

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN FRESNEL

## Nombres de Bernoulli et fonctions $L$ $p$ -adiques

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 7, n° 2 (1965-1966),  
exp. n° 14, p. 1-15

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1965-1966\\_\\_7\\_2\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_2_A3_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

NOMBRES DE BERNOULLI ET FONCTIONS L p-ADIQUES

par Jean FRESNEL

1. Introduction.

Nous nous proposons d'établir des congruences entre les nombres de Bernoulli relatifs à un caractère [5] qui améliorent les congruences de KUMMER [4] sur les nombres de Bernoulli ordinaires, ainsi que les congruences du type de Kummer de CARLITZ [2]. Nous résoudrons également au passage un problème posé par NIELSEN [6].

Ces relations nous permettront alors en utilisant les méthodes de l'interpolation p-adique [1] de montrer l'analyticité des fonctions p-adiques  $L_p(\cdot, \chi)$  [3], et d'évaluer leur module de continuité.

2. Les caractères.

Soient  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels positifs,  $\mathbb{Z}$  l'anneau des entiers naturels,  $\mathbb{Q}$  le corps des rationnels,  $K$  une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$ . Soit  $U$  le groupe (multiplicatif) des racines de l'unité.

Soient  $(a, b) = \text{p. g. c. d. } (a, b)$  et  $[a, b] = \text{p. p. c. m. } (a, b)$ .

(a) Les caractères de  $\mathbb{Z}$ . - Soit  $(\mathbb{Z}/m)^*$  le groupe multiplicatif des entiers modulo  $m$ , premiers avec  $m$ . Soit  $\tilde{X}(m) = \text{Hom}((\mathbb{Z}/m)^*, U)$  le groupe des caractères de  $(\mathbb{Z}/m)^*$ . Nous allons plonger  $\tilde{X}(m)$  dans l'ensemble  $A$  des applications de  $\mathbb{Z}$  dans  $K$  par l'injection  $f_m$  ainsi définie : si  $\tilde{\chi} \in \tilde{X}(m)$ , posons

$$f_m(\tilde{\chi}) = \chi,$$

où  $\chi(a) = 0$  si  $(a, m) \neq 1$  et  $\chi(a) = \tilde{\chi} \circ g_m(a)$  si  $(a, m) = 1$  ( $g_m$  étant la surjection canonique de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}/m$ ). Notons par  $X(m)$  l'image de  $\tilde{X}(m)$  par  $f_m$ .

$X(m)$  n'est autre que le sous-ensemble de  $A$  des applications  $\chi$  satisfaisant les conditions suivantes :

$$\chi(a) = 0 \iff (a, m) \neq 1 ;$$

$$\chi(ab) = \chi(a) \chi(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z} ;$$

$$\chi(a) = \chi(b) \quad \text{si } a \equiv b \pmod{m} .$$

Soit  $X = UX(m)$  ,  $\forall m \in \underline{\mathbb{N}}$  .

Les éléments de  $X$  sont les caractères (multiplicatifs) de  $\underline{\mathbb{Z}}$  , plus précisément un élément de  $X(m)$  s'appelle caractère (multiplicatif) modulo  $m$  .

L'application  $f_m$  respecte la structure multiplicative (mais n'envoie pas en général l'élément neutre de  $\tilde{X}(m)$  sur celui de  $A$  ) et par suite  $X(m)$  a une structure de groupe pour l'opération induite par celle de  $A$  (l'élément neutre de  $X(m)$  , que nous notons  $\chi_0$  , n'est pas en général celui de  $A$  ) .

Nous avons  $X(m_1) \times X(m_2) = X([m_1, m_2])$  , si  $(m_1, m_2) = 1$  , alors

$$X(m_1 \cdot m_2) \simeq X(m_1) \times X(m_2) \quad (\text{produit direct}) .$$

Nous utiliserons souvent la décomposition suivante : soient  $m \in \underline{\mathbb{N}}$  ,  $p$  un nombre premier,  $m = m_0 p^r$  avec  $(m_0, p) = 1$  , alors

$$X(m) = X(m_0) \times X(p^r) .$$

Si  $p \neq 2$  ,  $X(p^r)$  est cyclique d'ordre  $\varphi(p^r)$  ( $\varphi$  étant l'indicateur d'Euler) ; si  $p = 2$  ,  $X(p^r)$  est produit direct d'un groupe cyclique  $X_1^1$  d'ordre 2 , et d'un groupe cyclique  $X_1$  d'ordre  $2^{r-2}$  .

Soit  $\chi \in X$  , et posons :

$$M(\chi) = \{m \in \underline{\mathbb{N}} \text{ tels que } \chi \in X(m)\} ;$$

alors  $M(\chi)$  est l'ensemble de tous les multiples  $m' \cdot m_0$  d'un entier positif  $m_0$  tels que tous les diviseurs premiers de  $m'$  soient des diviseurs premiers de  $m_0$  .

$\chi$  étant fixé, les groupes  $X(m)$  ,  $\forall m \in M(\chi)$  , ont même élément neutre, et l'ordre de  $\chi$  ne dépend pas du groupe  $X(m)$  .

(b) Caractères primitifs. Conducteurs. - Soit

$$G(m) = \{a \in \underline{\mathbb{Z}} \text{ tels que } (a, m) = 1\} ;$$

nous avons

$$G(m_1) \cap G(m_2) = G([m_1, m_2]) .$$

Si  $\chi \in X$  ,  $G(m)$  ne dépend pas du  $m$  choisi dans  $M(\chi)$  . Soit  $R$  la relation d'équivalence définie sur  $X$  par :

$$\chi_1 R \chi_2 \iff \forall a \in G([m_1, m_2]) , \chi_1(a) = \chi_2(a) ,$$

où  $m_1 \in M(\chi_1)$  et  $m_2 \in M(\chi_2)$  .

Soit

$$P(\chi) = \{m \in \underline{\mathbb{N}}, \text{ tels que } \exists \chi_1 \in X(m) \text{ avec } \chi_1 \sim \chi\} .$$

Alors il existe un entier, appelé le conducteur de  $\chi$ , noté  $f(\chi)$ , tel que  $P(\chi) = f(\chi) \cdot \underline{\mathbb{N}}$ . Le caractère équivalent à  $\chi$ , appartenant à  $X(f(\chi))$ , est le caractère primitif de conducteur  $f(\chi)$  associé à  $\chi$ .

(c) Le caractère  $\theta$ . - Soient  $\underline{\mathbb{Q}}_p$  le corps  $p$ -adique élémentaire,  $\Omega_p$  une clôture algébrique de  $\underline{\mathbb{Q}}_p$  contenant  $\mathbb{K}$ , munie de la valuation  $\omega$  normalisée par  $\omega(p) = 1$ .

Si  $p \neq 2$ ,  $\theta$  est l'élément de  $X(p)$  défini par :

$$\theta(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p^n} \quad (\text{limite } p\text{-adique}) .$$

Si  $p = 2$ ,  $\theta$  est l'élément de  $X(4)$ , défini par  $\theta(a) = 0$  si  $(a, 4) \neq 1$ , et par  $\theta(a) = 1$  (resp.  $-1$ ) si  $a \equiv 1 \pmod{4}$  (resp.  $-1 \pmod{4}$ ).

Si  $n$  est un entier quelconque,  $\theta^n$  est l'élément de  $X(p)$  si  $p \neq 2$  (resp.  $X(4)$  si  $p = 2$ ), défini par  $\theta^n(a) = 0$  si  $(a, p) \neq 1$ , et par  $\theta^n(a) = (\theta(a))^n$  si  $(a, p) = 1$  (en particulier,  $\theta^0$  est l'élément neutre de  $X(p)$  si  $p \neq 2$ , et de  $X(4)$  si  $p = 2$ , et  $\theta^n \cdot \theta^{n'} = \theta^{n+n'}$ ).

A chaque nombre premier nous associons un caractère que nous notons invariablement  $\theta$ , afin de ne pas alourdir les notations. Il sera implicite que lorsqu'un nombre premier  $p$  figurera dans une relation, le caractère  $\theta$  utilisé sera celui qui est associé à  $p$ .

De la définition du caractère  $\theta$ , nous déduisons immédiatement que si  $a \in \underline{\mathbb{Z}}$  et  $(a, p) = 1$  :

$$\begin{aligned} a\theta^{-1}(a) &\equiv 1 \pmod{p} && \text{si } p \neq 2, \\ a\theta^{-1}(a) &\equiv 1 \pmod{4} && \text{si } p = 2. \end{aligned}$$

Nous posons alors :

$$\begin{aligned} \psi(a) &= \frac{1}{p} (a\theta^{-1}(a) - 1) && \text{si } p \neq 2, \\ \psi(a) &= \frac{1}{4} (a\theta^{-1}(a) - 1) && \text{si } p = 2. \end{aligned}$$

Nous avons, bien-entendu,  $\psi(a) \in \underline{\mathbb{Z}}_p$  si  $(a, p) = 1$ .

Conventions. - Si  $\chi \in X(m)$  avec  $\omega(m) > 0$ , et si  $a \equiv 0 \pmod{p}$ , nous poserons  $\chi(a) \psi(a) = 0$ .

Si  $r \in \underline{\mathbb{Q}}$ ,  $a \equiv b \pmod{p^r}$  signifiera  $\omega(a - b) \geq r$ .

### 3. Les nombres de Bernoulli relatifs à un caractère.

(a) Définition. - Soit  $\chi \in X$ , si  $m$  et  $m'$  appartiennent à  $M(\chi)$ , alors:

$$\sum_{a=1}^m \chi(a)t \frac{e^{at}}{e^{mt} - 1} = \sum_{a=1}^{m'} \chi(a)t \frac{e^{at}}{e^{m't} - 1},$$

par suite le développement en série entière formelle de

$$\sum_{a=1}^m \chi(a)t \frac{e^{at}}{e^{mt} - 1}$$

ne dépend que du caractère  $\chi$  (et non de l'entier  $m \in M(\chi)$ ). Ceci permet de définir une application  $B$  de  $(\underline{\mathbb{N}} \cup 0) \times X$  dans  $K$  dont la valeur en  $(n, \chi)$ , notée  $B^n(\chi)$ , sera le coefficient de  $\frac{t^n}{n!}$  du développement en série formelle de  $\sum_{a=1}^m \chi(a)t \frac{e^{at}}{e^{mt} - 1}$ . Le nombre algébrique  $B^n(\chi)$  s'appelle le  $n$ -ième nombre de Bernoulli relatif au caractère  $\chi$ . Les nombres de Bernoulli ordinaires sont ceux relatifs au caractère de  $X(1)$ , et sont notés  $B^n$ :

$$(1) \quad \sum_{a=1}^m \chi(a)t \frac{e^{at}}{e^{mt} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n(\chi) \frac{t^n}{n!}.$$

#### (b) Parité.

Si  $\chi$  est pair (c'est-à-dire si  $\chi(-1) = 1$ ) et si  $\chi \notin X(1)$ ,  $B^n(\chi) = 0$  si  $n$  est impair.

Si  $\chi$  est impair (c'est-à-dire si  $\chi(-1) = -1$ ),  $B^n(\chi) = 0$  si  $n$  est pair.

Si  $\chi \in X(1)$ ,  $B^n(\chi) = B^n = 0$  si  $n$  est impair et  $n > 1$ .

(c) Relations. - Les nombres de Bernoulli satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\forall m \in \underline{\mathbb{N}}, \quad \forall \chi \in X(m), \quad \forall v \in \underline{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \underline{\mathbb{N}} \cup 0,$$

$$(2) \quad \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B^i(\chi) (vm)^{n+1-i} = (n+1) \sum_{a=1}^{vm} \chi(a) a^n.$$

En particulier, nous avons :

$$(3) \quad B^0(\chi) = \frac{1}{m} \sum_{a=1}^m \chi(a) \quad .$$

PROPOSITION 1. - Pour tout  $\chi \in X$ ,  $\forall$  nombre premier  $p$ ,  $\forall n \in \underline{\mathbb{N}} \cup 0$ , nous avons :

$$B^n(\chi\theta^0) = B^n(\chi)(1 - \chi(p)p^{n-1}) \quad .$$

Ceci se déduit immédiatement de la relation de définition (1). Cette égalité est très intéressante car elle permet de changer le caractère  $\chi$  en le caractère  $\chi\theta^0$  pour lequel  $p$  divise tous les éléments de  $M(\chi\theta^0)$ .

Notation. - Soient  $\chi \in X(m)$ ,  $v \in \underline{\mathbb{N}}$ , posons :

$$S_X^n(vm) = \sum_{a=1}^{vm} \chi(a)a^n \quad .$$

PROPOSITION 2. - Pour tout  $m \in \underline{\mathbb{N}}$  tel que  $\omega(m) = r > 0$ , pour tout  $\chi \in X(m)$  et  $\forall n \in \underline{\mathbb{N}}$ , nous avons :

$$\frac{B^n(\chi)}{n} \equiv \frac{S_X^n(m)}{m} \pmod{p^{r-1}} \quad .$$

En utilisant la relation de récurrence (2), on démontre d'abord que

$$\omega(mB^n(\chi)) \geq 0 \quad ,$$

et on prouve la congruence en se servant à nouveau de la relation (2).

PROPOSITION 3. - Si  $\chi \in X(1)$ , si  $m \in \underline{\mathbb{N}}$  tel que  $\omega(m) > 0$ , alors :

$$\frac{S_X^n(m)}{n \cdot m} \equiv 0 \pmod{p^0} \quad \underline{\text{si}} \quad n \not\equiv 0 \pmod{p-1} \quad ,$$

$$\frac{S_X^n(m)}{m} \equiv 0 \pmod{p^{-1}} \quad \underline{\text{si}} \quad n \equiv 0 \pmod{p-1} \quad .$$

Dans ce dernier cas, nous avons même :

$$\omega\left(\frac{S_X^n(m)}{m}\right) = -1 \quad .$$

Ces relations se démontrent par récurrence sur la valuation de  $m$ .

4. Congruences entre les nombres de Bernoulli relatifs à un caractère.

Nous nous proposons, tout d'abord, d'évaluer p-adiquement l'expression :

$$\sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1} .$$

On s'aperçoit alors, en utilisant la proposition 2, que l'on est amené à évaluer :

$$T(\chi, m, s) = \frac{1}{s \cdot m} \sum_{a=1}^m \chi\theta^0(a) \psi^s(a) ,$$

où  $s \in \mathbb{N}$  et  $m \in M(\chi\theta^0)$  avec  $m = m_0 p^r$  .

L'évaluation de  $T(\chi, m, s)$  est assez longue parce qu'elle dépend de la nature du caractère  $\chi$  . Elle se décompose en plusieurs lemmes.

On remarque d'abord que si  $\chi = \chi_1 \chi_2$  , où  $\chi_1 \in X(p^r)$  ,  $\chi_2 \in X(m_0)$  , on est conduit à évaluer  $T(\chi_1, p^r, s)$  , c'est-à-dire

$$U(\chi_1, p^r, s) = \frac{1}{s \cdot p^r} \sum_{u=1}^{\varphi(p^r)} \chi_1(h^u) \psi^s(h^u) ,$$

où  $h$  est générateur modulo  $p^r$  de  $(\mathbb{Z}/p^r)^*$  si  $p \neq 2$  (resp.  $h = 5$  si  $p = 2$ ) . On constate ensuite qu'il suffit de savoir évaluer :

$$V(\chi_1, q, s) = \frac{1}{s \cdot q} \sum_{u=1}^q \chi_1(h^u) u^s .$$

On s'aperçoit que les congruences que l'on obtient sont liées à la nature du caractère  $\chi$  , c'est pourquoi nous allons introduire quelques notations qui simplifieront l'énoncé des théorèmes qui suivront.

Notations. - Si  $\chi \in X$  , soit  $m \in M(\chi\theta^0)$  , alors  $m = m_0 p^r$  où  $(m_0, p) = 1$  ; si  $p \neq 2$  ,  $\chi\theta^0 = \chi_1 \cdot \chi_2$  où  $\chi_1 \in X(p^r)$  et  $\chi_2 \in X(m_0)$  , il est bien immédiat que  $\chi_1$  et  $\chi_2$  ne dépendent pas du choix de  $m$  dans  $M(\chi\theta^0)$  (il en est de même si  $p = 2$  pour la décomposition  $\chi\theta^0 = \chi_1 \chi_1' \chi_2$  où  $\chi_1 \in X_1$  ,  $\chi_1' \in X_1'$  avec  $X_1 X_1' = X(p^r)$  , et  $\chi_2 \in X(m_0)$  ) . Le nombre premier  $p$  étant fixé,  $\delta$  et  $\delta'$  sont des applications de  $X \times \mathbb{N}$  dans  $\mathbb{Q}$  (il sera encore implicite que, lorsque dans une relation figurera un nombre premier  $p$  , les applications  $\delta$  et  $\delta'$  utilisées seront celles attachées à  $p$  ) définies ainsi :

Soit  $p \neq 2$  , soit  $\chi \in X$  , soit  $\chi\theta^0 = \chi_1 \chi_2$  la décomposition précédente, soit  $s \in \mathbb{N}$  , alors :

( $\alpha$ ) si  $\chi_2 \neq \chi_0$ ,  $\delta(\chi, s) = \delta'(\chi, s) = 0$ ,

( $\beta$ ) si  $\chi_2 = \chi_0$ ,

(i) si ordre  $\chi_1 \neq p^e$ ,  $\forall e \in \underline{\mathbb{N}}$ ,

$$\delta(\chi, s) = \delta'(\chi, s) = 0,$$

(ii) si ordre  $\chi_1 = p^e$  avec  $e > 1$ ,

$$\delta(\chi, s) = \delta'(\chi, s) = \frac{s_0}{\varphi(p^e)},$$

où  $s \equiv s_0 \pmod{p-1}$  et  $1 \leq s_0 \leq p-1$ ,

(iii) si ordre  $\chi_1 = p$ ,

$$\delta(\chi, s) = \frac{s_0}{p-1} + \omega(s), \quad \delta'(\chi, s) = \frac{s_0}{p-1},$$

où  $s \equiv s_0 \pmod{p-1}$  et  $0 \leq s_0 \leq p-2$ ,

(iv) si  $\chi_1 = \chi_0$ ,

$$\delta(\chi, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \not\equiv 0 \pmod{p-1}, \\ 1 + \omega(s) & \text{si } s \equiv 0 \pmod{p-1}, \end{cases}$$

$$\delta'(\chi, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \not\equiv 0 \pmod{p-1}, \\ 1 & \text{si } s \equiv 0 \pmod{p-1}. \end{cases}$$

Si  $p = 2$ , soit  $\chi \in X$ , soit  $\chi^0 = \chi_1 \chi_1' \chi_2$  la décomposition précédente, soit  $s \in \underline{\mathbb{N}}$ , alors :

( $\alpha$ ) si  $\chi_1 \neq \chi_0$ ,  $\delta(\chi, s) = 1$ ,

( $\beta$ ) si  $\chi_2 = \chi_0$  et  $\chi_1' \neq \chi_0$ ,  $\delta(\chi, s) = 1$ ,

( $\gamma$ ) si  $\chi_2 = \chi_0$  et si  $\chi_1' = \chi_0$ ,

(i) si ordre  $\chi_1 = p^e$  avec  $e > 1$ ,  $\delta(\chi, s) = 1$ ,

(ii) si ordre  $\chi_1 = 2$  ou si  $\chi_1 = \chi_0$ ,  $\delta(\chi, s) = 1 + \omega(s)$ .

D'autre part,  $\delta'(\chi, s) = 1$ ,  $\forall \chi \in X$ ,  $\forall s \in \underline{\mathbb{N}}$ .

PROPOSITION 4. - Pour tout  $\chi \in X$ ,  $\forall m \in M(\chi^0)$  tel que  $\omega(m) \geq 2$  si  $p \neq 2$  (resp.  $\omega(m) \geq 3$  si  $p = 2$ ),  $\forall s \in \underline{\mathbb{N}}$ , alors :

$$T(\chi, m, s) \equiv 0 \pmod{p^{-(1+\delta(\chi, s))}}.$$



COROLLAIRE. - Pour tout  $\chi \in X$ ,  $\forall m \in M(\chi\theta^0)$  tel que  $\omega(m) \geq 2$  si  $p \neq 2$  (resp.  $\omega(m) \geq 3$  si  $p = 2$ ),  $\forall s \in \mathbb{N}$ , alors :

$$s.T(\chi, m, s) \equiv 0 \pmod{p^{-(1+\delta'(\chi, s))}} .$$

THÉOREME 1. - Pour tout  $\chi \in X$ ,  $\forall s \in \mathbb{N} \cup 0$ ,  $\forall$  nombre premier  $p$ , nous avons :

$$\sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1} \equiv 0 \pmod{p^{s-\delta(\chi, s+1)}} \quad \text{si } p \neq 2$$

(resp.  $\pmod{p^{2s+1-\delta(\chi, s+1)}}$  si  $p = 2$ ).

Nous nous proposons maintenant d'évaluer  $p$ -adiquement la quantité :

$$A(\chi, n, v, r) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}(\chi\theta^{-(n+kv)}) - B^0(\chi\theta^0)}{n+kv}$$

$\forall \chi \in X$ ,  $\forall n, v \in \mathbb{N}$  et  $\forall r \in \mathbb{N} \cup 0$ .

Nous considérons la série :

$$\Phi_p(x, \chi) = \sum_{s \geq 0} a_s Q_s(x) ,$$

où

$$a_s = - \sum_{k=0}^s (-1)^{s-k} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1}$$

et

$$Q_s(x) = (-1)^s \frac{x(x+1) \dots (x+s-1)}{s!} .$$

La série  $\Phi_p(x, \chi)$  est convergente (pour la topologie discrète) quel que soit  $x$  entier négatif, et de plus :

$$\Phi_p(1-m, \chi) = - \frac{B^m(\chi\theta^{-m}) - B^0(\chi\theta^0)}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N} .$$

Il suffira alors d'utiliser le théorème 1 pour évaluer  $A(\chi, n, v, r)$ .

Notation. -  $\delta''$  est une application de  $X \times (\mathbb{N} \cup 0)$  dans  $\mathbb{Q}$  définie par :

$$\delta''(\chi, r) = \min_{s \geq r} \left( \frac{p-2}{p-1} (s-r) - \delta(\chi, s+1) \right) \quad \text{si } p \neq 2 ,$$

$$\delta''(\chi, r) = \min_{s \geq r} (s-r - \delta(\chi, s+1)) \quad \text{si } p = 2 .$$

THEOREME 2. - Pour tout nombre premier  $p$ ,  $\forall n \in \underline{\mathbb{N}}$ ,  $\forall v \in \underline{\mathbb{N}} \cup 0$ ,  $\forall r \in \underline{\mathbb{N}} \cup 0$ ,  $\forall \chi \in X$ , nous avons :

$$A(\chi, n, v, r) \equiv 0 \pmod{p^{r(\omega(v)+1)+\delta''(\chi, r)}} \quad \underline{\text{si}} \quad p \neq 2$$

(resp.  $\pmod{p^{r(\omega(v)+2)+1+\delta''(\chi, r)}}$  si  $p = 2$ ).

Remarque. - L'expression  $\delta''(\chi, r)$  est très simple dans certains cas :

Si  $\chi$  satisfait  $(\alpha)$  ou  $(\beta(i))$  si  $p \neq 2$  (resp.  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma(i))$  si  $p = 2$ ),

$$\delta''(\chi, r) = 0 \quad (\text{resp. } \delta''(\chi, r) = -1) .$$

Si  $\chi$  satisfait  $(\beta(ii))$ ,

$$\delta''(\chi, r) = \frac{r_0 + 1}{\varphi(p^c)} ,$$

où  $r \equiv r_0 \pmod{p-1}$  et  $1 \leq r_0 \leq p-1$ .

COROLLAIRE 1. - Pour tout  $n \in \underline{\mathbb{N}}$  et  $\forall v \in \underline{\mathbb{N}} \cup 0$ ,

$$A(\chi, n, v, 1) \equiv 0 \pmod{p^{\omega(v)+1-\delta(\chi, 2)}}$$

si  $p \neq 2$  et  $p \neq 3$ , ou bien si  $p \neq 2$  et si  $\chi$  ne satisfait pas  $(\beta(iii))$ .

$$A(\chi, n, v, 1) \equiv 0 \pmod{p^{\omega(v)+2-\delta(\chi, 3)}}$$

si  $p = 3$  et si  $\chi$  satisfait  $(\beta(iii))$ ,

$$A(\chi, n, v, 1) \equiv 0 \pmod{p^{\omega(v)+3-\delta(\chi, 2)}}$$

si  $p = 2$ .

Les théorèmes 6 et 7 de CARLITZ [2] se trouvent évidemment contenus dans ce corollaire.

COROLLAIRE 2. - Pour tout nombre premier  $p \neq 2$ ,  $\forall n \in \underline{\mathbb{N}}$ ,  $\forall v \in \underline{\mathbb{N}} \cup 0$  tel que  $p-1 \mid v$ ,  $\forall \chi \in X$ , nous avons :

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}(\chi) (1 - \chi(p)p^{n-1+kv}) - B^0(\chi\theta^n)}{n+kv} \equiv 0 \pmod{p^{r(\omega(v)+1)+\delta''(\chi, r)}} .$$

Si  $p = 2$ ,  $\forall n \in \underline{\mathbb{N}}$ ,  $\forall v \in \underline{\mathbb{N}} \cup 0$  tel que  $2 \mid v$ ,  $\forall \chi \in X$ , nous avons :

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}(\chi) (1 - \chi(p)p^{n-1+kv}) - B^0(\chi\theta^n)}{n+kv} \equiv 0 \pmod{p^{r(\omega(v)+2)+1+\delta''(\chi, r)}} .$$

Ce corollaire contient le théorème 5 de CARLITZ [2].

COROLLAIRE 3. - Soit  $p \neq 2$  un nombre premier,  $\forall n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ ,  
 $\forall v \in \mathbb{N} \cup 0$  tel que  $p-1 \mid v$ ,  $\forall r \in \mathbb{N} \cup 0$ , nous avons :

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}}{n+kv} (1 - p^{n-1+kv}) \equiv 0 \pmod{p^{r(\omega(v)+1)}} .$$

Si les conditions sont les mêmes que précédemment, excepté que  $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ ,

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}}{n+kv} (1 - p^{n-1+kv}) \equiv \frac{p-1}{p} \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} \frac{1}{n+kv} \pmod{p^{r(\omega(v)+1) - \delta''(\theta^0, r)}} ;$$

$$\text{si } r < p-2, \quad \delta''(\theta^0, r) = 0 ,$$

$$\text{si } r \geq p-2, \quad \delta''(\theta^0, r) \leq 1 + [\log_p(r+1)] .$$

Si  $p=2$ , si  $2 \mid v$ , la première relation est vraie  $\pmod{p^{r(\omega(v)+2)}}$ , et la seconde est vraie  $\pmod{p^{r(\omega(v)+2)+1+\delta'(\theta^0, r)}}$ .

Ce corollaire constitue une amélioration de la congruence de Kummer [4] qui s'énonce ainsi :

Pour tout  $r \in \mathbb{N} \cup 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > r$  et  $n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$  ;

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}}{n+kv} \equiv 0 \pmod{p^r} .$$

Par une méthode analogue, nous pouvons évaluer  $p$ -adiquement la quantité :

$$B(\chi, n, v, r) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} B^{n+kv} (\chi \theta^{-(n+kv)}) .$$

THÉORÈME 3. - Pour tout nombre premier  $p$ ,  $\forall n, v, r \in \mathbb{N} \cup 0$ ,  $\forall \chi \in X$ , nous avons :

$$B(\chi, n, v, r) \equiv 0 \pmod{p^{r(\omega(v)+1) - \delta'(\chi, r)}} \quad \underline{\text{si}} \quad p \neq 2$$

(resp.  $\pmod{p^{r(\omega(v)+2)-2}}$  si  $p=2$ ).

COROLLAIRE.

Si  $p \neq 2$ , si  $p-1|v$ ,

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} B^{n+kv} (1 - p^{n-1+kv}) \equiv 0 \pmod{p^{r(\omega(v)+1)-1}}$$

si  $n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ , ou si  $r \not\equiv 0 \pmod{p-1}$  (resp.  $\pmod{p^{r(\omega(v)+1)-2}}$  si  
 $n \equiv 0 \pmod{p-1}$  et  $r \equiv 0 \pmod{p-1}$ ).

Si  $p = 2$ , si  $2|v$ ,

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} B^{n+kv} (1 - p^{n-1+kv}) \equiv 0 \pmod{p^{r(\omega(v)+2)-2}}.$$

Ce corollaire répond à un problème posé par NIELSEN ([6], p. 278) : L'expression  $\sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} B^{n+kv}$  est-elle divisible par une puissance de  $p$  supérieure à 1 ?

### 5. Les fonctions p-adiques $L_p$ .

(a) Définition. - Dans ce paragraphe, les caractères  $\chi$  seront primitifs. Nous noterons par  $f(\chi)$  le conducteur du caractère  $\chi$ . La fonction  $L_p(\cdot, \chi)$  est une application continue de  $\mathbb{Z}_p$  dans  $\mathbb{Q}_p(\chi(1), \dots, \chi(f(\chi)))$  satisfaisant

$$L_p(1 - m, \chi) = - \frac{B^m(\chi\theta^{-m})}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Remarque. - Si  $m \equiv 0 \pmod{p-1}$ , si  $p \neq 2$  (resp.  $m \equiv 0 \pmod{2}$ , si  $p = 2$ ),

$$L_p(1 - m, \chi) = - \frac{B^m(\chi\theta^0)}{m}.$$

En vertu de la proposition 1, nous avons :

$$L_p(1 - m, \chi) = - \frac{B^m(\chi)}{m} (1 - \chi(p)p^{m-1}).$$

Si  $L(\cdot, \chi)$  est la fonction de Dirichlet complexe, nous obtenons :

$$L_p(1 - m, \chi) = L(1 - m, \chi) (1 - \chi(p)p^{m-1})$$

$\forall m \in \mathbb{N}$  tel que  $m \equiv 0 \pmod{p-1}$  si  $p \neq 2$  (resp.  $m \equiv 0 \pmod{2}$  si  $p = 2$ ).

Ainsi, sur les entiers négatifs de la classe de  $0 \pmod{p-1}$  si  $p \neq 2$  (resp.  $\pmod{2}$  si  $p = 2$ ),  $L_p(\cdot, \chi)$  coïncide avec la fonction complexe  $L(\cdot, \chi)$  au

facteur multiplicatif près  $(1 - \chi(p)p^{m-1})$ .

Plus généralement, sur les entiers d'une classe de  $m_0 \pmod{p-1}$ , si  $p \neq 2$  (resp.  $\pmod{2}$  si  $p = 2$ ),  $L_p(\cdot, \chi)$  coïncide avec la fonction complexe  $L(\cdot, \chi_{m_0})$  à un facteur multiplicatif près ( $\chi_{m_0}$  étant le caractère primitif associé à  $\chi\theta^{-m}$ ).

Nous nous proposons maintenant d'étudier ces fonctions  $L_p(\cdot, \chi)$  par la méthode de l'interpolation  $p$ -adique. Les congruences sur les nombres de Bernoulli nous fourniront les évaluations nécessaires pour utiliser les critères d'analyticité, et pour déterminer le module de continuité de la fonction  $L_p(\cdot, \chi)$ .

(b) Analyticit . - Soit  $u$  la suite définie par  $u_k = -k$ . Soit  $\phi_p(\cdot, \chi)$  la fonction définie sur la suite  $u$  par :

$$\phi_p(u_k, \chi) = - \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1} .$$

Suivant les notations de [1], posons :

$$P_n(X) = (X - u_0)(X - u_1) \dots (X - u_{n-1}) = X(X+1) \dots (X+n-1) ,$$

$$Q_n(X) = \frac{P_n(X)}{P_n(u_n)} = (-1)^n \frac{X(X+1) \dots (X+n-1)}{n!}$$

et

$$a_s = P_s(u_s) \left( \sum_{k=0}^s \frac{\phi_p(u_k, \chi)}{P_{s+1}(u_k)} \right) ,$$

soit

$$a_s = - \sum_{k=0}^s (-1)^{s-k} \binom{s}{k} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1} .$$

Nous sommes conduits à évaluer l'expression  $\frac{1}{s}(\omega(a_s) - \omega(s!))$ .

Le théorème 1 montre que :

$$\omega(a_s) \geq s - \delta(\chi, s+1) \quad \text{si } p \neq 2 ,$$

$$\omega(a_s) \geq 2s + 1 - \delta(\chi, s+1) \quad \text{si } p = 2 ;$$

il s'ensuit que, comme  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \delta(\chi, s+1) = 0$  et que  $\overline{\lim} \omega(s!) = \frac{1}{p-1}$ ,

$$\underline{\lim} \frac{1}{s} (\omega(a_s) - \omega(s!)) \geq (1 - \frac{1}{p-1}) \quad \text{si } p \neq 2 ,$$

$$\underline{\lim} \frac{1}{s} (\omega(a_s) - \omega(s!)) \geq 1 \quad \text{si } p = 2 .$$

Alors, le théorème 3 du chapitre III de [1] permet d'affirmer que la fonction  $\Phi_p(\cdot, \chi)$  se développe en série d'interpolation sous la forme :

$$\Phi_p(x, \chi) = \sum_{s \geq 0} a_s Q_s(x) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_p ,$$

que  $\Phi_p(\cdot, \chi)$  est analytique stricte sur  $\mathbb{Z}_p$ , et que son développement en série à l'origine a un rayon de convergence  $R_p$  satisfaisant les inégalités :

$$R_p \geq p^{(1-1/p-1)} \quad \text{si } p \neq 2 ,$$

$$R_p \geq 2 \quad \text{si } p = 2 .$$

Si  $\chi\theta^0 \neq \chi_0$ ,  $B^0(\chi\theta^0) = 0$  et

$$\Phi_p(1-m, \chi) = -\frac{B^m(\chi\theta^{-m})}{m} = L_p(1-m, \chi)$$

pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ , par suite de la densité des entiers négatifs dans  $\mathbb{Z}_p$  et de la continuité de  $\Phi_p(\cdot, \chi)$  et  $L_p(\cdot, \chi)$ , nous avons :

$$\Phi_p(\cdot, \chi) = L_p(\cdot, \chi) .$$

Si  $\chi\theta^0 = \chi_0$ , puisque  $\chi$  est un caractère primitif  $\chi\theta^0 = \theta^0$  et  $B^0(\chi\theta^0) = \frac{p-1}{p}$ , donc :

$$\Phi_p(1-m, \chi) = -\frac{B^m(\chi\theta^{-m})}{m} + \frac{p-1}{m} ,$$

soit

$$\Phi_p(1-m, \chi) = L_p(1-m, \chi) - \frac{\frac{p-1}{p}}{(1-m)-1} .$$

Puisque  $\chi$  est le caractère principal de conducteur 1, posons :

$$L_p(\cdot, \chi) = \zeta_p(\cdot) .$$

Par suite,

$$\zeta_p(x) = \Phi_p(x, \chi) + \frac{\frac{p-1}{p}}{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{Z}_p .$$

La fonction  $\zeta_p$  est donc méromorphe (son rayon de méromorphie est celui de l'holomorphie de  $\zeta_p(\cdot, \chi)$ , et  $x=1$  est le seul pôle, il est simple et a pour résidu  $\frac{p-1}{p}$ ).

(c) Module de continuité des fonctions  $L_p(\cdot, \chi)$ . - En appliquant le corollaire 1 du théorème 2, nous pouvons expliciter le module de continuité de  $L_p(\cdot, \chi)$  (avec  $\chi \neq \chi_0$ ) sur  $\mathbb{Z}_p$  de la façon suivante :

(a) Si  $p \neq 2$ .

Si  $f(\chi) \neq p^r$  ou si ordre  $\chi \neq p^e$ ,

$$\omega(L_p(x, \chi) - L_p(x', \chi)) \geq 1 + \omega(x - x') .$$

Si  $f(\chi) = p^r$  et si ordre  $\chi = p^e$ , sauf si  $f(\chi) = 3^r$  et ordre de  $\chi = 3$ ,

$$\omega(L_p(x, \chi) - L_p(x', \chi)) \geq 1 - \frac{e}{\varphi(p^e)} + \omega(x - x') .$$

Si  $f(\chi) = 3^r$  et ordre  $\chi = 3$ ,

$$\omega(L_p(x, \chi) - L_p(x', \chi)) \geq \frac{1}{2} + \omega(x - x') .$$

(b) Si  $p = 2$ .

Si  $f(\chi) \neq 2^r$  ou si  $\chi$  est impair ou si ordre  $\chi \neq 2$ ,

$$\omega(L_p(x, \chi) - L_p(x', \chi)) \geq 2 + \omega(x - x') .$$

Si  $f(\chi) = 2^r$ , si  $\chi$  est pair et si ordre  $\chi = 2$ ,

$$\omega(L_p(x, \chi) - L_p(x', \chi)) \geq 1 + \omega(x - x') .$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math., Paris, 1964).
- [2] CARLITZ (L.). - Arithmetic properties of generalized Bernoulli numbers, J. für reine und angew. Math., t. 202, 1959, p. 174-182.
- [3] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, Teil 1 : Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen, J. für reine und angew. Math., t. 214/215, 1964, p. 328-339.
- [4] KUMMER (E. F.). - Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwicklungskoeffizienten einer bestimmten Gattung analytischer Funktionen, J. für reine und angew. Math., t. 41, 1851, p. 368-372.

- [5] LEOPOLDT (H. W.). - Eine verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, t. 22, 1958, p. 131-140.
- [6] NIELSEN (N.). - Traité élémentaire des nombres de Bernoulli. - Paris, Gauthier-Villars, 1923.
-