Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

André Gillet

Définition de paramètres d'équirépartition

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, n° 1 (1965-1966), exp. n° 10, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_1_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
7e année, 1965/66, n° 10

7 février 1966

DÉFINITION DE PARAMÈTRES D'ÉQUIRÉPARTITION

par André GILLET

Introduction. - On sait que la suite des na (n entier, a irrationnel fixé) est équirépartie sur les arcs de $T = \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$. Cela veut dire que si M est un arc de T de mesure m et si l'on pose $M(a , N)$, le nombre des na sur M pour $0 \leqslant n < N$, on a

$$M(a , N) - mN \in o(N) \quad .$$

Il est plus précis de dire que cette suite est uniformément équirépartie, c'est-à-dire que

$$S(a , N) = \sup_M |M(a , N) - mN| \in o(N) \quad .$$

On retrouvera ce fait chemin faisant (théorème 1.b).

Notre but est de préciser l'ordre de grandeur de $S(a , N)$. La première idée était de classer $S(a , N)$ parmi les puissances de N . De façon précise, soit $w(a)$ la borne inférieure de l'ensemble des s , tels que $S(a , N) \in o(N^s)$. Nous avons calculé $w(a)$ en fonction du développement de a en fraction continue.

Pour obtenir des résultats plus fins, la question se posait de classer $S(a , N)$ parmi d'autres fonctions. Des résultats assez généraux peuvent être atteints dans le cadre suivant :

Définition des paramètres. - Soit $s \longmapsto G_s$ une famille de fonctions réelles. On suppose que :

$$\begin{cases} s \text{ parcourt un intervalle de } \bar{R} \ ; \\ \text{Les } G_s \text{ sont positives, croissantes, concaves ;} \\ \text{Si } s < t \ , \ G_s \in o(G_t) \ . \end{cases}$$

Pour une fonction F réelle, dont l'ensemble de définition a $+\infty$ pour point d'accumulation, définissons $g(F)$ comme borne inférieure de l'ensemble des s tels que $F \in O(G_s)$.

Il faut donc que $F \in O(G_s)$ pour un s au moins. Cela ne nous gênera pas ; on peut toujours se ramener à ce cas en prolongeant la famille des G , car les F qui nous intéressent vérifient $F(x) \in o(x)$.

Posant en particulier $g(a) = g(S(a\ ,\ N))$ pour simplifier les notations, on voit que $g(a) = w(a)$ dans le cas particulier où $G_s(x) = x^s$.

Propriétés des paramètres. - A cause de la concavité, $G_s(x) \in O(x)$.

Par suite, si s n'est pas maximal : $G_s(x) \in o(x)$.

D'après cela et la concavité, $G_s(y) - G_s(x)$ est infiniment petit par rapport à $y - x$, quand x et y tendent vers l'infini.

En particulier, $G_s(ax) - G_s(x)$, où a est une constante positive, est dans $o(x)$, a fortiori dans $o(G_s(x))$.

On en déduit la propriété suivante, où $s < t$, et a , b , c , d sont quatre constantes positives :

$$[x \longmapsto cG_s(ax + b) + d] \in o(G_t) \quad .$$

Comme notation, si nous avons deux suites u_i et v_i de réels, avec u_i tendant vers l'infini, $(u_i \longmapsto v_i)$ sera la fonction définie seulement sur l'ensemble des u_i et prenant évidemment pour u_i la valeur v_i .

$g(u_i \longmapsto v_i)$ sera donc le paramètre de cette fonction au sens d'une certaine famille G_s .

Plan de cet ouvrage. - Nous avons trois parties :

I : Relation entre équirépartition et fractions continues. - Nous établissons dans cette partie des relations de plus ou moins forte croissance entre $S(a\ ,\ N)$ et certaines fonctions liées à la suite des dénominateurs des réduites du développement de a en fraction continue. Nous exprimons ces relations sous forme d'inégalités entre paramètres.

D'abord (théorème 1.a), une limitation inférieure de $g(a)$, le paramètre de $S(a\ ,\ N)$. On s'est inspiré des méthodes de WEYL [4], en comparant (lemme 1) l'intégrale d'une fonction B sur T à la moyenne des $B(na)$ pour $0 \leqslant n < N$. Mais nous sommes amenés ici à introduire les fonctions à variation bornée au lieu des fonctions continues.

Ensuite (théorèmes 1.b et 1.c) des limitations supérieures de $g(a)$. On s'est inspiré là d'une méthode très élémentaire (HARDY and WRIGHT [1]), qui consiste à remarquer que les na , pour $a = p/q$ fraction irréductible et $0 \leqslant n < q$, sont sommets d'un polygone régulier de T , et que c'est presque la même chose si a est très voisin de p/q .

Le rapprochement des limitations obtenues permet de ramener le calcul de certains paramètres, tel w, au développement en fraction continue. Pour d'autres, on a seulement des encadrements, et cela donne tout au moins des théorèmes d'existence de valeurs de $g(a)$ dans certaines limites.

Un résultat intéressant que nous ayons est que l'on puisse choisir a de telle sorte qu'au sens de nos paramètres la répartition soit "aussi mauvaise qu'on veut", de façon précise que $g(a) > t$, t donné non maximal sur l'ensemble de définition de $s \longmapsto G_s$.

Au contraire, nous ne savons pas si la répartition peut être aussi bonne qu'on veut. Nous savons seulement que $S(a, N) \in O(\log N)$ pour certains a.

II : Relation avec la géométrie des nombres. - Rappelons le problème suivant, qui a donné lieu à de nombreux et savants travaux :

C étant une courbe rectifiable contenant une aire A dans le plan rapporté aux coordonnées ordinaires, et $C(c, z)$ le nombre de points à coordonnées entières contenus dans la transformée de C par l'homothétie de centre c et rapport z, quel est l'ordre de grandeur de $C(c, z) - Az^2$?

On peut poser la question uniformément sur c, c'est-à-dire prendre la fonction F_C définie par

$$F_C(z) = \sup_c |C(c, z) - Az^2| \quad .$$

Dans le cas où C a une courbure comprise entre deux constantes strictement positives, on sait que $w(F_C)$, avec nos notations, est entre $1/2$ et $2/3$ (voir par exemple LANDAU [2]). $w(F_C) \leqslant 1$, pour n'importe quelle C, remonte à GAUSS et est très facile à obtenir. La limite $2/3$ (due à SIERPINSKI) est atteinte pour certaines C (qui ont été construites par JARNIK), mais n'est pas atteinte pour le cercle (VAN DER CORPUT), dont la constante est inconnue. (La limite $1/2$ est de HARDY et LITTLEWOOD.)

Nous avons étudié ici le cas des polygones. C'est en fait une question très différente, mais qui jette quelque lueur sur la complexité du problème général.

Le résultat est que $w(F_C)$ est capable de prendre toute valeur entre 0 et 1 inclus, selon le polygone C.

Comme idée de la démonstration, on comprend bien que si l'on a un "très grand" polygone, la différence entre l'aire et le nombre de points à coordonnées entières doit être, intuitivement, d'autant plus petite que chacun des côtés passe plus régulièrement entre les points à coordonnées entières, de sorte qu'en prenant aux diverses abscisses entières les segments interceptés par le polygone et les points entiers, on ait des écarts variés qui se neutralisent en additionnant. Cela conduit, si a est la pente d'un côté, aux na modulo 1 .

C'est précisément en pensant à cette application que nous avons dosé les axiomes demandés à nos paramètres. Il y a juste ce qu'il faut pour atteindre un résultat général bien net (théorème 2) :

$g(F)$, que nous notons plus simplement $g(K)$ pour le polygone K , est au plus égal au plus grand des paramètres des côtés de K , et il y a égalité si l'un de ces paramètres est strictement plus grand que les autres.

III : Etude "autonome" des paramètres. - Si l'on ne se réfère pas au développement de a en fraction continue, nous ne savons aucune façon de calculer un paramètre, si ce n'est (théorème 3) le cas où a se déduit par transformation homographique d'un nombre b de paramètre déjà connu : on a alors le même paramètre.

L'essentiel du théorème 3 est obtenu au moyen d'un procédé géométrique bien naturel (si l'on a le théorème 2) : ni la surface, ni le nombre de points entiers intérieurs ne sont altérés par symétrie (lemme 3.b).

Comme c'est la méthode des fractions continues qui a fait réussir cette étude de répartition, il est clair que des résultats sont à attendre sans trop de peine dans d'autres questions où se présente aussi un tel mode d'approximation. Nous verrons donc enfin une telle question. Mais les résultats sont faibles. Nos paramètres sont trop fins dans cette question, en regard des méthodes.

I. Relation entre équirépartition et fractions continues.

LEMME 1. - Prenons une suite quelconque de points a_n sur T . Désignons (pour l'arc M de mesure m) par $M(N)$ le nombre de a_n situés sur M pour $0 \leqslant n < N$. Fixons N , et posons :

$$S = \sup_M |M(N) - mN| \quad .$$

Soit F une fonction sur T égale à $h > 0$ sur un intervalle M et nulle ailleurs. On a :

$$\Big| \sum_{0 \leqslant n < N} f(a_n) - mNh \Big| \leqslant hS \quad .$$

Considérons ensuite une somme F de telles fonctions, dont les M aient un point commun, et ajoutons les inégalités obtenues :

$$\Big|\sum_{0\leqslant n<N} F(a_n) - N\int_T F(x)\,dx\Big| \leqslant S \sup F \quad .$$

Cela s'étend en passant à la limite : fonction croissante sur un arc et décroissante sur le complémentaire. On peut enfin passer à une fonction B à variation bornée $V(B)$ comme différence de deux fonctions du type précédent :

$$\Big|\sum_{0\leqslant n<N} B(a_n) - N\int_T B(x)\,dx\Big| \leqslant S\, V(B) \quad .$$

En particulier, $V(x \longmapsto \cos 2\pi\, qx) = 4q$; même chose pour $\sin$. On en tire :

$$\Big|\sum_{0\leqslant n<N} e^{2i\pi q a_n}\Big| \leqslant 8qS \quad .$$

Appliquant enfin cela à la suite $a_n = na$, on trouve :

$$|\sin \pi\, qNa| \leqslant 8q\, |\sin \pi\, qa|\, S(a\, ,\, N) \quad .$$

THÉORÈME 1.a. - Soient p_i/q_i les réduits du développement de a en fraction continue, et g un paramètre :

$$g\Big(q_i \longmapsto \frac{q_i}{q_{i-1}}\Big) \leqslant g(a) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - On sait que (prenant $a > 0$, ce qui ne diminue pas la généralité) :

$$\frac{1}{q_i(q_{i+1} + q_i)} < \Big|a - \frac{p_i}{q_i}\Big| < \frac{1}{q_i\, q_{i+1}} \quad .$$

On en tire :

$$0 < q_{i+1}|q_i\, a - p_i| < 1 < (q_{i+1} + q_i)|q_i\, a - p_i| < 2 \quad .$$

Fixons $0 < t < 1$. Pour i assez grand peut se déterminer un entier N_i , tel que :

$$\begin{cases} q_{i+1} < 2N_i < q_{i+1} + q_i \\ \big|2N_i|q_i\, a - p_i| - 1\big| < t \quad . \end{cases}$$

On a donc $|\sin \pi\, q_i\, N_i\, a| > \cos t(\pi/2)$, et on peut appliquer le lemme 1 avec $s > g(a)$, $q = q_i$, et i assez grand :

$$G_s(N_i) > \frac{\cos\, t(\pi/2)}{8q_i\,|\sin \pi\, q_i\, a|} > k\,\frac{q_{i+1}}{q_i} \quad .$$

Pour tout $r < g(q_i \longmapsto q_i/q_{i-1})$, on trouvera donc une infinité de i tels que :

$$G_s(N_i) > G_r(q_{i+1}) > G_r(N_i) \implies s \geqslant r \quad .$$

COROLLAIRE. - Ce théorème a pour conséquence que l'équirépartition peut être "aussi mauvaise qu'on veut" : partant d'une fonction G_s telle que s ne soit pas maximal sur l'ensemble de définition de $s \longmapsto G_s$, fonction qui est donc dans $o(x \longmapsto x)$, on peut construire a de telle sorte que $q_i/q_{i-1} > G_s(q_i)$ pour tout i , puisque, par récurrence, on peut rendre les q_i aussi grands qu'on veut et que $x/q_{i-1} > G_s(x)$ pour x assez grand.

THÉORÈME 1.b.

$$g(a) \leqslant g(q_{i-1}\, q_i \longmapsto q_i) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit d'abord $N = q_i$. On a, pour $0 \leqslant n < N$:

$$|na - np_i/q_i| < \frac{1}{2q_i} \quad .$$

Comme les np_i/q_i sont les n/q_i dans un autre ordre, c'est-à-dire les sommets d'un "polygone régulier" sur T , leur comparaison aux na donne facilement pour tout M :

$$|M(q_i) - mq_i| < 3 \quad .$$

D'autre part, remarquons que $M(a\ ,\ N + N') = M(a\ ,\ N) + M'(a\ ,\ N')$, où M' est l'intervalle déduit de M par translation $(-\ a\ ,\ N)$, ce qui entraîne donc $S(a\ ,\ N + N') \leqslant S(a\ ,\ N) + S(a\ ,\ N')$. On divise N par q_i , et (appliquant une majoration triviale au reste) :

$$S(a\ ,\ N) < \frac{3N}{q_i} + q_i \quad .$$

Nous avons donc $g(a) \leqslant g(C)$, C enveloppe convexe des fonctions $x \longmapsto \frac{3x}{q_i} + 3q_i$, fonction linéaire par morceaux dont les sommets sont :

$$(x_i = q_i\, q_{i-1}\ ,\ \ C(x_i) = 3q_i + 3q_{i-1}) \quad .$$

On majore a fortiori (compte tenu de la concavité des G_s) par la fonction $(q_i\, q_{i-1} \longmapsto 6q_i)$.

COROLLAIRE. - Ce théorème contient une démonstration de l'équirépartition (très peu différente d'une des démonstrations classiques, celle qui figure dans HARDY and WRIGHT [1]), puisque nous voyons tout-de-suite que $C \in o(x \longmapsto x)$. Cependant, s'il est utile pour les répartitions "mauvaises", il vaut mieux le retoucher pour les "bonnes".

THÉORÈME 1.c.

$$g(a) \leqslant g(q_i \longmapsto \frac{q_i \log q_i}{q_{i-1}}) \quad .$$

Nous reprenons le premier pas de la démonstration de 1.b. Mais, pour

$$q_i < N < q_{i+1} \quad ,$$

nous décomposons :

$$N = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i} b_j\, q_j \quad .$$

On aura $b_i < N/q_i$ et $b_j < q_{j+1}/q_j$ (si $j < i$). La décomposition de N donne aussitôt $S(a\ ,\ N) < 3b$.

Soit Q l'enveloppe convexe de $(q_i \longmapsto q_i/q_{i-1})$. On aura $b_j < Q(N)$ pour tous les j , et (à cause de $q_{i+2} > 2q_i$), $i \in O(\log N)$, d'où :

$$S(a\ ,\ N) < K\ Q(N) \log N \quad ,$$

avec une constante K convenable. Maintenant, le remplacement de Q par $(q_i \longmapsto q_i/q_{i-1})$ ne change pas le paramètre du produit avec $\log$, car on contrôlera sans difficulté que, si R_i interpole linéairement $(q_i \longmapsto q_i/q_{i-1})$ dans l'intervalle $(q_{i-1}\ ,\ q_i)$, la fonction $R_i \log$ est convexe dans cet intervalle.

Le cas de "meilleure équirépartition" que nous ayons est celui des "quotients bornés", irrationnelles quadratiques par exemple. Alors, $S(a\ ,\ N) \in O(\log N)$. Mais nous ne savons pas si ce résultat est le plus fin, n'ayant d'ailleurs pour ce cas aucune réponse dans l'autre sens par le théorème 1.a (le théorème 1.b ne donne, dans ce cas, que $W \leqslant \frac{1}{2}$).

Le paramètre W . - W est défini par les fonctions $x \longmapsto x^s$.

Posant $\dfrac{q_i}{q_{i-1}} = (q_i)^{z_i}$, soit $z_i = 1 - \dfrac{\log q_{i-1}}{\log q_i}$, on voit aussitôt qu'il faut introduire le paramètre

$$\hat{W} = \overline{\lim}\, \frac{\log q_i}{\log q_{i-1}} \quad .$$

Les théorèmes 1.a et 1.c donnent aussitôt :

$$W = 1 - \frac{1}{\hat{W}} .$$

Comme il est clair que $\hat{W}$ peut prendre toute valeur positive, W peut prendre toute valeur dans $[0 , 1]$.

Comme exemples, $W = 1$ pour les nombres de Liouville, et $W(a) = 0$ pour a algébrique d'après le théorème de Roth.

Autres exemples.

1° Définissons v par les fonctions $x \longmapsto (\log x)^s$.

Suivant la marche du paragraphe précédent, on introduit :

$$\hat{v} = \overline{\lim} \frac{\log(q_i/q_{i-1})}{\log \log q_i} .$$

Les théorèmes 1.a et 1.c donnent :

$$\hat{v} \leqslant v \leqslant \hat{v} + 1 ,$$

ce qui montre à tout le moins que v est susceptible de prendre une infinité de valeurs ($\hat{v}$ pouvant, lui, prendre toute valeur positive). Comme exemple, $v(e) \leqslant 2$, puisqu'on sait que les quotients de e sont $O(i)$.

2° Définissons V par les fonctions $x \longmapsto x(\log x)^s$.

(De même que v est intéressant quand $W = 0$, V est à considérer quand $W = 1$.) On introduira ici :

$$\hat{V} = \overline{\lim} \frac{\log \log q_i}{\log q_{i-1}} .$$

Les théorèmes 1.a et 1.b donnent la relation exacte :

$$V = - \frac{1}{\hat{V}} .$$

II. Relation avec la géométrie des nombres.

LEMME 2. - Passons à la géométrie des nombres. Pour un polygone K , désignons par $A(K)$ et $P(K)$ l'aire et le nombre de points à coordonnées entières dans K . Notons $\bar{\bar{x}}$ la différence du réel x au plus proche demi-impair $(-\frac{1}{2} < \bar{\bar{x}} \leqslant \frac{1}{2})$. Dans ce lemme, K sera un trapèze limité aux droites

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} & y = -\frac{1}{2} \\ x = N - \frac{1}{2} & y = ax + b \end{cases} \qquad \text{(fig. 1)} .$$

Il est clair que $A(K) = \sum_{0 \leq n < N} \overline{an + b}$, et que $an + b$ s'obtient aussi en ajoutant $\overline{an + b}$ au nombre des points entiers d'abscisse n de K . Ainsi :

$$A(K) - P(K) = \sum_{0 \leq n < N} \overline{an + b} .$$

Pour étudier $A(K) - P(K)$, fixons N et a . La fonction de b ainsi obtenue admet la période 1 et s'annule quand $a(\frac{N-1}{2}) + b$ est demi-impair, et de plus $\inf F(b) = -\sup F(b)$: tout cela se voit immédiatement par raisons de symétrie. Examinons maintenant la variation $F(b + m) - F(b)$. On peut se limiter à $0 < m < 1$. Désignons par M l'arc $(o , -m)$ de T (fig. 2).

$$\begin{cases} \text{Si } na \notin M : & \overline{an + b + m} = \overline{an + b} + m , \\ \text{Si } na \in M : & \overline{an + b + m} = \overline{an + b} + m - 1 . \end{cases}$$

Donc $F(b + m) - F(b) = (m - 1)\, M(N) + m(N - M(N))$
$= mN - M(N)$.

Toutes ces propriétés de F conduisent à

$$\sup_b \,[A(K) - P(K)] = \tfrac{1}{2}\, S(a , N) .$$

THÉORÈME 2. - K est maintenant un polygone, a_j les pentes de ses côtés, $K_{z,c}$ le transformé de K par homothétie de centre c et rapport z . On a donc à étudier :

$$g(K) = g[z \longmapsto \sup_c \{A(K_{z,c}) - P(K_{z,c})\}] .$$

Alors $g(K) \leq \sup_j g(a_j)$, et il y a égalité si l'un des $g(a_j)$ est strictement supérieur à tous les autres.

Pour le démontrer, notons que $K \longmapsto A(K)$ et $K \longmapsto P(K)$ sont additifs pour la juxtaposition des polygones. On découpera donc $K_{z,c}$ en trapèzes par les droites $y = -\frac{1}{2}$ et $x = x_j - \overline{x}_j$ (où les x_j soient les abscisses des sommets). Il s'introduit aussi de petits triangles T_j , mais dont A comme P sont bornés, disons par k_j (fig. 3). Chaque trapèze est soumis au lemme 2. Si C_j sont les projections sur Ox des côtés de K , notons que les bases des trapèzes de décomposition sont $C_j\, z$ modulo $O(1)$. En définitive :

$$|A(K_{z,c}) - P(K_{z,c})| < \tfrac{1}{2} \sum_j G_{s_j}(C_j\, z + 1) + k_j < G_t(z) ,$$

où $t > s_j > g(a_j)$, et z assez grand. Cela donne l'inégalité annoncée. Partant ensuite de $A - P$ du premier trapèze de décomposition, on trouvera de même :

$$g(a_1) \leqslant \sup_{j>1} (g(K) , g(a_j)) \quad .$$

Cela donne l'égalité, et justifie ce qui avait été annoncé dans l'introduction : $w(K)$ est susceptible de prendre toutes valeurs de $[0 , 1]$.

III. Etude "autonome" des paramètres.

THÉORÈME 3. - Tout paramètre est invariant par transformation homographique à coefficients entiers.

Cela découlera facilement des deux lemmes suivants :

LEMME 3-a. - Pour tout h entier positif : $g(a) \leqslant g(ha)$.

Divisant N par h : $N = hq + r$, nous répartissons les x de 0 à hq en h progressions arithmétiques selon le reste par h . Pour chacune, on trouvera sur M , pour $s > g(ha)$ et N assez grand, mq points avec une erreur moindre que $G_s(q)$. Au total, on aura mN points avec une erreur moindre que

$$hG_s(N/h + 1) + h \quad ,$$

donc que $G_t(N)$, pour tout $t > s$, dès que N est assez grand.

LEMME 3-b. - $g(a) = g(\frac{1}{a})$.

K_z sera ici le triangle limité à $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, et $y = z - ax$. Posant $f(z) = A(K_z) - P(K_z)$, on voit, comme au théorème 2, que $g(f) = g(a)$. Mais échangeons le rôle des axes. Soient maintenant le triangle nommé $\underset{\sim}{K}_z$ et la fonction correspondante $\underset{\sim}{f}$. On a :

$$\underset{\sim}{K}_z = K_{z/a} \implies \underset{\sim}{f}(z) = f(z/a) \implies g(\underset{\sim}{f}) = g(f) \quad .$$

D'autre part, $g(\underset{\sim}{f}) = g(1/a)$, d'où le résultat.

Remarque. - On peut affaiblir la définition des paramètres, ce qui conserve quand même une partie des résultats. Remplaçons, par exemple, l'axiome $G_s \in o(G_t)$, pour $s < t$, par le suivant :

$G_s(bx + c) + d < G_t(x)$ dès que x est assez grand (en fonction de $s < t$, et b , c , d positifs donnés).

On a facilement les résultats suivants (k , K , L étant des constantes) :

- Théorème 1.a : $g(q_i \longmapsto k \frac{q_i}{q_{i-1}}) \leqslant g(a)$;

- Théorème 1.b : $g(a) \leqslant g(q_{i-1} q_i \longmapsto Kq_i)$;

- Théorème 1.c : $g(a) \leqslant g(q_i \longmapsto \frac{Lq_i \log q_i}{q_{i-1}})$;

- Théorème 2 : il faut revenir au calcul. Par exemple, pour le paramètre faible u défini par $x \longmapsto s \log x$ on trouve

$$2\, u(K) \leqslant \sum_j u(a_j) \quad .$$

- Théorème 3 : le lemme 3.b demeure exact, ce qui fait que les paramètres faibles sont invariants par les transformations de déterminant unitaire. Le lemme 3 a donné des limitations. Par exemple :

$$u(\frac{m}{n}\, a) \leqslant mn\, u(a) \quad .$$

Sur une question analogue. - Soient K une extension quadratique de Q complexe, E l'anneau des entiers de K , F un parallélogramme fondamental fixé de C relatif au groupe E , F_z son homothétique (centre 0 , rapport $\sqrt{z}$). Soit ensuite M un parallélogramme de F , d'aire m (l'aire de F étant prise pour unité). Désignons par $M(a , z)$ le nombre des na dans M (mod E) pour $n \in E \cap F_z$. Considérons

$$S(a , z) = \sup_M |M(a , z) - mz| \quad .$$

L'équirépartition ([1]) des na se définit ici par $S(a , z) \in o(z)$. Dans toute la suite, on suppose E principal et $a \notin K$. On sait alors qu'il existe une infinité de fractions p_i/q_i irréductibles (c'est-à-dire telles que les idéaux engendrés par p_i et q_i soient étrangers) et telles que

$$|q_i(q_i\, a - p_i)| < P_K + \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ quelconque } > 0)$$

où P_K est la constante de Poitou du corps K ([2]). Il s'ensuit que, dans le parallélogramme Fq (nous omettons l'indice i à partir de maintenant), la multiplication par p permute les éléments de $E \cap Fq$. Par similitude, la multiplica-

---

([1]) Uniforme répartition sur les parallélogrammes (mieux : sur les convexes, sur les domaines de courbe, frontière inférieure en longueur à L_0).

([2]) Voir G. POITOU [3].

tion par p permute les éléments de $E/q \cap F$.

Pour n parcourant Fq , les na sont à comparer aux np/q , c'est-à-dire aux n/q . D'une part, ces derniers dessinent un réseau, et par suite on en trouvera dans M : $m|q|^2 \bmod O(|q|)$. D'autre part, les écarts sont de l'ordre de $1/|q|$ et sont responsables d'une erreur du même ordre. Pour n parcourant un translaté $Fq + n_0$, on est ramené au même résultat par une translation $n_0 a$ de M . Pour n parcourant F_z , nous considérons F_z dans le réseau des $Fq + tq$ $(t \in E)$, ce qui conduit à une partition de F_z en translatés de Fq , dont le nombre est $z/|q|^2 \bmod O(\sqrt{z}/|q|)$, et un domaine restant de l'ordre de $\sqrt{z}\,|q|$. On a enfin, tenant compte des incertitudes dans les translatés et le domaine restant :

$$S(a\ ,\ z) \in O(z/|q| + \sqrt{z}\,|q|) \quad .$$

Cela prouve l'équirépartition, puisqu'on a une infinité de $|q_i|$, aussi grands qu'on veut, ce qui fait que l'enveloppe G des fonctions $x \longmapsto x/|q_i| + \sqrt{x}\,|q_i|$ est dans $o(x \longmapsto x)$. Dans le cas particulier des quotients bornés, on a facilement $w \leqslant \frac{3}{4}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - Introduction to the theory of numbers, 3rd edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1954.

[2] LANDAU (Edmund). - Vorlesungen über Zahlentheorie, 3 Bände. - Leipzig, S. Hirzel, 1927.

[3] POITOU (Georges). - Sur l'approximation des nombres complexes par les nombres des corps imaginaires quadratiques dénués d'idéaux non principaux, particulièrement lorsque vaut l'algorithme d'Euclide, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 70, 1953, p. 199-265 (Thèse Sc. math. Paris, 1953).

[4] WEYL (H.). - Über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1 , Math. Annalen, t. 77, 1916, p. 313-352.

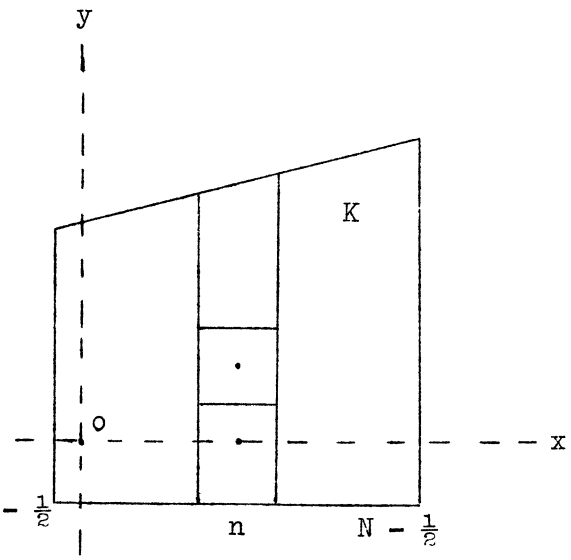

Figure 1

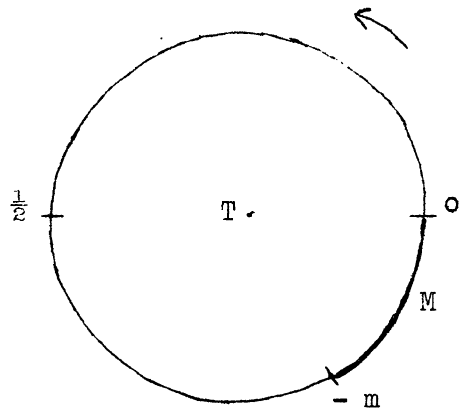

Figure 2

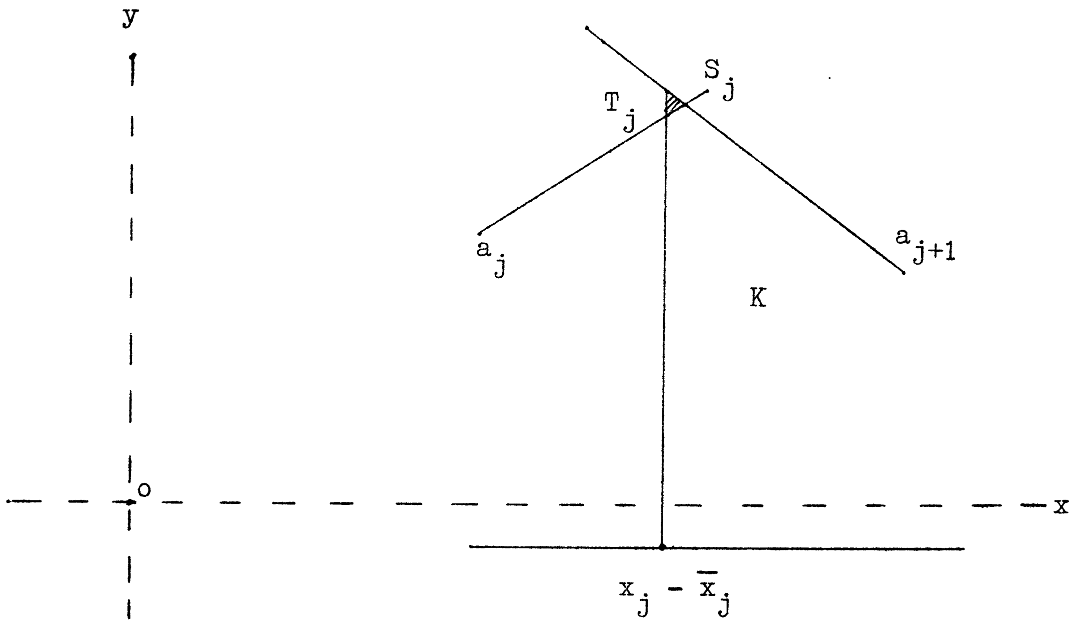

Figure 3