exposé précédent [4], introduit dans les I-adèles un ensemble d'éléments algébriques S_I , et montré qu'il existe une partition remarquable de S_I en trois sous-ensembles S_I^0 , Σ_I^0 et T_I , S_I^0 étant un ensemble étudié par F. BERTRANDIAS [2] et dont certaines propriétés généralisent aux adèles les propriétés de l'ensemble S des nombres de Pisot. Le but de cet exposé est, après un bref retour sur la partition de S_I pour en préciser quelques points, de donner une caractérisation de T_I apparaissant comme une généralisation d'un théorème de Salem relatif à l'ensemble T des nombres de Salem, théorème qui est le suivant [7] :

τ étant un nombre réel > 1 , une condition nécessaire et suffisante pour qu'il appartienne à T est qu'il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$ tel que la série entière $\sum_0^\infty \varepsilon_n z^n$ ait une partie réelle bornée supérieurement pour $|z| < 1$ sans que la série $\sum_0^\infty \varepsilon_n^2$ soit convergente (ε_n désignant le reste modulo 1 de $\lambda\tau^n$, et vérifiant donc $-\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon_n < \frac{1}{2}$, λ est alors algébrique et appartient à $Q[\tau]$).

1. Rappel et notations.

1.1. - P désigne l'ensemble de toutes les valuations distinctes de Q , corps des rationnels, o la valuation ordinaire notée $|\ |$, p la valuation p-adique définie par $|p|_p = p^{-1}$, Q_p la complétion de Q pour la valuation p-adique.

Soient I un <u>sous-ensemble fini</u> de P , et V_I le sous-anneau de l'adèle V_P défini de la façon suivante :

$$V_I = \{x \in V_P , \quad x_p = 0 \quad \text{si} \quad p \notin I\} \ .$$

Nous désignerons, dans la suite, par p un élément quelconque de I , on aura éventuellement p = 0 .

V_I est isomorphe algébriquement et topologiquement à $\prod_{p\in I} Q_p$, et contient un sous-corps isomorphe à Q , soit Qe_I , où e_I est l'élément unité de V_I .

Nous utiliserons encore les notations suivantes :

$$I^+ = I \quad \text{si} \quad o \in I \; ; \qquad I^+ = I + \{0\} \quad \text{si} \quad o \notin I \; ,$$

$$I^- = I \quad \text{si} \quad o \notin I \; ; \qquad I^- = I - \{0\} \quad \text{si} \quad o \in I \; .$$

$Z[I]$ représentera alors l'anneau des rationnels dont le dénominateur ne contient que des puissances des facteurs p appartenant à I^- (Z désignant l'anneau des entiers rationnels).

1.2. - Rappelons l'expression de la décomposition d'Artin [1] :

x étant un élément de V_I, il existe une décomposition

$$x = e_I \, E(x) + \varepsilon_I(x) \quad ,$$

où $E(x) \in Z[I]$, et $\varepsilon_I(x)$ vérifie les inégalités

$$|\varepsilon_I(x)|_p = |\varepsilon_p(x)|_p \leqslant 1 \, , \qquad \forall \; p \in I^-$$

et

$$a \leqslant - E(x) < a + 1 \quad \text{si} \quad o \notin I \; ,$$

$$a \leqslant \varepsilon_0(x) < a + 1 \quad \text{si} \quad o \in I \; ,$$

a étant un réel dont le choix rend la décomposition unique et que nous prendrons dans la suite toujours égal à $-\frac{1}{2}$.

1.3. - Nous redonnons encore la définition de S_I :

S_I est l'ensemble des éléments algébriques θ de V_I vérifiant $|\theta|_p > 1$, $\forall \; p \in I$, et pour lesquels il existe un polynôme $A \in Z[x]$ ayant les propriétés suivantes :

- θ est racine de A dans V_I ;
- Les racines de A dans Ω_p (clôture algébrique de Q_p), distinctes de θ_p pour $p \in I$, appartiennent au disque $|x|_p \leqslant 1$, $\forall \; p \in I^-$.

2. Partition de S_I. Définitions de Σ_I^0 et T_I.

2.1. - Rappelons le principe de la partition de S_I, basée sur la recherche des éléments de S_I n'appartenant pas à S_I^0, c'est-à-dire tels que le polynôme A a effectivement des racines sur le cercle $|x| = 1$ dans le plan complexe. En associant à un tel élément θ, la partition I_h de I qui lui est relative (F. BERTRANDIAS [2]), le polynôme A se décompose en un produit :

$$A(x) = \prod A_h(x) \quad ,$$

où les polynômes A_h sont des polynômes à coefficients entiers rationnels, irréductibles, deux à deux distincts et tels que θ_p est racine de A_h si $p \in I_h$.

Dans le cas où A a des racines sur $|x| = 1$, la décomposition $A(x) = \prod A_h(x)$ présente l'un ou l'autre des deux aspects suivants :

(1) Il existe au moins un polynôme A_h dont tous les zéros complexes (sauf θ_0 si $o \in I_h$) sont intérieurs au cercle unité.

(2) Tous les polynômes A_h ont au moins un zéro sur le cercle unité dans C .

Σ_I^0 est l'ensemble des éléments σ de S_I tels que le polynôme $A(x)$ a une décomposition de la forme (1).

T_I est l'ensemble des éléments τ de S_I tels que le polynôme $A(x)$ a une décomposition de la forme (2).

En utilisant la remarque fondamentale qu'un polynôme, à coefficients entiers irréductible, ayant un zéro sur le cercle unité dans C (ce zéro étant différent de ± 1) est réciproque, on peut alors donner de Σ_I^0 et T_I les définitions suivantes.

2.2. <u>Définition de</u> Σ_I^0 . - Σ_I^0 est l'ensemble des éléments σ de V_I vérifiant $|\sigma| > 1$, $\forall\ p \in I$, et pour lesquels il existe un polynôme A de $Z[x]$ ayant les propriétés suivantes :

- σ est racine de A dans V_I ;
- Les racines de A dans Ω_p , $\forall\ p \in P$, appartiennent au disque $|x|_p \leqslant 1$ (sauf σ_p si $p \in I$).

A se décompose en un produit

$$A(x) = A_1(x)\ B(x) \quad ,$$

où A_1 et B appartiennent à $Z[x]$ et :

A_1 est un polynôme dont tous les zéros complexes sont intérieurs au cercle unité (sauf éventuellement σ_0 si $o \in I$),

B est un polynôme réciproque dont tous les zéros complexes appartiennent au cercle unité (sauf éventuellement σ_0 et $1/\sigma_0$ si $o \in I$, dans ce cas B est au moins de degré 4).

2.3. Définition de T_I. — T_I est l'ensemble des éléments τ de V_I vérifiant $|\tau|_p > 1$, $\forall\, p \in I$, pour lesquels il existe un polynôme B de $Z[x]$ ayant les propriétés suivantes :

- τ est racine de B dans V_I ;
- B est un polynôme réciproque de la forme

$$B(x) = qx^{2s} + q_1\, x^{2s-1} + \dots + q_1\, x + q \quad ,$$

où

$$q = \prod_{p \in I^-} |\tau|_p \qquad \text{et} \qquad |q_1|_p = 1 \, , \qquad \forall\, p \in I^- \, .$$

Les zéros de B, dans le plan complexe, appartiennent tous au cercle unité (sauf τ_0 et $1/\tau_0$ si $o \in I$, on suppose, dans ce cas, que le polynôme B_{h_0}, intervenant dans la décomposition de B en facteurs irréductibles et dont τ_0 est racine, est au moins de degré 4).

2.4. Remarques. — σ étant un élément de Σ_I^0, racine d'un polynôme

$$A(x) = A_1(x)\; B(x) \quad ,$$

σ_p est racine de A_1 ou B, $\forall\, p \in I$.

Soient

$$I_1 = \{p \in I_1 \iff \sigma_p \text{ est racine de } A_1\} \quad ,$$

$$I_2 = \{p \in I_2 \iff \sigma_p \text{ est racine de } B\} \quad .$$

σ appartient à l'ensemble $S_{I_1}^0 \times T_{I_2}$; réciproquement, un élément de cet ensemble est un élément de Σ_I^0, et l'on peut considérer Σ_I comme isomorphe ;

$$\Sigma_I^0 \longleftrightarrow \cup\, S_J^0 \times T_K \quad ,$$

où J et K sont tous les sous-ensembles de I, tels que

$$\begin{cases} J \neq \emptyset \, , \quad K \neq \emptyset \quad , \\ J \cap K = \emptyset \quad , \\ J + K = I \quad . \end{cases}$$

L'ensemble Σ_I^0 n'existe pas si I ne contient qu'un seul élément : soit

$$I = \{0\} \qquad \text{(nombres de Pisot et Salem)} \quad [5]\,[7] \;,$$

$$I = \{p\} \;,\; p \neq 0 \qquad \text{(nombres de Chabauty)} \quad [3] \;.$$

3. Caractérisations de S_I^0 et Σ_I^0 .

Nous écrirons, dans toute la suite, la décomposition d'Artin de $\lambda\theta^n$ sous la forme

$$\lambda\theta^n = u_n\, e_I + \varepsilon_I(\lambda\theta^n) \quad ,$$

en posant :

$$\varepsilon_{p,n} = (\varepsilon_I(\lambda\theta^n))_p \quad .$$

3.1. Rappel de la caractérisation de S_I^0 . - F. BERTRANDIAS a démontré deux théorèmes que nous rappelons dans le cadre de ce chapitre, en considérant l'un comme caractérisant les éléments de S_I appartenant à S_I^0 , l'autre les éléments de V_I appartenant à S_I^0 .

THÉORÈME 1. - Un élément θ de S_I appartient à S_I^0 si, et seulement si, il existe un élément λ inversible de V_I tel que

(a) si $o \notin I$, $\lim_{n\infty} u_n = 0$,

(a') si $o \in I$, $\lim_{n\infty} \varepsilon_{0,n} = 0$.

THÉORÈME 2. - Un élément θ de V_I , vérifiant $|\theta|_p > 1$, $\forall\, p \in I$, appartient à S_I^0 si, et seulement si, il existe un élément λ inversible de V_I tel que

(A_1) si $o \notin I$, $\sum_{n=1}^{N} n\, u_n^2 = o(N)$

ou encore

(A_2) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < \infty$,

(A_1') si $o \in I$ $\sum_{n=1}^{N} n\, \varepsilon_{0,n}^2 = o(N)$

ou encore

(A_2') $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{0,n}^2 < \infty$.

3.2. Caractérisation de Σ_I^0. - On conserve les notations du paragraphe 2.2, et l'on considère un élément σ de Σ_I^0, zéro d'un polynôme.

$$A(x) = A_1(x)\, B(x) \quad ,$$

où

$$\sigma_{I_1} \text{ racine de } A_1 \text{ appartient à } S_{I_1}^0 \quad ,$$

$$\sigma_{I_2} \text{ racine de } B \text{ appartient à } T_{I_2} \quad .$$

λ étant un élément de V_I, la décomposition d'Artin de $\lambda\sigma^n$ dans V_I s'écrit

(1) $$\lambda\sigma^n = u_n + \varepsilon_I(\lambda\sigma^n) \quad ,$$

et en notant λ_{I_1} l'élément de V_{I_1} de composantes (λ_p), $p \in I_1$, la décomposition d'Artin de $\lambda_{I_1}\sigma_{I_1}^n$ s'écrit, dans V_{I_1},

(2) $$\lambda_{I_1}\sigma_{I_1}^n = v_n\, e_{I_1} + \eta_{I_1}(\lambda_{I_1}\sigma_{I_1}^n) \quad ,$$

ce qui entraîne l'égalité dans Q_p, $\forall\, p \in I_1$,

$$\lambda_p\, \sigma_p^n = u_n + \varepsilon_{p,n} = v_n + \eta_{p,n} \quad ;$$

or $\sigma_{I_1} \in S_{I_1}^0$, donc :

- <u>Si</u> $o \notin I_1$: Il existe dans V_{I_1} un élément λ_{I_1} tel que

(b) $$\lim_{n\infty} v_n = 0 \quad ,$$

et λ_{I_1} appartient à $Q_{I_1}[\sigma_{I_1}]$.

- <u>Si</u> $o \in I_1$: Il existe dans V_{I_1} un élément λ_{I_1} tel que

(b') $$\lim_{n\infty} \eta_{0,n} = 0 \quad ,$$

et λ appartient à $Q_{I_1}[\sigma_{I_1}]$.

<u>Réciproquement</u> : L'existence d'un élément λ de $Q_I[\sigma]$, dont la composante λ_{I_1} est telle que

$$\text{si} \quad o \notin I_1 , \qquad \text{(b) est vérifiée} ,$$

$$\text{si} \quad o \in I_1 , \qquad \text{(b') est vérifiée} ,$$

entraîne pour un élément σ de S_I que $\sigma_{I_1} \in S^0_{I_1}$, donc

$$\sigma \in S^0_I \qquad \text{ou} \qquad \sigma \in \Sigma^0_I .$$

Or λ étant un élément de $Q_I[\sigma]$, il suffit pour que $\sigma \notin S^0_I$ que l'on n'ait pas

$$\text{si} \quad o \notin I , \qquad \lim_{n\infty} u_n = 0 ,$$

$$\text{si} \quad o \in I , \qquad \lim_{n\infty} \varepsilon_{0,n} = 0 ,$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - La condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément σ de S_I appartienne à Σ^0_I est qu'il existe un élément λ de $Q_I[\sigma]$ et un sous-ensemble non vide $I_1 \subset I$, tel que la composante λ_{I_1} de λ étant inversible dans V_{I_1} , on ait dans la décomposition d'Artin de $\lambda_{I_1} \sigma^n_{I_1}$ dans V_{I_1}

(b) $$\text{si} \quad o \notin I_1 , \qquad \lim_{n\infty} v_n = 0 ,$$

(b') $$\text{si} \quad o \in I_1 , \qquad \lim_{n\infty} \eta_{0,n} = 0 ,$$

en supposant également réalisées les conditions suivantes :

$$\text{non-(a)} \qquad \text{ou} \qquad \text{non-(a')} .$$

3.3. Remarques.

1° On peut traduire les égalités

$$u_n + \varepsilon_{p,n} = v_n + \eta_{p,n} , \qquad \forall\, p \in I_1 ,$$

en une seule traduisant les relations dans V_{I_1}

(3) $$u_n\, e_{I_1} = v_n\, e_{I_1} + \zeta_{I_1}(u_n) ,$$

où l'on a posé $\zeta_{I_1}(u_n) = (\varepsilon_{p,n} - \eta_{p,n})$, $\forall\, p \in I$.

On a donc les relations

$$|\varepsilon_{p,n} - \eta_{p,n}|_p \leqslant 1 \ , \qquad \forall\ p \in I_1^- \ ,$$

et

$$- 1 < \varepsilon_{0,n} - \eta_{0,n} < 1 \ , \qquad \text{si} \ \ o \in I_1 \ \ ;$$

comme dans ce cas $\lim\limits_{n\infty} \eta_{0,n} = 0$, on a, à partir d'un certain rang,

$$-\frac{1}{2} < \varepsilon_{0,n} - \eta_{0,n} < \frac{1}{2} \ ,$$

sauf si l'on avait constamment $\varepsilon_{0,n} = -\frac{1}{2}$, cas que nous pouvons écarter.

Ces différentes remarques montrent que, $\forall\ n$, si $o \notin I_1$ et, pour $n > n_0$, si $o \in I$, l'égalité (3) représente la décomposition d'Artin de $u_n\, e_{I_1}$ dans V_{I_1} .

2° Nous avons caractérisé ici Σ_I^0 comme sous-ensemble de S_I en utilisant les conditions faibles (b) ou (b') dans I_1 . On pourrait envisager une caractérisation directe de Σ_I^0 où l'on ne supposerait plus a priori σ algébrique, mais elle ne ferait que traduire l'isomorphisme $\Sigma_I^0 \longleftrightarrow S_{I_1}^0 \times T_{I_2}$, ainsi nous bornerons-nous pour Σ_I^0 à la caractérisation signalée.

3° Seule intervient dans l'énoncé du théorème, la composante λ_{I_1} de λ , on pourrait donc penser que λ_{I_2} peut être choisie quelconque, mais remarquons que nous avons utilisé explicitement le fait que $\lambda \in Q_I[\sigma]$, en affirmant que la condition non-(a) ou non-(a') entraîne que $\sigma \notin S_I^0$.

4. Caractérisation de T_I .

4.1. - Dans le domaine réel, la caractérisation de T est liée :

- pour la condition suffisante, à une caractérisation des fractions rationnelles à coefficients entiers qui est la suivante :

Si une fonction $f(z)$, dont le développement de Taylor est à coefficients entiers, est méromorphe dans le cercle unité où elle n'a qu'un nombre fini de pôles, et s'il existe un réel η , vérifiant $0 < \eta < 1$, tel que

$$1 - \eta < |z| < 1 \qquad \text{entraîne} \qquad |f(z) - \alpha| > M \ ,$$

α étant un réel quelconque et M un réel > 0 , alors $f(z)$ est une fraction rationnelle.

- pour la condition nécessaire à l'existence dans tout corps de nombres algébriques, d'éléments de l'ensemble S ayant le degré du corps.

Cette dernière propriété a été généralisée par F. BERTRANDIAS qui (dans [2], chapitre III) a montré qu'il existe dans tout anneau d'éléments algébriques de V_I, des éléments de l'ensemble $S_I^{p'}$ $(p' \in J^+)$ ayant le degré de l'anneau, J désignant un sous-ensemble fermé non vide de P. C'est donc sur une généralisation du théorème de Salem, portant sur des fonctions dont les coefficients de Taylor appartiennent non plus à Z mais à $Z[I]$, que doit porter notre étude. On dira qu'une telle fonction a la propriété P_{I^-}.

4.1. Caractérisations de certaines fractions rationnelles ayant la propriété P_{I^-}. - Le but de ce paragraphe est la démonstration du lemme 2 qui est une conséquence du lemme 1.

LEMME 1. - Soit $f(z)$ une fonction ayant la propriété P_{I^-}, si elle satisfait aux conditions suivantes :

(A_p) $\forall\, p \in I^+$: Dans Ω_p, $f(z)$ est méromorphe dans $|z|_p < 1$, elle y a un nombre fini k_p pôles.

(B_p) $\forall\, p \in I^+$: $\exists\, \rho_p$ vérifiant $0 < \rho_p < 1$ tel que

$$\rho_p < |z|_p < 1 \quad \text{entraîne} \quad |f(z)| < M_p .$$

$f(z)$ est une fraction rationnelle.

On considère le déterminant de Kronecker

$$d_n = \begin{vmatrix} u_0 & \cdots & u_n \\ u_n & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix} .$$

- Les propriétés (A_0) et (B_0) entraînent :

$$\forall\, \varepsilon , \quad \exists\, n_0 \text{ tel que } n > n_0 \implies |d_n| \leqslant C(\varepsilon)\varepsilon^n \quad [6] .$$

- Les propriétés (A_p) et (B_p), $\forall\, p \in I^-$, entraînent :

Il existe un polynôme $B_p(z)$ tel que $B_p(z)\, f(z)$ soit holomorphe dans $|z|_p < 1$ et tel que l'on ait

$$B_p(z)\ f(z) = \sum_0^\infty v_n\ z^n\ , \qquad \text{où}\ |v_n|_p \leqslant p^{m_p}\ .$$

Dans ces conditions, on aura également

$$B_p^2(z)\ f(z) = \sum_0^\infty w_n\ z^n\ , \qquad \text{où}\ |w_n|_p \leqslant p^{m'_p}\ ,$$

et l'on pourra, par combinaison entre lignes et colonnes, majorer $|d_n|_p$, $\forall\ p \in I$, en posant

$$p^{r_p} = \max\ p^{m_p}\ ,\ p^{m_p'}\ ,\ |u_0|_p \ldots |u_{2k_p-2}|_p\ ,$$

$$|d_n|_p \leqslant p^{r_p(n+1)}\ ;$$

si $\ell = \prod_{p \in I^-} p^{r_p}$, $\prod_{p\in I^-} |d_n|_p \leqslant \ell^{n+1}$.

– <u>Les propriétés</u> (A_p) <u>et</u> (B_p) , $\forall\ p \in I^+$, <u>entraînent donc</u> :

$$|d_n| \prod_{p\in I^-} |d_n|_p \leqslant C(\varepsilon)\ \varepsilon^n\ \ell^{n+1}$$
$$\leqslant K(\varepsilon\ell)^n\ .$$

En prenant $\varepsilon < \frac{1}{\ell}$, on a, pour n assez grand $> n_0$,

$$|d_n| \prod_{p\in I^-} |d_n|_p < 1\ ,$$

et donc $d_n = 0$.

$f(z)$ est une fraction rationnelle .

LEMME 2. – Soit $f(z)$ une fonction ayant la propriété P_{I^-} , si elle satisfait aux conditions suivantes :

(A_p) $\forall\ p \in I^+$: $f(z)$ est méromorphe dans $|z|_p < 1$, elle y a un nombre fini k_p pôles ;

(C_0) $\exists\ \rho_0$ vérifiant $0 < \rho_0 < 1$, tel que, α étant un réel quelconque, $\rho_0 < |z| < 1$ entraîne $|f(z) - \alpha| > M_0$;

(B_p) $\forall\ p \in I_1$, où $I_1 \subset I^-$: $\exists\ \rho_p$ vérifiant $0 < \rho_p < 1$, tel que dans Ω_p , $\rho_p < |z|_p < 1$ entraîne $|f(z)|_p < M_p$;

(C_p) $\forall\ p \in I_2$ où $I_2 \subset I^-$: $\exists\ \rho_p$ vérifiant $0 < \rho_p < 1$, tel que dans Ω_p ,

$\rho_p < |z|_p < 1$ entraîne $|f(z)|_p > M_p$, où $I_1 + I_2 = I^-$ (I_1 et I_2 pouvant être vides) ;

$f(z)$ est une fraction rationnelle .

On supposera $\alpha = 0$, le cas où α est quelconque s'en déduisant facilement.

On introduit la fonction

$$g(z) = \frac{1}{1 + mz\, f(z)}$$

où $m \in Z[I_2]$, $g(z)$ a donc la propriété P_{I^-} , et nous allons montrer qu'en choisissant convenablement m , $g(z)$ satisfait aux conditions (A_p) $\forall\, p \in I^+$, (B_p) $\forall\, p \in I^+$.

<u>$g(z)$ satisfait à (A_0) et (B_0)</u>. - La démonstration reprend celle de R. SALEM [7] ; le choix de m sera donc tel que soit satisfaite la condition de Salem.

$$m\rho_0\, M > 2 \quad ,$$

ce qui entraîne :

- d'une part que $mz\, f(z) + 1$ a un nombre fini de zéros dans $|z| < 1$, donc $g(z)$ satisfait à (A_0) ;
- d'autre part que $|mz\, f(z) + 1| > m\rho_0\, M - 1 > 1$, donc $g(z)$ satisfait à (B_0).

<u>$g(z)$ satisfait à (B_p)</u> $\forall\, p \in I$.

- $\forall\, p \in I_1$, (B_p) <u>entraîne pour</u> $f(z)$:

$$\text{si} \quad \rho_p < |z|_p < 1 \implies |mz\, f(z)|_p \leqslant |m|_p\, M_p \quad ,$$

$|m|_p \leqslant 1$, on peut choisir m de telle sorte que $|m|_p\, M_p < 1$, donc

$$|1 + mz\, f(z)|_p = 1 \qquad \text{et} \qquad |g(z)|_p = 1 \quad .$$

$g(z)$ satisfait à (B_p) $\forall\, p \in I_1$.

- $\forall\, p \in I_2$, (C_p) <u>entraîne pour</u> $f(z)$:

$$\text{si} \quad \rho_p < |z|_p < 1 \implies |mz\, f(z)|_p \geqslant |m|_p\, M_p\, \rho_p \quad ,$$

comme m appartient à $Z[I_2]$, on peut le choisir tel que $|m|_p\, M_p\, \rho_p > 1$, on aura alors

$$|g(z)|_p \leqslant \frac{1}{m_p\, M_p\, \rho_p} \quad .$$

$g(z)$ satisfait donc à (B_p) $\forall\, p \in I_2$.

$g(z)$ <u>satisfait à</u> (A_p) $\forall\ p \in I$. - La fonction $1 + mz\ f(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans $|z|_p < 1$; en effet, la condition (A_p) entraîne qu'il existe un polynôme $\Psi(z)$ tel que la fonction $\Psi(z)(1 + mz\ f(z))$ soit holomorphe dans le cercle unité. Le polygone de Newton de $\Psi(z)(1 + mz\ f(z))$ a une direction asymptotique horizontale, et la fonction $\Psi(z)(1 + mz\ f(z))$ n'a donc qu'un nombre fini de zéros dans tout disque $|z|_p \leqslant r_p < 1$, or au voisinage du cercle unité on a

$$\text{si}\quad p \in I_1^- , \qquad |1 + mz\ f(z)|_p = 1 \ ,$$

$$\text{si}\quad p \in I_2^- , \qquad |1 + mz\ f(z)|_p = |m|_p\ M_p\ \rho_p > 1 \ ,$$

dans les deux cas $1 + mz\ f(z)$ n'a pas de zéro au voisinage du cercle unité.

$g(z)$ satisfait donc à (A_p) $\forall\ p \in I$.

$g(z)$ satisfaisant à (A_p) et (B_p) $\forall\ p \in I^+$, est une fraction rationnelle.

$f(z)$ est donc également une fraction rationnelle.

4.2. <u>Caractérisation de</u> T_I . - Nous garderons, dans l'énonoé et la démonstration du théorème, les notations utilisées précédemment, notamment en ce qui concerne la décomposition d'Artin de $\lambda\tau^n$ dans V_I .

$$\lambda\tau^n = u_n\ e_I + \varepsilon_I(\lambda\tau^n) \ , \qquad \text{où}\quad (\varepsilon_I(\lambda\tau^n))_p = \varepsilon_{p,n}$$

et

$$|\tau|_p = p^{t_p} \ , \qquad \forall\ p \in I^- \ .$$

(α) <u>Enoncé du théorème</u>. - La condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément τ de V_I , vérifiant $|\tau|_p > 1$, $\forall\ p \in I$, appartienne à T_I est qu'il existe un élément λ inversible de V_I et un nombre réel M ou M' tels que l'on ait, pour $|z| < 1$,

$$\text{(c)} \qquad \text{si}\quad o \notin I \ , \qquad R(\sum_0^\infty u_n\ z^n) \geqslant M \ ,$$

$$\text{(c')} \qquad \text{si}\quad o \in I \ , \qquad R(\sum_0^\infty \varepsilon_{0,n}\ z^n) \leqslant M' \ ,$$

en supposant également réalisées les conditions :

non-(a) ou non-(a') ,

non-(b) ou non-(b') .

(β) Démonstration de la condition suffisante. - Le point essentiel de la démonstration est de montrer que la fonction

$$f(z) = \sum_0^\infty u_n\, z^n$$

est une fraction rationnelle en tenant compte de la condition (c) ou (c'), on utilisera pour cela le lemme 2 établi précédemment.

Etude de $f(z)$ dans C. - L'inégalité $|u_n| \leqslant \frac{1}{2}$ si $o \notin I$, ou l'égalité $\lambda_0\, \tau_0^n = u_n + \varepsilon_{0,n}$ où $\varepsilon_{0,n}$ vérifie $|\varepsilon_{0,n}| \leqslant \frac{1}{2}$ si $o \in I$, entraîne que la fonction $f(z)$ a zéro ou 1 pôle intérieur au cercle unité.

D'autre part :

- Si $o \notin I$, on a, pour z vérifiant $\rho_0 < |z| < 1$,

$$R\left(\sum_0^\infty u_n\, z^n\right) \geqslant M , \qquad \text{donc} \qquad |f(z)| \geqslant M .$$

- Si $o \in I$, on a, pour z vérifiant $\dfrac{\tau_0 + 1}{2\tau_0} < |z| < 1$,

$$|1 - \tau_0\, z| > \frac{1}{2}\, |\tau_0 - 1| ,$$

donc

$$\left| \sum_0^\infty u_n\, z^n + \sum_0^\infty \varepsilon_{0,n}\, z^n \right| < \frac{2|\lambda_0|}{\tau_0 - 1} ,$$

en tenant compte de (c'), dans la couronne $\dfrac{\tau_0 + 1}{2\tau_0} < |z| < 1$, $R\left(\sum_0^\infty u_n\, z^n\right)$ est donc bornée inférieurement.

$f(z)$ satisfait donc à (A_0) et (C_0).

Etude de $f(z)$ dans Ω_p, $\forall\, p \in I$. - L'égalité

$$\lambda_p\, \tau_p^n = u_n + \varepsilon_{p,n} , \qquad \text{où} \quad |\varepsilon_{p,n}|_p \leqslant 1 ,$$

entraîne que la fonction $f(z) = \sum_0^\infty u_n\, z^n$ a un seul pôle $\dfrac{1}{\tau_p}$ dans $|z|_p < 1$.

D'autre part, pour $p^{-t_p} < |z|_p < 1$, on a

$$\left|\frac{\lambda_p}{1 - \tau_p\, z}\right|_p < |\lambda|_p ,$$

donc $|f(z)|_p \leqslant \max |\lambda|_p, 1$.

$f(z)$ satisfait donc à (A_p) et (B_p) $\forall\, p \in I$.

D'après le lemme 2, $f(z)$ est une fraction rationnelle ; d'autre part, $f(z)$ ayant :

- un pôle $\frac{1}{\tau_p}$ intérieur à $|z|_p < 1$ dans Ω_p , $\forall\, p \in I$,
- aucun pôle intérieur à $|z|_p < 1$ dans Ω_p , $\forall\, p \notin I$,

τ appartient à S_I , et λ appartient à $Q_I[\tau]$, compte tenu de ce dernier fait.

Si τ appartenait à S_I^0 , (a) ou (a') seraient réalisées.

Si τ appartenait à Σ_I^0 , (b) ou (b') seraient réalisées.

τ appartient à T_I .

(γ) Démonstration de la condition nécessaire. - Soit τ un élément de T_I , zéro d'un polynôme $\pi(x)$ de degré $2s$, réciproque, qui est le polynôme minimal de τ , mis sous sa forme à coefficients entiers.

Nous notons :

$$\tau_p \; , \; \frac{1}{\tau_p} \; , \; \alpha_p^{(i)} \; , \; \alpha_p^{(i)-1} \qquad i = 2 \; , \; \dots \; , \; s$$

les zéros de $\pi(x)$ dans Ω_p , $\forall\, p \in I$ (en particulier 0 si $o \in I$),

$$\alpha_0^{(i)} \; , \; \alpha_0^{(i)-1} \qquad i = 1 \; , \; \dots \; , \; s$$

les zéros de $\pi(x)$ dans C si $o \notin I$, et nous posons

$$\sigma_p = \tau_p + \frac{1}{\tau_p} \; , \qquad \rho_p^{(i)} = \alpha_p^{(i)} + \alpha_p^{(i)-1} \qquad i = 2 \; , \; \dots \; , \; s$$

$\forall\, p \in I$ (en particulier 0 si $o \in I$),

$$\rho_0^{(i)} = \alpha_0^{(i)} + \alpha_0^{(i)-1} \qquad i = 1 \; , \; \dots \; , \; s \; , \quad \text{si } o \notin I \; .$$

On peut donc écrire $\sigma = \tau + \frac{1}{\tau}$ où σ est l'élément de V_I , de composante $\tau_p + \frac{1}{\tau_p}$, et qui vérifie donc

$$|\sigma|_p = |\tau|_p = p^{t_p} \; .$$

Nous serons amenés à distinguer, dans cette démonstration, le cas où $o \notin I$ et celui où $o \in I$.

Si $o \notin I$, les déterminants

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & \rho_0^{(1)} & \cdots & \rho_0^{(1)s-1} \\ 1 & \rho_0^{(2)} & \cdots & \rho_0^{(2)s-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \rho_0^{(s)} & \cdots & \rho_0^{(s)s-1} \end{vmatrix}$$

et, $\forall\ p \in I$,

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_p & \cdots & \sigma_p^{s-1} \\ 1 & \rho_p^{(2)} & \cdots & \rho_p^{(2)s-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \rho_p^{(s)} & \cdots & \rho_p^{(s)s-1} \end{vmatrix}$$

étant tous différents de 0 , on peut trouver des entiers rationnels $A_1 , \dots , A_s$ tels que

$$|A_1\ \rho_0^{(1)s-1} + A_2\ \rho_0^{(2)s-2} + \dots + A_s| < c$$

$$|A_1\ \rho_0^{(2)s-1} + A_2\ \rho_0^{(2)s-2} + \dots + A_s| < c$$

$$\vdots$$

$$|A_1\ \rho_0^{(s)s-1} + A_2\ \rho_0^{(s)s-2} + \dots + A_s| < c$$

et, $\forall\ p \in I$,

$$|A_1\ \sigma_p^{s-1} + A_2\ \sigma_p^{s-2} + \dots + A_s|_p < p^{r_p}$$

$$|A_1\ \rho_p^{(2)s-1} + A_2\ \rho_p^{(2)s-2} + \dots + A_s|_p < p^{-1}$$

$$\vdots$$

$$|A_1\ \rho_p^{(s)s-1} + A_2\ \rho_p^{(s)s-2} + \dots + A_s| < p^{-1}$$

(c étant un réel < 1 , r_p un entier rationnel > 0) à condition que

$$c^s \prod_{p\in I} p^{r_p} \prod_{p\in I} p^{-(s-1)} \geqslant \Delta_0 \prod_{p\in I} |\Delta_p|_p \quad ,$$

inégalité établie par F. BERTRANDIAS ([2], chapitre III).

Dans ces conditions, l'élément

$$\theta = A_1\, \sigma^{s-1} + A_2\, \sigma^{s-2} + \dots + A_s$$

de V_I est un élément de $S_I^{p'}$ $(p' \in I^+)$, zéro d'un polynôme $A(x)$, dont les zéros complexes, soient $\beta_0^{(1)}$, ... , $\beta_0^{(s)}$, sont tous réels et vérifient

$$|\beta_0^{(i)}| < 1 , \qquad \forall\, i = 1 , \dots , s ,$$

et, h étant un entier rationnel positif, l'élément $\lambda = \theta^{2h}$ de V_I est un élément de $S_I^{p'}$ $(p' \in I^+)$, zéro d'un polynôme B dont les zéros complexes vérifient tous

$$0 < \gamma_0^{(i)} = \beta_0^{(i)2h} < 1 .$$

Or, en notant $\gamma^{(i)}$ les zéros de B dans V_I , les égalités, $\forall\, p \in I$,

$$\lambda_p[\tau_p^n + \tau_p^{-n}] + \sum_{i=2}^{s} \gamma_p^{(i)}[\alpha_p^{(i)n} + \alpha_p^{(i)-n}] = \sum_{i=1}^{s} \gamma_0^{(i)}[\alpha_0^{(i)n} + \alpha_0^{(i)-n}] = v_n ,$$

où v_n est un élément de $Z[I]$, mettent en évidence les deux points suivants :

(i) En posant dans V_I

$$\varphi_n = (\varphi_{p,n}) , \qquad \text{où } \varphi_{p,n} = \lambda_p\, \tau_p^{-n} + \sum_2^s \gamma_p^{(i)}[\alpha_p^{(i)n} + \alpha_p^{(i)-n}] ,$$

si n_0 est le plus petit indice tel que $|\lambda_p\, \tau_p^{-n}| < 1$, on a

$$|\varphi_{p,n}|_p \leqslant 1 , \qquad \forall\, p \in I .$$

D'autre part, l'expression de $v_n = \sum_{i=1}^{s} \gamma_0^{(i)}[\alpha_0^{(i)n} + \alpha_0^{(i)-n}]$ donne la majoration $|v_n| \leqslant 2s \max \gamma_0^{(i)}$; en prenant h assez grand pour que

$$\max \gamma_0^{(i)} < \frac{1}{4s} ,$$

on a

$$|v_n| < \frac{1}{2} ,$$

et, pour $n > n_0$, v_n représente donc la partie principale u_n de $\lambda\tau^n$ dans V_I .

(ii) En écrivant alors la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} v_n\, z^n$ dans C sous la forme

$$\sum_0^\infty v_n\ z^n = \sum_{i=1}^s \gamma_0^{(i)}\left[\frac{1}{1-\alpha_0^{(i)}\ z} + \frac{1}{1-\alpha_0^{(i)-1}\ z}\right] ,$$

on a, d'après les propriétés de la transformation conforme $(|\alpha_0^{(i)}| = 1 , \ \forall\ i)$,

$$R\left[\frac{1}{1-\alpha_0^{(i)}\ z}\right] > \frac{1}{2} \qquad \text{pour} \quad |z| < 1 ,$$

et, pour $|z| < 1$,

$$R\left[\sum_0^\infty v_n\ z^n\right] \geq \sum \gamma_0^{(i)} ,$$

donc la fonction

$$f(z) = \sum_0^\infty u_n\ z^n = \sum_0^{n_0} u_n\ z^n + \sum_{n_0+1}^\infty v_n\ z^n$$

vérifie $R[f(z)] \geq M$ pour $|z| < 1$,

$f(z)$ satisfait à la condition (c) .

Si $o \in I$, les déterminants

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_p & \dots & \sigma_p^{s-1} \\ 1 & \rho_p^{(2)} & \dots & \rho_p^{(2)s-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \rho_p^{(s)} & \dots & \rho_p^{(s)s-1} \end{vmatrix}$$

$\forall\ p \in I$ (en particulier 0), étant tous différents de 0 , on peut trouver, d'après le théorème de F. Bertrandias, des entiers rationnels A_0 , ... , A_s tels que

$$|A_1\ \sigma_0^{s-1} + A_2\ \sigma_0^{s-2} + \dots + A_s| \leq C$$

$$|A_1\ \rho_0^{(2)s-1} + A_2\ \rho_0^{(2)s-2} + \dots + A_s| \leq c$$

$$\vdots$$

$$|A_1\ \rho_0^{(s)s-1} + A_2\ \rho_0^{(s)s-2} + \dots + A_s| \leq c$$

et, $\forall\ p \in I^-$,

$$|A_1\,\sigma_p^{s-1} + A_2\,\sigma_p^{s-2} + \dots + A_s|_p \leqslant p^{r_p}$$

$$|A_1\,\rho_p^{(2)s-1} + A_2\,\rho_p^{(2)s-2} + \dots + A_s|_p \leqslant p^{-1}$$

$$\vdots$$

$$|A_1\,\rho_p^{(s)s-1} + A_2\,\rho_p^{(s)s-2} + \dots + A_s|_p \leqslant p^{-1}$$

(C étant un réel > 1 , c un réel < 1 , r_p un entier rationnel > 0) à condition que

$$C\,c^{s-1} \prod_{p\in I^-} p^{r_p} \prod_{p\in I^-} p^{-(s-1)} \geqslant |\Delta_0| \prod_{p\in I^-} |\Delta_p|_p \;.$$

L'élément $\theta = A_1\,\sigma^{s-1} + A_2\,\sigma^{s-2} + \dots + A_s$, dont les conjugués dans V_I sont

$$\beta^{(i)} = A_1\,\rho^{(i)s-1} + A_2\,\rho^{(i)s-2} + \dots + A_s \;,$$

est un élément de $S_I^{p'}$, $p' \in I^+$.

θ_0 et ses conjugués $\beta_0^{(i)}$ sont tous réels, donc h , étant un entier rationnel positif, en prenant $\lambda = \theta^{2h}$, élément dont les conjugués sont dans V_I ,

$$\gamma^{(i)} = \beta^{(i)2h} \qquad i = 2 , \dots , s \;,$$

les composantes réelles λ_0 et $\gamma_0^{(i)}$, $i = 2 , \dots , s$, sont toutes positives et vérifient

$$\begin{cases} \lambda_0 > 1 \\ 0 < \gamma_0 < 1 \;. \end{cases}$$

Les égalités, valables $\forall\, p \in I$, en particulier 0 ,

$$\lambda_p[\tau_p^n + \tau_p^{-n}] + \sum_{i=2}^{s} \gamma_p^{(i)}[\alpha_p^{(i)n} + \alpha_p^{(i)-n}] = v_n \;,$$

où v_n est un élément de $Z[I]$, entraînent :

- <u>En prenant</u> :

n_0 <u>défini par</u>

$$n_0 = \text{plus petit entier tel que } |\lambda_p\,\tau_p^{-n}| \leqslant 1 \;,$$

pour $n > n_0$

$\varphi_{p,n} = \lambda_p \tau_p^{-n} + \sum_{i=2}^{s} \gamma_p^{(i)}[\alpha_p^{(i)n} + \alpha_p^{(i)-n}]$ vérifie $|\varphi_{p,n}|_p \leqslant 1$, $\forall\, p \in I^-$,

h <u>de telle sorte que</u>

$$\sum_{i=2}^{s} \gamma_0^{(i)} < \frac{1}{8} ,$$

<u>et</u> n_1 <u>défini par</u>

$$n_1 = \text{plus petit entier tel que } |\lambda_0 \tau_0^{-n}| < \frac{1}{4} ,$$

pour $n > n_1$

$$|\varphi_{0,n}| < \frac{1}{2} ,$$

si l'on pose

$$m = \max(n_0 , n_1) , \qquad n > m$$

entraîne

$$|\varphi_{p,n}|_p \leqslant 1 , \quad \forall\, p \in I^- ,$$

$$|\varphi_{0,n}| < \frac{1}{2} ,$$

donc $v_n = u_n$ partie principale de $\lambda\tau^n$ dans V_I .

- La démonstration se termine alors comme celle de R. SALEM [7].

On trouve, après calculs, l'inégalité

$$R[\sum_{0}^{\infty} \varepsilon_{0,n} z^n] < \frac{3m}{4} + \frac{2\lambda_0 \tau_0}{\tau_0^2 - 1} .$$

La condition (c') est donc satisfaite.

Ce théorème permet donc de mettre encore en évidence l'analogie entre T_I et T, analogie que laissaient prévoir, d'une part la définition de T_I , et d'autre part le théorème déjà démontré [4] : Tout élément de S_I^0 est limite d'éléments de T_I . Remarquons du reste que dans la démonstration que nous avions donnée, nous n'avons envisagé que le cas général où P et Q sont distincts, or ces deux polynômes peuvent ne pas être distincts dans le cas où $o \in I$ et où l'élément θ de S_I^0 envisagé est quadratique, on montre alors la propriété envisagée en faisant intervenir, comme dans le domaine réel, les polynômes de Čebyšev.

Nous allons, dans un dernier paragraphe, envisager la répartition des éléments

$S_I^{p'}$ $(p' \neq 0)$, introduits par F. BERTRANDIAS suivant les trois classes de

$$S_I = S_I^0 , \Sigma_I^0 , T_I \ .$$

5. Répartition des éléments $S_I^{p'}$ $(p' \neq 0)$.

Les ensembles S_I^0 , Σ_I^0 et T_I formant une partition de S_I , pour un élément θ de $S_I^{p'}$ $(p' \neq 0)$, trois cas sont possibles.

- θ appartient à S_I^0 . – θ appartient alors à S_I^p , $p \in p' \cup 0$.
- θ appartient à Σ_I^0 . – θ est alors zéro d'un polynôme de la forme

$$A(x) = A_1(x)\ B(x) \ .$$

Dans $\Omega_{p'}$, B n'a aucun zéro sur le cercle unité, ce qui impose

$p' \in I_2$

B est du 2e degré, et donc $o \notin I_2$.

- θ appartient à T_I . – Le polynôme B , dont θ est zéro, a dans Ω_p , tous ses zéros intérieurs au cercle unité (sauf $\theta_{p'}$, si $p' \in I$), ce qui impose

$p' \in I$

B est du 2e degré, et donc $o \notin I$,

résultats que l'on peut encore regrouper sous la forme suivante :

soit θ un élément de $S_I^{p'}$.

Si $o \notin I$:

- si $p' \notin I$, θ appartient à S_I^p , $p \in p' \cup 0$.
- si $p' \in I$, on a les trois cas possibles

  θ appartient à S_I^0 ,

  θ appartient à Σ_I^0 et $p' \in I_2$,

  θ est un élément de T_I du 2e degré (il en existe si $o \notin I$) .

Si $o \in I$:

- si $p' \notin I$, θ appartient à S_I^p , $p \in p' \cup 0$.

- si $p' \in I$, on a les deux cas possibles

θ appartient à S_I^0 ,

θ appartient à Σ_I^0 , alors $p' \in I_2$ et $o \notin I_2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions, New York and Princeton University, 1950-1951 (multigraphié).

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, VI + 98 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[3] CHABAUTY (Claude). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.

[4] DECOMPS-GUILLOUX (Annette). - Répartition modulo 1 de $\lambda\alpha^n$ dans les adèles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 7e année, 1965/66, n° 5, 14 p.

[5] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).

[6] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.

[7] SALEM (Raphael). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.