Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

JEAN FRESNEL

Nombres de Bernoulli et fonctions L p-adiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, nº 2 (1965-1966), exp. nº 14, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_2_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des Nombres)
7e année, 1965/66, n° 14
21 mars 1966

NOMBRES DE BERNOULLI ET FONCTIONS L p-ADIQUES

par Jean FRESNEL

1. Introduction.

Nous nous proposons d'établir des congruences entre les nombres de Bernoulli relatifs à un caractère [5] qui améliorent les congruences de KUMMER [4] sur les nombres de Bernoulli ordinaires, ainsi que les congruences du type de Kummer de CARLITZ [2]. Nous résoudrons également au passage un problème posé par NIELSEN [6].

Ces relations nous permettrons alors en utilisant les méthodes de l'interpolation p-adique [1] de montrer l'analycité des fonctions p-adiques $L_p(\cdot , \chi)$ [3], et d'évaluer leur module de continuité.

2. Les caractères.

Soient $\underset{\sim}{N}$ l'ensemble des entiers naturels positifs, $\underset{\sim}{Z}$ l'anneau des entiers naturels, $\underset{\sim}{Q}$ le corps des rationnels, K une clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}$. Soit U le groupe (multiplicatif) des racines de l'unité.

Soient $(a , b) =$ p. g. c. d. (a , b) et $[a , b] =$ p. p. c. m. (a , b) .

(a) Les caractères de $\underset{\sim}{Z}$. - Soit $(\underset{\sim}{Z}/m)^*$ le groupe multiplicatif des entiers modulo m , premiers avec m . Soit $\tilde{X}(m) = \operatorname{Hom}((\underset{\sim}{Z}/m)^* , U)$ le groupe des caractères de $(\underset{\sim}{Z}/m)^*$. Nous allons plonger $\tilde{X}(m)$ dans l'ensemble A des applications de $\underset{\sim}{Z}$ dans K par l'injection f_m ainsi définie : si $\tilde{\chi} \in \tilde{X}(m)$, posons

$$f_m(\tilde{\chi}) = \chi \quad ,$$

où $\chi(a) = 0$ si $(a , m) \neq 1$ et $\chi(a) = \tilde{\chi} \circ g_m(a)$ si $(a , m) = 1$ (g_m étant la surjection canonique de $\underset{\sim}{Z}$ sur $\underset{\sim}{Z}/m$). Notons par $X(m)$ l'image de $\tilde{X}(m)$ par f_m .

$X(m)$ n'est autre que le sous-ensemble de A des applications χ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\chi(a) = 0 \iff (a , m) \neq 1 \quad ;$$

$$\chi(ab) = \chi(a)\,\chi(b) \ , \quad \forall\ a , b \in \underset{\sim}{Z} \quad ;$$

$$\chi(a) = \chi(b) \quad \text{si} \quad a \equiv b \mod m \quad .$$

Soit $X = \cup X(m)$, $\forall\, m \in \underset{\sim}{N}$.

Les éléments de X sont les caractères (multiplicatifs) de $\underset{\sim}{Z}$, plus précisément un élément de $X(m)$ s'appelle caractère (multiplicatif) modulo m .

L'application f_m respecte la structure multiplicative (mais n'envoie pas en général l'élément neutre de $\tilde{X}(m)$ sur celui de A) et par suite $X(m)$ a une structure de groupe pour l'opération induite par celle de A (l'élément neutre de $X(m)$, que nous notons χ_0 , n'est pas en général celui de A).

Nous avons $X(m_1) \times X(m_2) = X([m_1\ ,\ m_2])$, si $(m_1\ ,\ m_2) = 1$, alors

$$X(m_1 . m_2) \simeq X(m_1) \times X(m_2) \qquad \text{(produit direct)} .$$

Nous utiliserons souvent la décomposition suivante : soient $m \in \underset{\sim}{N}$, p un nombre premier, $m = m_0\, p^r$ avec $(m_0\ ,\ p) = 1$, alors

$$X(m) = X(m_0) \times X(p^r) \quad .$$

Si $p \neq 2$, $X(p^r)$ est cyclique d'ordre $\varphi(p^r)$ (φ étant l'indicateur d'Euler) ; si $p = 2$, $X(p^r)$ est produit direct d'un groupe cyclique X_1' d'ordre 2 , et d'un groupe cyclique X_1 d'ordre 2^{r-2} .

Soit $\chi \in X$, et posons :

$$M(\chi) = \{m \in \underset{\sim}{N} \text{ tels que } \chi \in X(m)\} \quad ;$$

alors $M(\chi)$ est l'ensemble de tous les multiples $m' . m_0$ d'un entier positif m_0 tels que tous les diviseurs premiers de m' soient des diviseurs premiers de m_0 .

χ étant fixé, les groupes $X(m)$, $\forall\, m \in M(\chi)$, ont même élément neutre, et l'ordre de χ ne dépend pas du groupe $X(m)$.

(b) Caractères primitifs. Conducteurs. - Soit

$$G(m) = \{a \in \underset{\sim}{Z} \text{ tels que } (a\ ,\ m) = 1\} \quad ;$$

nous avons

$$G(m_1) \cap G(m_2) = G([m_1\ ,\ m_2]) \quad .$$

Si $\chi \in X$, $G(m)$ ne dépend pas du m choisi dans $M(\chi)$. Soit R la relation d'équivalence définie sur X par :

$$\chi_1 \, R \, \chi_2 \iff \forall\, a \in G([m_1\ ,\ m_2])\ , \quad \chi_1(a) = \chi_2(a) \quad ,$$

où $m_1 \in M(\chi_1)$ et $m_2 \in M(\chi_2)$.

Soit

$$P(\chi) = \{m \in \underset{\sim}{N} \text{ , tels que } \exists\, \chi_1 \in X(m) \text{ avec } \chi_1 \, R\, \chi\} \text{ .}$$

Alors il existe un entier, appelé le conducteur de χ , noté $f(\chi)$, tel que $P(\chi) = f(\chi).\underset{\sim}{N}$. Le caractère équivalent à χ , appartenant à $X(f(\chi))$, est le caractère primitif de conducteur $f(\chi)$ associé à χ .

(c) Le caractère θ . – Soient $\underset{\sim}{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, Ω_p une clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$ contenant K , munie de la valuation ω normalisée par $\omega(p) = 1$.

Si $p \neq 2$, θ est l'élément de $X(p)$ défini par :

$$\theta(a) = \lim_{n\to\infty} a^{p^n} \quad \text{(limite p-adique)} \text{ .}$$

Si $p = 2$, θ est l'élément de $X(4)$, défini par $\theta(a) = 0$ si $(a , 4) \neq 1$, et par $\theta(a) = 1$ (resp. -1) si $a \equiv 1 \mod 4$ (resp. $-1 \mod 4$).

Si n est un entier quelconque, θ^n est l'élément de $X(p)$ si $p \neq 2$ (resp. $X(4)$ si $p = 2$), défini par $\theta^n(a) = 0$ si $(a , p) \neq 1$, et par $\theta^n(a) = (\theta(a))^n$ si $(a , p) = 1$ (en particulier, θ^0 est l'élément neutre de $X(p)$ si $p \neq 2$, et de $X(4)$ si $p = 2$, et $\theta^n.\theta^{n'} = \theta^{n+n'}$).

A chaque nombre premier nous associons un caractère que nous notons invariablement θ , afin de ne pas alourdir les notations. Il sera implicite que lorsqu'un nombre premier p figurera dans une relation, le caractère θ utilisé sera celui qui est associé à p .

De la définition du caractère θ , nous déduisons immédiatement que si $a \in \underset{\sim}{Z}$ et $(a , p) = 1$:

$$a\theta^{-1}(a) \equiv 1 \mod p \qquad \text{si } p \neq 2 \text{ ,}$$

$$a\theta^{-1}(a) \equiv 1 \mod 4 \qquad \text{si } p = 2 \text{ .}$$

Nous posons alors :

$$\psi(a) = \frac{1}{p}\,(a\theta^{-1}(a) - 1) \qquad \text{si } p \neq 2 \text{ ,}$$

$$\psi(a) = \frac{1}{4}\,(a\theta^{-1}(a) - 1) \qquad \text{si } p = 2 \text{ .}$$

Nous avons, bien-entendu, $\psi(a) \in \underset{\sim}{Z}_p$ si $(a , p) = 1$.

Conventions. - Si $\chi \in X(m)$ avec $\omega(m) > 0$, et si $a \equiv 0 \mod p$, nous poserons $\chi(a)\ \psi(a) = 0$.

Si $r \in \underset{\sim}{Q}$, $a \equiv b \mod p^r$ signifiera $\omega(a - b) \geqslant r$.

3. Les nombres de Bernoulli relatifs à un caractère.

(a) Définition. - Soit $\chi \in X$, si m et m' appartiennent à $M(\chi)$, alors:

$$\sum_{a=1}^{m} \chi(a)t \frac{e^{at}}{e^{mt} - 1} = \sum_{a=1}^{m'} \chi(a)t \frac{e^{at}}{e^{m't} - 1} ,$$

par suite le développement en série entière formelle de

$$\sum_{a=1}^{m} \chi(a)t \frac{e^{at}}{e^{mt} - 1}$$

ne dépend que du caractère χ (et non de l'entier $m \in M(\chi)$). Ceci permet de définir une application B de $(\underset{\sim}{N} \cup 0) \times X$ dans K dont la valeur en (n , χ) , notée $B^n(\chi)$, sera le coefficient de $\frac{t^n}{n!}$ du développement en série formelle de $\sum_{a=1}^{m} \chi(a)t \frac{e^{at}}{e^{mt} - 1}$. Le nombre algébrique $B^n(\chi)$ s'appelle le n-ième nombre de Bernoulli relatif au caractère χ . Les nombres de Bernoulli ordinaires sont ceux relatifs au caractère de $X(1)$, et sont notés B^n :

$$\sum_{a=1}^{m} \chi(a)t \frac{e^{at}}{e^{mt} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n(\chi) \frac{t^n}{n!} \quad . \tag{1}$$

(b) Parité.

Si χ est pair (c'est-à-dire si $\chi(- 1) = 1$) et si $\chi \notin X(1)$, $B^n(\chi) = 0$ si n est impair.

Si χ est impair (c'est-à-dire si $\chi(- 1) = - 1$), $B^n(\chi) = 0$ si n est pair.

Si $\chi \in X(1)$, $B^n(\chi) = B^n = 0$ si n est impair et $n > 1$.

(c) Relations. - Les nombres de Bernoulli satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\forall\ m \in \underset{\sim}{N} , \quad \forall\ \chi \in X(m) , \quad \forall\ v \in \underset{\sim}{N} , \quad \forall\ n \in \underset{\sim}{N} \cup 0 ,$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n + 1}{i} B^i(\chi)(vm)^{n+1-i} = (n + 1) \sum_{a=1}^{vm} \chi(a)a^n \quad . \tag{2}$$

En particulier, nous avons :

(3) $$B^0(\chi) = \frac{1}{m} \sum_{a=1}^{m} \chi(a) \quad .$$

PROPOSITION 1. - Pour tout $\chi \in X$, $\forall$ nombre premier p, $\forall\, n \in \underset{\sim}{N} \cup 0$, nous avons :

$$B^n(\chi\theta^0) = B^n(\chi)(1 - \chi(p)p^{n-1}) \quad .$$

Ceci se déduit immédiatement de la relation de définition (1). Cette égalité est très intéressante car elle permet de changer le caractère χ en le caractère $\chi\theta^0$ pour lequel p divise tous les éléments de $M(\chi\theta^0)$.

Notation. - Soient $\chi \in X(m)$, $v \in \underset{\sim}{N}$, posons :

$$S_\chi^n(vm) = \sum_{a=1}^{vm} \chi(a)a^n \quad .$$

PROPOSITION 2. - Pour tout $m \in \underset{\sim}{N}$ tel que $\omega(m) = r > 0$, pour tout $\chi \in X(m)$ et $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, nous avons :

$$\frac{B^n(\chi)}{n} \equiv \frac{S_\chi^n(m)}{m} \mod p^{r-1} \quad .$$

En utilisant la relation de récurrence (2), on démontre d'abord que

$$\omega(mB^n(\chi)) \geqslant 0 \quad ,$$

et on prouve la congruence en se servant à nouveau de la relation (2).

PROPOSITION 3. - Si $\chi \in X(1)$, si $m \in \underset{\sim}{N}$ tel que $\omega(m) > 0$, alors :

$$\frac{S_\chi^n(m)}{n.m} \equiv 0 \mod p^0 \qquad \text{si } n \not\equiv 0 \mod p-1 \quad ,$$

$$\frac{S_\chi^n(m)}{m} \equiv 0 \mod p^{-1} \qquad \text{si } n \equiv 0 \mod p-1 \quad .$$

Dans ce dernier cas, nous avons même :

$$\omega\left(\frac{S_\chi^n(m)}{m}\right) = -1 \quad .$$

Ces relations se démontrent par récurrence sur la valuation de m.

4. Congruences entre les nombres de Bernoulli relatifs à un caractère.

Nous nous proposons, tout d'abord, d'évaluer p-adiquement l'expression :

$$\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1} .$$

On s'aperçoit alors, en utilisant la proposition 2, que l'on est amené à évaluer :

$$T(\chi , m , s) = \frac{1}{s.m} \sum_{a=1}^{m} \chi\theta^0(a)\ \psi^s(a) ,$$

où $s \in \mathbb{N}$ et $m \in M(\chi\theta^0)$ avec $m = m_0 p^r$.

L'évaluation de $T(\chi , m , s)$ est assez longue parce qu'elle dépend de la nature du caractère χ . Elle se décompose en plusieurs lemmes.

On remarque d'abord que si $\chi = \chi_1 \chi_2$, où $\chi_1 \in X(p^r)$, $\chi_2 \in X(m_0)$, on est conduit à évaluer $T(\chi_1 , p^r , s)$, c'est-à-dire

$$U(\chi_1 , p^r , s) = \frac{1}{s.p^r} \sum_{u=1}^{\varphi(p^r)} \chi_1(h^u)\ \psi^s(h^u) ,$$

où h est générateur modulo p^r de $(\mathbb{Z}/p^r)^*$ si $p \neq 2$ (resp. $h = 5$ si $p=2$). On constate ensuite qu'il suffit de savoir évaluer :

$$V(\chi_1 , q , s) = \frac{1}{s.q} \sum_{u=1}^{q} \chi_1(h^u) u^s .$$

On s'aperçoit que les congruences que l'on obtient sont liées à la nature du caractère χ , c'est pourquoi nous allons introduire quelques notations qui simplifieront l'énoncé des théorèmes qui suivront.

Notations. - Si $\chi \in X$, soit $m \in M(\chi\theta^0)$, alors $m = m_0 p^r$ où $(m_0 , p) = 1$; si $p \neq 2$, $\chi\theta^0 = \chi_1 \cdot \chi_2$ où $\chi_1 \in X(p^r)$ et $\chi_2 \in X(m_0)$, il est bien immédiat que χ_1 et χ_2 ne dépendent pas du choix de m dans $M(\chi\theta^0)$ (il en est de même si $p = 2$ pour la décomposition $\chi\theta^0 = \chi_1 \chi_1' \chi_2$ où $\chi_1 \in X_1$, $\chi_1' \in X_1'$ avec $X_1 X_1' = X(p^r)$, et $\chi_2 \in X(m_0)$). Le nombre premier p étant fixé, δ et δ' sont des applications de $X \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ (il sera encore implicite que, lorsque dans une relation figurera un nombre premier p , les applications δ et δ' utilisées seront celles attachées à p) définies ainsi :

Soit $p \neq 2$, soit $\chi \in X$, soit $\chi\theta^0 = \chi_1 \chi_2$ la décomposition précédente, soit $s \in \mathbb{N}$, alors :

(α) si $\chi_2 \neq \chi_0$, $\delta(\chi , s) = \delta'(\chi , s) = 0$,

(β) si $\chi_2 = \chi_0$,

(i) si ordre $\chi_1 \neq p^e$, $\forall\, e \in \underset{\sim}{N}$,

$$\delta(\chi , s) = \delta'(\chi , s) = 0 \quad ,$$

(ii) si ordre $\chi_1 = p^e$ avec $e > 1$,

$$\delta(\chi , s) = \delta'(\chi , s) = \frac{s_0}{\varphi(p^e)} \quad ,$$

où $s \equiv s_0 \mod p - 1$ et $1 \leqslant s_0 \leqslant p - 1$,

(iii) si ordre $\chi_1 = p$,

$$\delta(\chi , s) = \frac{s_0}{p - 1} + \omega(s) \ , \qquad \delta'(\chi , s) = \frac{s_0}{p - 1} \quad ,$$

où $s \equiv s_0 \mod p - 1$ et $0 \leqslant s_0 \leqslant p - 2$,

(iv) si $\chi_1 = \chi_0$,

$$\delta(\chi , s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \not\equiv 0 \mod p - 1 \ , \\ 1 + \omega(s) & \text{si} \quad s \equiv 0 \mod p - 1 \ , \end{cases}$$

$$\delta'(\chi , s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \not\equiv 0 \mod p - 1 \ , \\ 1 & \text{si} \quad s \equiv 0 \mod p - 1 \ . \end{cases}$$

Si $p = 2$, soit $\chi \in X$, soit $\chi\theta^0 = \chi_1\, \chi_1'\, \chi_2$ la décomposition précédente, soit $s \in \underset{\sim}{N}$, alors :

(α) si $\chi_1 \neq \chi_0$, $\delta(\chi , s) = 1$,

(β) si $\chi_2 = \chi_0$ et $\chi_1' \neq \chi_0$, $\delta(\chi , s) = 1$,

(γ) si $\chi_2 = \chi_0$ et si $\chi_1' = \chi_0$,

(i) si ordre $\chi_1 = p^e$ avec $e > 1$, $\delta(\chi , s) = 1$,

(ii) si ordre $\chi_1 = 2$ ou si $\chi_1 = \chi_0$, $\delta(\chi , s) = 1 + \omega(s)$.

D'autre part, $\delta'(\chi , s) = 1$, $\forall\, \chi \in X$, $\forall\, s \in \underset{\sim}{N}$.

PROPOSITION 4. - Pour tout $\chi \in X$, $\forall\, m \in M(\chi\theta^0)$ tel que $\omega(m) \geqslant 2$ si $p \neq 2$ (resp. $\omega(m) \geqslant 3$ si $p = 2$), $\forall\, s \in \underset{\sim}{N}$, alors :

$$T(\chi , m , s) \equiv 0 \mod p^{-(1+\delta(\chi,s))} \quad .$$

COROLLAIRE. - Pour tout $\chi \in X$, $\forall\, m \in M(\chi\theta^0)$ tel que $\omega(m) \geqslant 2$ si $p \neq 2$ (resp. $\omega(m) \geqslant 3$ si $p = 2$), $\forall\, s \in \underset{\sim}{N}$, alors :

$$s.T(\chi \, , \, m \, , \, s) \equiv 0 \mod p^{-(1+\delta'(\chi,s))} \quad .$$

THÉORÈME 1. - Pour tout $\chi \in X$, $\forall\, s \in \underset{\sim}{N} \cup 0$, $\forall$ nombre premier p , nous avons :

$$\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1} \equiv 0 \mod p^{s-\delta(\chi,s+1)} \qquad \text{si } p \neq 2$$

(resp. $\mod p^{2s+1-\delta(\chi,s+1)}$ si $p = 2$).

Nous nous proposons maintenant d'évaluer p-adiquement la quantité :

$$A(\chi \, , \, n \, , \, v \, , \, r) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}(\chi\theta^{-(n+kv)}) - B^0(\chi\theta^0)}{n+kv}$$

$\forall\, \chi \in X$, $\forall\, n , v \in \underset{\sim}{N}$ et $\forall\, r \in \underset{\sim}{N} \cup 0$.

Nous considérons la série :

$$\Phi_p(x \, , \, \chi) = \sum_{s \geqslant 0} a_s \, Q_s(x) \quad ,$$

où

$$a_s = - \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1}$$

et

$$Q_s(x) = (-1)^s \frac{x(x+1) \ldots (x+s-1)}{s!} \quad .$$

La série $\Phi_p(x \, , \, \chi)$ est convergente (pour la topologie discrète) quel que soit x entier négatif, et de plus :

$$\Phi_p(1-m \, , \, \chi) = - \frac{B^m(\chi\theta^{-m}) - B^0(\chi\theta^0)}{m} \qquad \forall\, m \in \underset{\sim}{N} \quad .$$

Il suffira alors d'utiliser le théorème 1 pour évaluer $A(\chi \, , \, n \, , \, v \, , \, r)$.

Notation. - δ'' est une application de $X \times (\underset{\sim}{N} \cup 0)$ dans $\underset{\sim}{Q}$ définie par :

$$\delta''(\chi \, , \, r) = \min_{s \geqslant r} \left(\frac{p-2}{p-1}(s-r) - \delta(\chi \, , \, s+1)\right) \qquad \text{si } p \neq 2 \quad ,$$

$$\delta''(\chi \, , \, r) = \min_{s \geqslant r} (s - r - \delta(\chi \, , \, s+1)) \qquad \text{si } p = 2 \quad .$$

THÉORÈME 2. - <u>Pour tout nombre premier</u> p , $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, $\forall\, v \in \underset{\sim}{N} \cup 0$, $\forall\, r \in \underset{\sim}{N} \cup 0$, $\forall\, \chi \in X$, <u>nous avons</u> :

$$A(\chi\, ,\, n\, ,\, v\, ,\, r) \equiv 0 \mod p^{r(\omega(v)+1)+\delta''(\chi,r)} \qquad \underline{\text{si}}\ \ p \neq 2$$

(<u>resp.</u> $\mod p^{r(\omega(v)+2)+1+\delta''(\chi,r)}$ <u>si</u> $p = 2$).

<u>Remarque</u>. - L'expression $\delta''(\chi\, ,\, r)$ est très simple dans certains cas :

Si χ satisfait (α) ou $(\beta(i))$ si $p \neq 2$ (resp. (α), (β), $(\gamma(i))$ si $p = 2$),

$$\delta''(\chi\, ,\, r) = 0 \qquad (\text{resp. } \delta''(\chi\, ,\, r) = -1\ ) \quad .$$

Si χ satisfait $(\beta(ii))$,

$$\delta''(\chi\, ,\, r) = \frac{r_0 + 1}{\varphi(p^c)} \ ,$$

où $r \equiv r_0 \mod p - 1$ et $1 \leqslant r_0 \leqslant p - 1$.

COROLLAIRE 1. - Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$ et $\forall\, v \in \underset{\sim}{N} \cup 0$,

$$A(\chi\, ,\, n\, ,\, v\, ,\, 1) \equiv 0 \mod p^{\omega(v)+1-\delta(\chi,2)}$$

si $p \neq 2$ et $p \neq 3$, ou bien si $p \neq 2$ et si χ ne satisfait pas $(\beta(iii))$.

$$A(\chi\, ,\, n\, ,\, v\, ,\, 1) \equiv 0 \mod p^{\omega(v)+2-\delta(\chi,3)}$$

si $p = 3$ et si χ satisfait $(\beta(iii))$,

$$A(\chi\, ,\, n\, ,\, v\, ,\, 1) \equiv 0 \mod p^{\omega(v)+3-\delta(\chi,2)}$$

si $p = 2$.

Les théorèmes 6 et 7 de CARLITZ [2] se trouvent évidemment contenus dans ce corollaire.

COROLLAIRE 2. - <u>Pour tout nombre premier</u> $p \neq 2$, $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, $\forall\, v \in \underset{\sim}{N} \cup 0$ <u>tel que</u> $p - 1 | v$, $\forall\, \chi \in X$, <u>nous avons</u> :

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}(\chi)(1 - \chi(p)p^{n-1+kv}) - B^0(\chi\theta^n)}{n + kv} \equiv 0 \mod p^{r(\omega(v)+1)+\delta''(\chi,r)} \ .$$

<u>Si</u> $p = 2$, $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, $\forall\, v \in \underset{\sim}{N} \cup 0$ <u>tel que</u> $2 | v$, $\forall\, \chi \in X$, <u>nous avons</u> :

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}(\chi)(1 - \chi(p)p^{n-1+kv}) - B^0(\chi\theta^n)}{n + kv} \equiv 0 \mod p^{r(\omega(v)+2)+1+\delta''(\chi,r)} \ .$$

Ce corollaire contient le théorème 5 de CARLITZ [2].

COROLLAIRE 3. - Soit $p \neq 2$ un nombre premier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tel que $n \not\equiv 0 \mod p-1$, $\forall\, v \in \mathbb{N} \cup 0$ tel que $p-1 | v$, $\forall\, r \in \mathbb{N} \cup 0$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}}{n+kv} (1 - p^{n-1+kv}) \equiv 0 \mod p^{r(\omega(v)+1)} .$$

Si les conditions sont les mêmes que précédemment, excepté que $n \equiv 0 \mod p-1$,

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}}{n+kv} (1 - p^{n-1+kv}) \equiv \frac{p-1}{p} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{1}{n+kv}$$
$$\mod p^{r(\omega(v)+1)-\delta''(\theta^0, r)} ;$$

$$\text{si } r < p-2 , \qquad \delta''(\theta^0 , r) = 0 ,$$

$$\text{si } r \geqslant p-2 , \qquad \delta''(\theta^0 , r) \leqslant 1 + [\log_p (r+1)] .$$

Si $p = 2$, si $2|v$, la première relation est vraie $\mod p^{r(\omega(v)+2)}$, et la seconde est vraie $\mod p^{r(\omega(v)+2)+1+\delta'(\theta^0,r)}$.

Ce corollaire constitue une amélioration de la congruence de Kummer [4] qui s'énonce ainsi :

Pour tout $r \in \mathbb{N} \cup 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tel que $n > r$ et $n \not\equiv 0 \mod p-1$,

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}}{n+kv} \equiv 0 \mod p^r .$$

Par une méthode analogue, nous pouvons évaluer p-adiquement la quantité :

$$B(\chi , n , v , r) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} B^{n+kv}(\chi\theta^{-(n+kv)}) .$$

THÉORÈME 3. - Pour tout nombre premier p, $\forall\, n , v , r \in \mathbb{N} \cup 0$, $\forall\, \chi \in X$, nous avons :

$$B(\chi , n , v , r) \equiv 0 \mod p^{r(\omega(v)+1)-\delta'(\chi,r)} \qquad \text{si } p \neq 2$$

(resp. $\mod p^{r(\omega(v)+2)-2}$ si $p = 2$).

COROLLAIRE.

Si $p \neq 2$, si $p-1 | v$,

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} B^{n+kv}(1-p^{n-1+kv}) \equiv 0 \mod p^{r(\omega(v)+1)-1}$$

si $n \not\equiv 0 \mod p-1$, ou si $r \not\equiv 0 \mod p-1$ (resp. $\mod p^{r(\omega(v)+1)-2}$ si $n \equiv 0 \mod p-1$ et $r \equiv 0 \mod p-1$).

Si $p = 2$, si $2|v$,

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} B^{n+kv}(1-p^{n-1+kv}) \equiv 0 \mod p^{r(\omega(v)+2)-2} \quad .$$

Ce corollaire répond à un problème posé par NIELSEN ([6], p. 278) : L'expression $\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} B^{n+kv}$ est-elle divisible par une puissance de p supérieure à 1 ?

5. Les fonctions p-adiques L_p .

(a) Définition. - Dans ce paragraphe, les caractères χ seront primitifs. Nous noterons par $f(\chi)$ le conducteur du caractère χ . La fonction $L_p(\cdot , \chi)$ est une application continue de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p(\chi(1) , \ldots , \chi(f(\chi)))$ satisfaisant

$$L_p(1-m , \chi) = -\frac{B^m(\chi\theta^{-m})}{m} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N} \quad .$$

Remarque. - Si $m \equiv 0 \mod p-1$, si $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \mod 2$, si $p = 2$),

$$L_p(1-m , \chi) = -\frac{B^m(\chi\theta^0)}{m} \quad .$$

En vertu de la proposition 1, nous avons :

$$L_p(1-m , \chi) = -\frac{B^m(\chi)}{m}(1-\chi(p)p^{m-1}) \quad .$$

Si $L(\cdot , \chi)$ est la fonction de Dirichlet complexe, nous obtenons :

$$L_p(1-m , \chi) = L(1-m , \chi)(1-\chi(p)p^{m-1})$$

$\forall\, m \in \mathbb{N}$ tel que $m \equiv 0 \mod p-1$ si $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \mod 2$ si $p = 2$).

Ainsi, sur les entiers négatifs de la classe de 0 $\mod p-1$ si $p \neq 2$ (resp. mod 2 si $p = 2$), $L_p(\cdot , \chi)$ coïncide avec la fonction complexe $L(\cdot , \chi)$ au facteur multiplicatif près $(1 - \chi(p)p^{m-1})$.

Plus généralement, sur les entiers d'une classe de m_0 mod $p - 1$, si $p \neq 2$ (resp. mod 2 si $p = 2$), $L_p(\cdot , \chi)$ coïncide avec la fonction complexe $L(\cdot , \chi_{m_0})$ à un facteur multiplicatif près (χ_{m_0} étant le caractère primitif associé à $\chi\theta^{-m}$).

Nous nous proposons maintenant d'étudier ces fonctions $L_p(\cdot , \chi)$ par la méthode de l'interpolation p-adique. Les congruences sur les nombres de Bernoulli nous fourniront les évaluations nécessaires pour utiliser les critères d'analycité, et pour déterminer le module de continuité de la fonction $L_p(\cdot , \chi)$.

(b) Analycité. - Soit u la suite définie par $u_k = - k$. Soit $\Phi_p(\cdot , \chi)$ la fonction définie sur la suite u par :

$$\Phi_p(u_k , \chi) = - \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k + 1} .$$

Suivant les notations de [1], posons :

$$P_n(X) = (X - u_0)(X - u_1) \ldots (X - u_{n-1}) = X(X + 1) \ldots (X + n - 1) ,$$

$$Q_n(X) = \frac{P_n(X)}{P_n(u_n)} = (- 1)^n \frac{X(X + 1) \ldots (X + n - 1)}{n!}$$

et

$$a_s = P_s(u_s)\Big(\sum_{k=0}^{s} \frac{\Phi_p(u_k , \chi)}{P'_{s+1}(u_k)}\Big) ,$$

soit

$$a_s = - \sum_{k=0}^{s} (- 1)^{s-k} \binom{s}{k} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k + 1} .$$

Nous sommes conduits à évaluer l'expression $\frac{1}{s}(\omega(a_s) - \omega(s!))$.

Le théorème 1 montre que :

$$\omega(a_s) \geqslant s - \delta(\chi , s + 1) \qquad \text{si } p \neq 2 ,$$

$$\omega(a_s) \geqslant 2s + 1 - \delta(\chi , s + 1) \qquad \text{si } p = 2 ;$$

il s'ensuit que, comme $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{1}{s} \delta(\chi , s + 1) = 0$ et que $\lim \omega(s!) = \frac{1}{p - 1}$,

$$\underline{\lim}\, \frac{1}{s} \left(\omega(a_s) - \omega(s!)\right) \geqslant \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \qquad \text{si } p \neq 2 \ ,$$

$$\underline{\lim}\, \frac{1}{s} \left(\omega(a_s) - \omega(s!)\right) \geqslant 1 \qquad \text{si } p = 2 \ .$$

Alors, le théorème 3 du chapitre III de [1] permet d'affirmer que la fonction $\Phi_p(\cdot\, , \chi)$ se développe en série d'interpolation sous la forme :

$$\Phi_p(x\, , \chi) = \sum_{s \geqslant 0} a_s\, Q_s(x) \qquad \forall\, x \in \underset{\sim}{Z}_p \ ,$$

que $\Phi_p(\cdot\, , \chi)$ <u>est analytique stricte sur</u> $\underset{\sim}{Z}_p$, et que son développement en série à l'origine a un rayon de convergence R_p satisfaisant les inégalités :

$$R_p \geqslant p^{(1-1/p-1)} \qquad \text{si } p \neq 2 \ ,$$

$$R_p \geqslant 2 \qquad \text{si } p = 2 \ .$$

Si $\chi\theta^0 \neq \chi_0$, $B^0(\chi\theta^0) = 0$ et

$$\Phi_p(1 - m\, , \chi) = - \frac{B^m(\chi\theta^{-m})}{m} = L_p(1 - m\, , \chi)$$

pour tout entier $m \in \underset{\sim}{N}$, par suite de la densité des entiers négatifs dans $\underset{\sim}{Z}_p$ et de la continuité de $\Phi_p(\cdot\, , \chi)$ et $L_p(\cdot\, , \chi)$, nous avons :

$$\Phi_p(\cdot\, , \chi) = L_p(\cdot\, , \chi) \ .$$

Si $\chi\theta^0 = \chi_0$, puisque χ est un caractère primitif $\chi\theta^0 = \theta^0$ et $B^0(\chi\theta^0) = \frac{p-1}{p}$, donc :

$$\Phi_p(1 - m\, , \chi) = - \frac{B^m(\chi\theta^{-m})}{m} + \frac{\frac{p-1}{p}}{m} \ ,$$

soit

$$\Phi_p(1 - m\, , \chi) = L_p(1 - m\, , \chi) - \frac{\frac{p-1}{p}}{(1 - m) - 1} \ .$$

Puisque χ est le caractère principal de conducteur 1 , posons :

$$L_p(\cdot\, , \chi) = \zeta_p(\cdot) \ .$$

Par suite,

$$\zeta_p(x) = \Phi_p(x\, , \chi) + \frac{\frac{p-1}{p}}{x - 1} \qquad \forall\, x \in \underset{\sim}{Z}_p \ .$$

La fonction ζ_p <u>est donc méromorphe</u> (son rayon de méromorphie est celui de l'holomorphie de $\Phi_p(. , \chi)$, et $x = 1$ est le seul pôle, il est simple et a pour résidu $\frac{p-1}{p}$).

(c) <u>Module de continuité des fonctions</u> $L_p(. , \chi)$. - En appliquant le corollaire 1 du théorème 2, nous pouvons expliciter le <u>module de continuité de</u> $L_p(. , \chi)$ (avec $\chi \neq \chi_0$) <u>sur</u> $\underset{\sim}{Z}_p$ de la façon suivante :

(a) Si $p \neq 2$.

Si $f(\chi) \neq p^r$ ou si ordre $\chi \neq p^e$,

$$\omega(L_p(x , \chi) - L_p(x' , \chi)) \geqslant 1 + \omega(x - x') \quad .$$

Si $f(\chi) = p^r$ et si ordre $\chi = p^e$, sauf si $f(\chi) = 3^r$ et ordre de $\chi = 3$,

$$\omega(L_p(x , \chi) - L_p(x' , \chi)) \geqslant 1 - \frac{e}{\varphi(p^e)} + \omega(x - x') \quad .$$

Si $f(\chi) = 3^r$ et ordre $\chi = 3$,

$$\omega(L_p(x , \chi) - L_p(x' , \chi)) \geqslant \frac{1}{2} + \omega(x - x') \quad .$$

(b) Si $p = 2$.

Si $f(\chi) \neq 2^r$ ou si χ est impair ou si ordre $\chi \neq 2$,

$$\omega(L_p(x , \chi) - L_p(x' , \chi)) \geqslant 2 + \omega(x - x') \quad .$$

Si $f(\chi) = 2^r$, si χ est pair et si ordre $\chi = 2$,

$$\omega(L_p(x , \chi) - L_p(x' , \chi)) \geqslant 1 + \omega(x - x') \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math., Paris, 1964).

[2] CARLITZ (L.). - Arithmetic properties of generalized Bernoulli numbers, J. für reine und angew. Math., t. 202, 1959, p. 174-182.

[3] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, Teil 1 : Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen, J. für reine und angew. Math., t. 214/215, 1964, p. 328-339.

[4] KUMMER (E. F.). - Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwickelungskoëfficienten einer bestimmten Gattung analytischer Funktionen, J. für reine und angew. Math., t. 41, 1851, p. 368-372.

[5] LEOPOLDT (H. W.). - Eine verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, t. 22, 1958, p. 131-140.

[6] NIELSEN (N.). - Traîté élémentaire des nombres de Bernoulli. - Paris, Gauthier-Villars, 1923.