SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.
THÉORIE DES NOMBRES

FRANÇOIS DRESS

Déterminants de Hankel et quotients de séries formelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, n° 2 (1965-1966), exp. n° 20, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_2_A8_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des Nombres)
7e année, 1965/66, n° 20

16 mai 1966

DÉTERMINANTS DE HANKEL ET QUOTIENTS DE SÉRIES FORMELLES

par François DRESS

1. Définitions.

A désignera un anneau commutatif, possédant un élément unité, intègre (sauf dans la proposition 1), et K son corps des fractions. Les éléments de A seront appelés entiers.

Outre les anneaux classiques de polynômes et de séries formelles, nous aurons à considérer l'anneau $\mathcal{Q}$ des quotients de séries formelles à coefficients entiers :

$$\mathcal{Q} = \{F(X) = \frac{U(X)}{V(X)} \mid U , V \in A[[X]] , \quad V(0) \neq 0\} ,$$

qui est un sous-anneau de $K[[X]]$.

Déterminants de Hankel et Hadamard. - Etant donnée $F(X) = \sum_0^\infty a_n X^n$ une série formelle de $A[[X]]$ ou de $K[[X]]$, nous considérerons ses déterminants de Hankel

$$H_m^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} a_m & \cdots & a_{m+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+p} & \cdots & a_{m+2p} \end{vmatrix}$$

ainsi que d'autres déterminants plus généraux, mentionnés pour la première fois par J. HADAMARD dans sa thèse [5] :

$$D_m^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_0 & \cdots & a_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & \cdots & a_m & \cdots & a_{m+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_p & \cdots & a_{m+p} & \cdots & a_{m+2p} \end{vmatrix}$$

et

$$D_{m_0,m_1,\ldots,m_p}^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} a_{m_0} & a_{m_1} & \cdots & a_{m_p} \\ a_{m_0+1} & a_{m_1+1} & \cdots & a_{m_p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m_0+p} & a_{m_1+p} & \cdots & a_{m_p+p} \end{vmatrix}$$

En étendant ces définitions aux séries du corps $K((X))$ des séries formelles généralisées, il apparaît que

$$D_m^{(p)}(F) = H_{-m}^{(m+p)}(F) \quad ;$$

ces déterminants peuvent donc être considérés comme des déterminants de Hankel, et nous réserverons l'appellation de déterminants de Hadamard aux $D^{(p)}_{m_0,m_1,\dots,m_p}(F)$.

2. Déterminants des produits et quotients de séries.

Nous abandonnons provisoirement l'hypothèse de l'intégrité de l'anneau A .

Considérons deux séries de $A[[X]]$ et leur produit :

$$V(X) = \sum_0^\infty v_n X^n , \quad F(X) = \sum_0^\infty a_n X^n , \quad VF = U(X) = \sum_0^\infty u_n X^n .$$

Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $v_0 \neq 0$. Nous supposerons, en outre, que les indices m_i sont ordonnés en croissant, de sorte que $m_p + p$ est le plus grand indice figurant dans le déterminant de Hadamard que nous allons étudier.

Nous nous proposons de calculer le produit :

$$v_0^{m_p+p+1} \; D^{(p)}_{m_0,m_1,\dots,m_p}(F) \quad ,$$

que nous écrirons sous la forme :

$$\begin{vmatrix} v_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_1 & v_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m_p+p-1} & v_{m_p+p-2} & \dots & v_0 & 0 \\ v_{m_p+p} & v_{m_p+p-1} & \dots & v_1 & v_0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & a_{m_0-1} & \dots & a_{m_p-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_{m_0} & \dots & a_{m_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{m_0+p} & \dots & a_{m_p+p} \end{vmatrix}$$

Maintenant, si nous effectuons (lignes par colonnes) ce produit de déterminants, et si nous tenons compte des relations qui expriment que $V(X)\,F(X) = U(X)$, soient :

$$\begin{cases} v_0 \; a_0 = u_0 \\ v_1 \; a_0 + v_0 \; a_1 = u_1 \\ \dots \\ v_{m_p+p}\; a_0 + v_{m_p+p-1}\; a_1 + \dots + v_0 \; a_{m_p+p} = u_{m_p} \end{cases} ,$$

il vient :

$$v_0^{m_p+p+1}\; D^{(p)}_{m_0,m_1,\dots,m_p}(F) = \begin{vmatrix} v_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & u_0 \\ v_1 & v_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & u_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & u_0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & v_0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & u_{m_0} & \dots & u_{m_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m_p+p} & v_{m_p+p-1} & \dots & v_{p+1} & u_{m_0+p} & \dots & u_{m_p+p} \end{vmatrix}$$

déterminant dont m_p colonnes sont formées de coefficients de $V(X)$, avec une structure "régulièrement décalée", et les $p+1$ autres colonnes de coefficients de $U(X)$, avec une structure analogue à celle du déterminant de Hadamard

$$D^{(p)}_{m_0,m_1,\dots,m_p}(F) \quad .$$

Si nous désignons par

$$N^{(p)}_{m_0,m_1,\dots,m_p}(U\,,\,V) \quad ,$$

le "grand" déterminant obtenu ci-dessus, nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 1. - Soient A un anneau commutatif (non nécessairement intègre), $U(X)$, $V(X)$, $F(X)$, trois séries de $A[[X]]$ telles que $VF = U$, $v_0 = V(0) \neq 0$. On a alors

$$v_0^{m_p+p+1}\; D^{(p)}_{m_0,\dots,m_p}(F) = N^{(p)}_{m_0,\dots,m_p}(U\,,\,V) \quad .$$

Comme par la suite, nous nous placerons exclusivement dans le cas où A est intègre, nous donnons une seconde version sous laquelle nous ferons usage de cette proposition :

PROPOSITION 1 bis. - Soient $U(X)$ et $V(X)$ deux séries de $K[[X]]$, $v_0 = V(0) \neq 0$. Alors :

$$D^{(p)}_{m_0,\dots,m_p}\left(\frac{U(X)}{V(X)}\right) = v_0^{-(m_p+p+1)}\; N^{(p)}_{m_0,\dots,m_p}(U\,,\,V) \quad .$$

3. Applications.

Nous rappellerons brièvement, dans ce paragraphe, un certain nombre de résultats connus que l'on peut retrouver très rapidement.

Caractérisation des fractions rationnelles. - Si $U(X)$ et $V(X)$ sont des polynômes de degrés respectifs λ et μ, alors les déterminants de Hankel $H_m^{(p)}$ de la fraction rationnelle $F(X)$ sont nuls dès que $m + p \geqslant \lambda + 1$ et $p \geqslant \mu$ (en effet, la dernière ligne du déterminant $N_m^{(p)}$ est alors formée de zéros). Cependant, notre identité ne permet pas d'obtenir de démonstration de la réciproque.

Déterminants relatifs à l'inverse d'une série. - Si $G(X) = \frac{1}{F(X)}$, les déterminants de Hankel de F et de G sont liés par la relation (J. HADAMARD [5], E. BOREL [1]) :

$$H_m^{(p)}(G) = \pm \left(\frac{v_0}{u_0}\right)^{m+2p+1} H_{2-m}^{(m+p-1)}(F)$$

(en effet, les déterminants N sont les mêmes à un certain nombre près de permutations entre les colonnes des u_i et des v_j).

Quotients de séries à coefficients entiers. - Si $U(X)$ et $V(X)$ appartiennent à $A[[X]]$, les coefficients du quotient $F(X)$ sont de la forme $a_n = \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}}$, et on a

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{m+2p+1}}$$

(dans le cas $A = \underset{\sim}{Z}$, voir F. DRESS [3] et, pour les applications, C. PISOT [6]). Ce genre de propriété sera d'ailleurs développé au paragraphe suivant avec l'introduction des familles ξ_q.

Fonctions à caractéristique bornée. - Si $F(z)$, série entière de la variable complexe, est à caractéristique bornée à l'intérieur du cercle-unité (i. e. $F(z)$ est quotient de deux fonctions bornées dans $|z| < 1$) ou, plus généralement, si $F(z)$ est quotient de deux séries entières $U(z)$ et $V(z)$ telles que $\sum_0^\infty |u_n|^2 < \infty$ et $\sum_0^\infty |v_n|^2 < \infty$, alors on a (D. CANTOR [2]) :

$$\lim_{p\to\infty} |K_p(F)|^{1/p} = 0 ,$$

où les $K_p = H_0^{(p)}$ sont les déterminants de Kronecker de F.

Pour démontrer ce résultat, il suffit d'écrire que

$$K_p = H_0^{(p)} = v_0^{-(2p+1)} N_0^{(p)} ,$$

où

$$N_0^{(p)} = \begin{vmatrix} v_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & u_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & v_0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & v_1 & u_0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{k+p} & \cdots & v_{k+1} & u_k & \cdots & u_{k+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{2p} & \cdots & v_{p+1} & u_p & \cdots & u_{2p} \end{vmatrix}$$

puis d'appliquer la majoration de Hadamard à $N_0^{(p)}$ suivant ses lignes. Cette majoration s'effectue aisément en remarquant que, d'une part, les premières sommes $\sum |u_n|^2 + \sum |v_n|^2$ sont bornées, et que, d'autre part, les dernières sommes $\sum_k^{k+p} |u_n|^2 + \sum_{k+1}^{k+p} |v_n|^2$ sont majorées par $\varepsilon(k)$, qui tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini.

Remarque 1. - On a bien, évidemment, le même résultat pour n'importe quel déterminant de Hankel :

$$\lim_{p\to\infty} |H_m^{(p)}(F)|^{1/p} = 0 \quad .$$

Remarque 2. - Il est possible d'aboutir à la même conclusion :

$$\lim |K_p|^{1/p} = 0$$

lorsque $\sum |u_n|^2$ et $\sum |v_n|^2$ ne convergent pas, à la condition que ces séries décroissent assez rapidement mais surtout assez régulièrement, par exemple quand u_n et $v_n = O(\frac{1}{\sqrt{n \log n}})$. La démonstration, que nous ne donnerons pas ici, repose sur une compensation de la croissance des premiers termes

$$L_k^2 = \sum_k^{k+p} |u_n|^2 + \sum_{k+1}^{k+p} |v_n|^2$$

par une décroissance suffisante des derniers.

4. Etude des familles Φ_q .

Nous classerons les éléments de l'anneau $\mathfrak{Q}$ des quotients de séries formelles de $A[[X]]$ de la manière suivante :

<u>Définition</u>. - $F(X)$ appartient à la famille $\Phi_q \subset \mathfrak{Q}$ si, et seulement si, il existe une expression $F(X) = \frac{U(X)}{V(X)}$ (où U, $V \in A[[X]]$) telle que

$$v_0 = V(0) = q \quad (\neq 0) \quad .$$

Il est clair que :

- si q_1 et q_2 sont associés, $\Phi_{q_1} = \Phi_{q_2}$;
- $\Phi_1 = A[[X]]$;
- si q' est un diviseur de q, $\Phi_{q'} \subset \Phi_q$ (en particulier $\Phi_1 \subset \Phi_q$ quel que soit q).

<u>Propriété fondamentale</u>. - Si $F(X) \in \Phi_q$, ses déterminants de Hankel sont de la forme :

$$H_m^{(p)} = \frac{N_m^{(p)}}{q^{m+2p+1}} \quad , \quad N_m^{(p)} \text{ entier}$$

(c'est une conséquence triviale et déjà remarquée de la proposition 1 bis).

Il se pose alors le problème de savoir à quelles conditions sur ses coefficients et ses déterminants de Hankel une série $F \in K[[X]]$ appartient à une famille Φ_q. Il paraît malaisé d'établir un critère général, mais nous donnerons néanmoins des conditions nécessaires et suffisantes pour que F appartienne à Φ_q, conditions valables seulement dans une certaine "proportion" des éventualités possibles.

Supposons que nous ayons déterminé $2n$ éléments de A,

$$u_0 , \dots , u_{n-1} \; ; \qquad v_0 , \dots , v_{n-1} \quad ,$$

tels que

$$\frac{u_0 + u_1 X + \dots + u_{n-1} X^{n-1}}{v_0 + v_1 X + \dots + v_{n-1} X^{n-1}} = \sum_0^\infty \alpha_k X^k \quad , \qquad \text{avec } \alpha_k = a_k \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

(nous supposons, a priori, que les coefficients a_k de $F(X)$ sont de la forme $a_k = \frac{N_k}{q^{k+1}}$, où $q = v_0$, $N_k \in A$). Nous allons établir une condition suffisante pour affirmer qu'il existe deux éléments de A, u_n et v_n, tels que

$$\frac{u_0 + u_1 X + \dots + u_{n-1} X^{n-1} + u_n X^n}{v_0 + v_1 X + \dots + v_{n-1} X^{n-1} + v_n X^n} = B_{u_n,v_n}(X) = \sum_0^\infty \beta_k X^k \quad ,$$

$$\text{avec } \beta_k = a_k \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n \quad .$$

Et si cette condition est vérifiée pour toutes les valeurs de n , nous aurons alors montré que F appartient à Φ_q .

La relation

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{n-j} v_j = u_n$$

donne l'expression :

$$\beta_n = \frac{M_n}{v_0^{n+1}} + \frac{v_0 u_n - u_0 v_n}{v_0^2} = \frac{M_n + v_0^{n-1}(v_0 u_n - u_0 v_n)}{v_0^{n+1}} ,$$

où M_n ($\in A$) ne dépend que des u_i et v_j jusqu'à l'ordre $n-1$. Il apparaît alors une condition suffisante pour que u_n et v_n existent :

$$\begin{cases} \text{L'anneau } A \text{ est principal et } (u_0 , v_0) = 1 \text{ (donc } u_0 \text{ et } v_0 \text{ vérifient une identité de Bezont) ;} \\ v_0^{n-1} \text{ divise } M_n - N_n \text{ pour tout } n . \end{cases}$$

Nous supposons à partir de maintenant que la première de ces conditions (A principal et u_0 , v_0 premiers entre eux) est réalisée. Il nous reste alors à traduire la seconde ($v_0^{n-1} \mid M_n - N_n$) en condition sur les déterminants de Hankel de F.

Pour cela, considérons les deux déterminants :

$$H_{n-2p}^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} a_{n-2p} & \cdots & a_{n-p-1} & a_{n-p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p-1} & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-p} & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{n-2p} & \cdots & a_{n-p-1} & a_{n-p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p-1} & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-p} & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix} + a_n \begin{vmatrix} a_{n-2p} & \cdots & a_{n-p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p-1} & \cdots & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

et

$$H_{n-2p}^{(p)}(B) = \begin{vmatrix} a_{n-2p} & \cdots & a_{n-p-1} & a_{n-p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p-1} & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-p} & \cdots & a_{n-1} & \beta_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{n-2p} & \cdots & a_{n-p-1} & a_{n-p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p-1} & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-p} & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix} + \beta_n \begin{vmatrix} a_{n-2p} & \cdots & a_{n-p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p-1} & \cdots & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

Or nous avons :

$$H_{n-2p}^{(p)}(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}} \qquad \text{en le posant comme hypothèse ,}$$

$$H_{n-2p}^{(p)}(B) = \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}} \qquad \text{par construction de } B \text{ .}$$

Il vient alors :

$$H_{n-2p}^{(p)}(F) - H_{n-2p}^{(p)}(B) = (a_n - \beta_n)\, H_{n-2p}^{(p-1)}(F)$$

$$= \frac{N_n - M_n}{v_0^{n+1}}\, H_{n-2p}^{(p-1)} - \frac{v_0^{n-1}(v_0\, u_n - u_0\, v_n)}{v_0^{n+1}}\, H_{n-2p}^{(p-1)}$$

$$= \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}} \text{ .}$$

De sorte que, si maintenant, après avoir posé l'hypothèse que $H_{n-2p}^{(p)}(F) = \dfrac{\text{entier}}{v_0^{n+1}}$, nous ajoutons $H_{n-2p}^{(p-1)}(F) = \dfrac{\text{entier}}{v_0^{n-1}}$, il vient :

$$\frac{N_n - M_n}{v_0^{n+1}}\, H_{n-2p}^{(p-1)}(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}} \text{ ,}$$

ou encore

$$(N_n - M_n) \frac{N_{n-2p}^{(p-1)}(F)}{v_0^{n-1}} = \text{entier} \text{ .}$$

Ce qui nous permet d'énoncer : pour que v_0^{n-1} divise $N_n - M_n$, il suffit qu'il existe au moins un déterminant

$$H_{n-2p}^{(p-1)}(F) = \frac{N_{n-2p}^{(p-1)}}{v_0^{n-1}} \qquad \text{tel que} \quad (N_{n-2p}^{(p-1)}, v_0) = 1 \quad .$$

Or, en raison de l'hypothèse faite $(u_0 , v_0) = 1$, nous connaissons un tel déterminant pour chaque n , celui correspondant à $p = n - 1$:

$$H_{-n+2}^{(n-2)} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & \cdots & a_{n-2} \end{vmatrix} = \pm a_0^{n-1} = \frac{\pm u_0^{n-1}}{v_0^{n-1}} \quad .$$

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 2. - <u>L'anneau</u> A <u>étant supposé principal, soit</u> $F(X) = \sum_0^\infty a_n X^n$ <u>appartenant à</u> $K[[X]]$. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que</u> F <u>appartienne à la famille</u> Φ_q , <u>dans le cas particulier où</u> $a_0 = \frac{u_0}{q}$, <u>avec</u> $(u_0 , q) = 1$, <u>est que</u> :

1° $a_n = \frac{\text{entier}}{q^{n+1}}$,

2° $$H_{-n+2}^{(n-1)} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_0 & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \frac{\text{entier}}{q^{n+1}} \quad .$$

Ce déterminant $H_{-n+2}^{(n-1)}(F)$ peut paraître lourd à manier et pratiquement inutilisable. En fait, il a une signification très simple. Posons $\frac{1}{F(X)} = \sum_0^\infty c_n X^n$. D'après la remarque faite au paragraphe 3, sur les déterminants de Hankel de l'inverse de F , nous avons

$$H_{-n+2}^{(n-1)}(F) = \pm \left(\frac{u_0}{v_0}\right)^{n+1} H_n^{(0)}\left(\frac{1}{F}\right) = \pm \left(\frac{u_0}{v_0}\right)^{n+1} c_n \quad .$$

Nous constatons alors que la condition

$$H_{-n+2}^{(n-1)}(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}}$$

équivaut à

$$u_0^{n+1} c_n = \text{entier} \quad ,$$

et nous pouvons donc donner une seconde forme de la proposition 2 :

PROPOSITION 2 bis. - L'anneau A étant principal, soit $F(X) = \sum_0^{\infty} a_n X^n$ appartenant à $K[[X]]$; posons $\frac{1}{F(X)} = \sum_0^{\infty} c_n X^n$. Une condition nécessaire et suffisante pour que F appartienne à la famille Φ_{v_0}, dans le cas particulier où $a_0 = \frac{u_0}{v_0}$, avec $(u_0 , v_0) = 1$, est que :

1° $a_n = \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}}$ pour tout n,

2° $c_n = \frac{\text{entier}}{u_0^{n+1}}$ pour tout n.

Une question ouverte est de savoir si ce critère ne serait pas général, sans la restriction $(u_0 , v_0) = 1$, et peut-être pour des anneaux moihs particuliers que les anneaux principaux.

Nous donnerons enfin une autre condition d'appartenance à la famille Φ_q, plus particularisée mais plus maniable.

PROPOSITION 3. - A étant principal, soit $F(X) \in K[[X]]$. Une condition nécessaire et suffisante pour que F appartienne à la famille Φ_q, dans le cas particulier où $a_0 = \frac{N_0}{q}$, $a_1 = \frac{N_1}{q^2}$, avec $(N_0 , q) = (N_1 , q) = 1$, est que :

1° $a_n = \frac{\text{entier}}{q^{n+1}}$,

2° $H_{n-2}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \frac{\text{entier}}{q^{n+1}}$.

Démonstration. - La condition $H_{n-2}^{(1)} = \frac{\text{entier}}{q^{n+1}}$ peut encore s'écrire

$$q^{n-1} \quad \text{divise} \quad \begin{vmatrix} N_{n-2} & N_{n-1} \\ N_{n-1} & N_n \end{vmatrix}$$

d'où l'on déduit immédiatement, par récurrence, que, si $(N_0 , q) = (N_1 , q) = 1$, on a $(N_n , q) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$. Mais alors, nous sommes assurés de l'existence du déterminant $H_{n-2p}^{(p-1)}(F)$ tel que $(N_{n-2p}^{(p-1)} , q) = 1$, qui est dans ce cas le déterminant correspondant à $p = 1$, soit a_{n-2}, qui vérifie bien $(N_{n-2} , q) = 1$.

Remarque 1. - $(N_0\ ,\ q) = (N_1\ ,\ q) = 1$ équivaut à $(u_0 v_1\ ,\ q) = 1$ dans l'expression

$$F(X) = \frac{u_0 + u_1 X + \dots}{q + v_1 X + \dots} \ .$$

Remarque 2. - Si un seul des N_n n'est pas premier avec q, lorsque N_0 et N_1 le sont, on est alors sûr que F n'appartient pas à la famille Φ_q.

5. Séries lacunaires dans Φ_q.

PROPOSITION 4. - L'anneau A étant supposé factoriel, soit $F(X)$ une série appartenant à la famille Φ_q, avec $q = \prod p_i^{v_i}$. On pose $v = \max_i v_i$. S'il existe après un coefficient a_h de F une lacune assez grande, plus précisément si $a_{h+1} = a_{h+2} = \dots = a_{h+hv} = 0$, alors $a_h = \frac{\text{entier}}{q}$.

Démonstration. - Nous considérerons les déterminants de Hankel $H_{h-hv_i}^{(hv_i)}(F)$ qui vérifient :

$$H_{h-hv_i}^{(hv_i)} = \begin{vmatrix} a_{h-hv_i} & \dots & a_h \\ \dots & \dots & \dots \\ a_h & \dots & a_{h+hv_i} \end{vmatrix} = \frac{\text{entier}}{q^{h+hv_i+1}}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{h-hv_i} & \dots & a_h \\ \dots & \dots & \dots \\ a_h & \dots & 0 \end{vmatrix} = \pm\ (a_h)^{hv_i+1} \ .$$

Nous savons que $a_h = \frac{\text{entier}}{q^{h+1}}$; posons alors

$$a_h = \frac{\pi}{\prod p_i^{w_i}} \qquad \text{avec} \quad (\pi\ ,\ p_i) = 1\ ,\ \forall\ i\ .$$

La puissance de p_i qui intervient dans $(a_h)^{hv_i+1}$ est donc exactement $-(hv_i + 1)w_i$; celle qui intervient dans $H_{h-hv_i}^{(hv_i)} = \frac{\text{entier}}{q^{h+hv_i+1}}$ est, elle, supérieure ou égale à $-(h + hv_i + 1)v_i$. Nous pouvons alors écrire :

$$-(h + hv_i + 1)v_i \leqslant -(hv_i + 1)w_i \ ,$$

soit

$$w_i \leqslant \left(\frac{h + hv_i + 1}{hv_i + 1}\right)v_i = \left(1 + \frac{h}{hv_i + 1}\right)v_i$$

$$< \left(1 + \frac{1}{v_i}\right)v_i = v_i + 1 \quad .$$

Donc l'entier naturel w_i est $\leqslant v_i$, et ceci quel que soit le facteur p_i considéré, ce qui démontre notre proposition.

COROLLAIRE. - Avec les mêmes notations, si nous avons

$$a_{h+1} = \dots = a_{h-n+(n+1)(h-n)v} = 0 \quad ,$$

alors

$$a_h = \frac{\text{entier}}{q} \; , \quad a_{h-1} = \frac{\text{entier}}{q^2} \; , \quad \dots \; , \quad a_{h-n} = \frac{\text{entier}}{q^{n+1}} \quad .$$

La démonstration s'effectue de proche en proche : la lacune supposée est assez grande pour appliquer la proposition 4 à

$$F(X) - \frac{\pi_h}{q} X^h = \frac{qU(X) - \pi_h X^h V(X)}{qV(X)}$$

qui appartient à Φ_{q^2} , puis à

$$F(X) - \frac{\pi_h}{q} X^h - \frac{\pi_{h-1}}{q^2} X^{h-1} = \frac{q^2 U(X) - q\pi_h X^h V(X) - \pi_{h-1} X^{h-1} V(X)}{q^2 V(X)}$$

qui appartient à Φ_{q^3} , etc.

Cas des polynômes de Φ_q . - Un polynôme peut être considéré comme une série lacunaire, mais il est possible d'obtenir un résultat bien meilleur.

Nous noterons, tout d'abord, que lorsque A est principal, l'anneau de séries formelles $A[[X]]$ est factoriel (voir par exemple P. SAMUEL [7]). Il s'ensuit que, pour toute série F appartenant à Ω , il existe une expression irréductible $F = \frac{U}{V}$ $(U , V \in A[[X]])$, et que toute autre expression $F = \frac{U'}{V'}$ peut s'obtenir en posant :

$$U' = UD \quad \text{et} \quad V' = VD \qquad (D \in A[[X]]) \quad .$$

PROPOSITION 5. - Si un polynôme $F(X)$ appartient à la famille Φ_q , alors

$$qF(X) = P^*(X)$$

est un polynôme à coefficients entiers.

Il suffit de démontrer ce résultat pour $F = \frac{U}{V}$, expression irréductible où $V(0) = q$; en effet, pour toute famille Φ_{q_1} contenant F , on a $q_1 = hq$, et alors $qF \in \mathbf{A}[X]$ entraîne, a fortiori, $q_1 F = h(qF) \in \mathbf{A}[X]$.

Tous les coefficients de $F(X)$ sont de la forme $a_k = \frac{\text{entier}}{q^{k+1}}$; $F(X)$, étant un polynôme, ne possède qu'un nombre fini de coefficients non nuls, et il existe donc une puissance q^m de q telle que $q^m F(X)$ soit à coefficients entiers :

$$F(X) = \frac{Q^*(X)}{q^m} \quad .$$

Comme l'expression $F = \frac{U}{V}$ dans Φ_q a été supposée irréductible, il existe $D(X)$ appartenant à $\mathbf{A}[[X]]$ telle que

$$q^m = V(X)\ D(X) \quad .$$

Nous aurons démontré notre proposition si nous établissons que q divise tous les coefficients de $V(X)$, c'est-à-dire que q divise $V(X)$, car on aura alors $V(X) = qE(X)$ avec $e_0 = E(0) = 1$; $E(X)$ étant inversible on pourra écrire :

$$F = \frac{UE^{-1}}{VE^{-1}} = \frac{P^*}{q} \quad ,$$

P^* étant nécessairement un polynôme. Pour établir que q divise $V(X)$, il suffit de montrer que si $\prod p_i^{v_i} = q$ (les p_i étant irréductibles), chaque facteur $p_i^{v_i}$ divise $V(X)$. Mais toute puissance de p_i qui divise une série $W(X)$ doit diviser $u_0 = U(0)$; or $V(0) = q$, donc $D(0) = q^{m-1}$, d'où il s'ensuit que p_i^α ne peut diviser $D(X)$ que si p_i^α divise $D(0)$, soit si $\alpha \leqslant (m-1)v_i$. D'où nous concluons que $p_i^{v_i}$ divise $V(X)$, l'anneau $A[[X]]$ étant factoriel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Emile). - Leçons sur les fonctions méromorphes. - Paris, Gauthier-Villars, 1903.

[2] CANTOR (David G.). - Power series with integral coefficients, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 362-366.

[3] DRESS (François). - Déterminants de Hankel du quotient de deux séries entières à coefficients entiers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 4338-4340.

[4] DRESS (François). - Familles fermées de séries formelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 7e année, 1965/66, n° 3, 11 p.

[5] HADAMARD (Jacques). - Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, J. Math. pures et appl., 4e série, t. 8, 1892, p. 101-186 (Thèse Sc. math. Paris, 1892).

[6] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.

[7] SAMUEL (Pierre). - Anneaux factoriels, Vol. 1. - São Paulo, Sociedade de matematica de São Paulo, 1963.