MARTHE GRANDET-HUGOT

Étude de certaines suites $\{\lambda\alpha^n\}$ dans les adèles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, nº 1 (1965-1966), exp. nº 7, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_1_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des Nombres)
7e année, 1965/66, n° 7

17 janvier 1966

ÉTUDE DE CERTAINES SUITES $\{\lambda\alpha^n\}$ DANS LES ADÈLES

par Marthe GRANDET-HUGOT

Nous allons donner ici une généralisation aux adèles de certains théorèmes sur la répartition mod 1 des suites $\{\lambda\alpha^n\}$ dans le corps des réels. Nous généraliserons, en particulier, les résultats suivants dus à C. PISOT [6], [7].

1° L'ensemble des nombres réels $\alpha > 1$ et λ, tels que (mod 1) la suite $\varphi_n = \lambda\alpha^n$ ait un nombre fini de points d'accumulation, est dénombrable. Si de plus α est algébrique, alors $\alpha \in S$, ensemble des nombres de Pisot, et $\lambda \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

2° Si α est un nombre réel supérieur à 1, et si $\lambda > 0$, $\alpha \in S$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) La suite $\varphi_n = \lambda\alpha^n$ a (mod 1) un nombre fini de points d'accumulation.

(b) La convergence de la répartition vers ses valeurs limites est $o(\frac{1}{n^{k+1}})$, k étant le nombre de valeurs limites irrationnelles.

1. Rappels et notations.

Considérons l'ensemble P des valuations de $\mathbb{Q}$, o désignant la valuation ordinaire, et p la valuation p-adique avec $|p|_p = p^{-1}$, $\mathbb{Q}_p$ désignant la complétion de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique et Ω_p sa clôture algébrique.

Soit I un sous-ensemble fini de P, posons :

$$I^+ = I \cup \{0\} \qquad \text{et} \qquad I^- = I - \{0\} \quad \text{si} \quad o \in I \ .$$

Si V_p désigne l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, V_I désignera l'anneau des I-adèles de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire :

$$V_I = \{x \in V_p \ \text{ tels que } \ x_p = 0 \ \text{ si } \ p \notin I\} \ ;$$

V_I est alors isomorphe algébriquement et topologiquement à $\prod_{p\in I} \mathbb{Q}_p$, et contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$, soit $\mathbb{Q}e_I$, où e_I est l'élément unité de V_I. Enfin nous désignerons par $\mathbb{Z}[I]$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ ainsi défini :

$$Z[I] = \{x \in \mathbb{Q} \ , \ |x|_p \leqslant 1 \ \text{ pour } \ p \notin I^+\} \ .$$

Décomposition d'Artin [1], [2]. - Soit a un nombre réel ; nous appellerons domaine fondamental de V_I, noté $F_a(I)$, le sous-ensemble de V_I ainsi défini :

$$F_a(I) = \{x \in V_I \;,\; |x|_p \leqslant 1 \text{ pour } p \in I^- \text{ et } 0 \leqslant x_0 < a+1 \text{ si } o \in I\} \;.$$

On obtient alors le théorème suivant [1], [2] :

Soit $x \in V_I$; il existe une décomposition unique

$$x = e_I\, E(x) + \varepsilon(x) \;,$$

où

$$E(x) \in Z[I] \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) \in F_a(I) \;,$$

de plus, si $o \notin I$, on a l'inégalité

$$a \leqslant -E(x) < a+1 \;.$$

2. Remarque sur la décomposition d'Artin des suites $\{\lambda\alpha^n\}$.

Soit α un élément de V_I tel que $|\alpha|_p > 1$ pour tout $p \in I$, et soit λ un élément inversible de V_I.

Si a est un nombre réel quelconque, la décomposition d'Artin de $\lambda\alpha^n$ peut s'écrire, en prenant $F_a(I)$ comme domaine fondamental,

$$\lambda\alpha^n = e_I\, u_n + \varepsilon(\lambda\alpha^n) \;.$$

Alors : deux suites $\{\lambda\alpha^n\}$ et $\{\lambda'\alpha'^n\}$ distinctes ne peuvent pas engendrer la même suite $\{u_n\}$.

En effet si

$$\lambda\alpha^n = u_n + \varepsilon(\lambda\alpha^n) \;,$$

$$\lambda'\alpha'^n = u'_n + \varepsilon(\lambda'\alpha'^n) \;.$$

Alors si $|\alpha|_p > |\alpha'|_p$,

$$\alpha_p^n\left[\lambda_p - \lambda'_p\left(\frac{\alpha'_p}{\alpha_p}\right)^n\right] = \varepsilon_p(\lambda\alpha^n) - \varepsilon_p(\lambda'\alpha'^n) \;,$$

et le deuxième membre reste borné, tandis que le premier membre augmente indéfiniment avec n ; on en déduit que

$$|\alpha|_p = |\alpha'|_p \quad \text{et} \quad |\lambda|_p = |\lambda'|_p \quad \text{pour tout } p \in I \;,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_p - \lambda'_p\left(\frac{\alpha'_p}{\alpha_p}\right)^n = 0 \quad ,$$

ce qui entraîne $\lambda_p\,\alpha_p^n = \lambda'_p\,\alpha_p'^n$ à partir d'un certain rang, d'où $\alpha_p = \alpha'_p$ et $\lambda_p = \lambda'_p$ pour $p \in I$, donc $\alpha = \alpha'$ et $\lambda = \lambda'$.

3. Ensembles $S_I^{p'}(a)$.

Soit $p' \in P$; si $p' \notin I$, nous poserons $I' = I \cup \{p'\}$. V_I est alors un sous-anneau de $V_{I'}$ et, étant donné un élément $x \in V_I$, nous pouvons considérer sa décomposition d'Artin dans $V_{I'}$; alors :

Pour tout $x \in V_I$, il existe une décomposition unique :

$$x = e_{I'}\,E(x) + \varepsilon(x) \quad ,$$

où

$$E(x) \in \underset{\sim}{Z}[I'] \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(x) \in F_a(I') \quad ,$$

c'est-à-dire que si $p' \notin I$,

$$\varepsilon_{p'}(x) = -\,E(x) \quad .$$

DÉFINITION. - Nous appellerons $S_I^{p'}(a)$ l'ensemble des éléments $\alpha \in V_I$ tels que $|\alpha|_p > 1$ pour tout $p \in I$, et qu'il existe un élément inversible $\lambda \in V_I$ tel que, étant donné $p' \in P$, si l'on considère la décomposition d'Artin de $\lambda\alpha^n$ dans $V_{I'}$,

$$\lambda\alpha^n = e_I\,u_n + \varepsilon(\lambda\alpha^n) \quad ,$$

avec $F_a(I')$ comme domaine fondamental, on ait

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{p'}(\lambda\alpha^n) = 0 \quad .$$

Les éléments algébriques de cet ensemble sont alors les ensembles $S_I^{p'}$ définis par F. BERTRANDIAS [2] :

$S_I^{p'}$ est l'ensemble des éléments algébriques θ de V_I tels que $|\theta|_p > 1$ pour tout $p \in I$ et pour lesquels il existe un polynôme $A \in \underset{\sim}{Z}[X]$ ayant les propriétés suivantes :

- θ est racine de A dans V_I ,
- Les racines de A dans $\underset{\sim}{\Omega}_{p'}$ (distinctes de $\theta_{p'}$ si $p' \in I$) appartiennent au disque $|X|_{p'} < 1$,

- Les racines de A dans Ω_p (distinctes de θ_p si $p \in I$) appartiennent au disque $|X|_p \leqslant 1$ pour tout $p \in P$.

Nous allons alors démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - L'ensemble $\mathcal{S}_I^{p'}(a)$ est dénombrable, et l'ensemble des λ associés aux $\alpha \in \mathcal{S}_I^{p'}(a)$ est également dénombrable.

Démonstration. - De la décomposition d'Artin de $\lambda\alpha^n$ dans $V_{I'}$,

$$\lambda\alpha^n = e_I\, u_n + \varepsilon(\lambda\alpha^n) \quad ,$$

on déduit

$$(1) \qquad e_I\Big(u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n}\Big) = -\frac{u_{n+2}}{u_n}\varepsilon(\lambda\alpha^n) + 2\frac{u_{n+1}}{u_n}\varepsilon(\lambda\alpha^{n+1}) - \varepsilon(\lambda\alpha^{n+r}) + \frac{\varepsilon^2(\lambda\alpha^{n+1}) - \varepsilon(\lambda\alpha^n)\,\varepsilon(\lambda\alpha^{n+r})}{u_n} \quad ,$$

d'où l'on tire les majorations suivantes, en posant

$$|\alpha|_p = p^{t_p} \qquad \text{pour} \quad p \in I^-$$

$$|\lambda|_p = p^{r_p} \quad .$$

(a) Pour $p \in I^-$ et $p \neq p'$. - A partir d'un certain rang :

$$|u_n|_p = p^{r_p + nt_p} \quad ;$$

on a donc, à partir d'un certain rang,

$$(2) \qquad \Big|u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n}\Big|_p \leqslant p^{2t_p} \quad .$$

(b) Pour $p = o \in I$, $p \neq p'$. - Alors $|\varepsilon_0(\lambda\alpha^n)| \leqslant \max(|a| \ , \ |a+1|) = A$, et quand n augmente indéfiniment, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste borné, il existe une constante M telle que

$$(3) \qquad \Big|u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n}\Big| \leqslant M$$

à partir d'un certain rang.

(c) Pour $p' \in I^-$. – Alors, étant donné ε, à partir d'un certain rang :

$$|\varepsilon(\lambda\alpha^n)|_{p'} < \varepsilon \quad ,$$

d'où :

(4) $$\left|u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right|_{p'} < \varepsilon p^{2t_{p'}} \quad .$$

(d) Pour $p' = o \in I$. – Alors, nécessairement $|a| < 1$, et, étant donné ε, à partir d'un certain rang :

$$|\varepsilon_0(\lambda\alpha^n)| < \varepsilon \quad ,$$

d'où :

(5) $$\left|u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right| < \varepsilon M \quad ,$$

où M est une constante.

Nous allons montrer que si $u_0, \dots, u_{n+1}$ sont donnés, ces inégalités, jointes à celles qui définissent le domaine fondamental et, éventuellement (si $p' \notin I$), à celles qui expriment que $\varepsilon_{p'}(\lambda\alpha^n) \to 0$, déterminent u_{n+2} de manière unique. Pour cela, supposons qu'il existe deux éléments u_{n+2} et u'_{n+2} de $\underset{\sim}{Z}[I']$ vérifiant ces inégalités, et étudions la différence $u_{n+2} - u'_{n+2}$ dans les différents cas possibles.

1° $p' \in I$.

– Si $p' \neq 0$ et $o \in I$, de (3) on tire :

(3') $$|u_{n+2} - u'_{n+2}| \leqslant 2M \quad ,$$

et, pour $p \neq p'$ et $p \neq 0$, de (2) on tire :

(2') $$|u_{n+2} - u'_{n+2}|_p \leqslant p^{2t_p} \quad ;$$

enfin, de (4) on tire :

(4') $$|u_{n+2} - u'_{n+2}|_{p'} \leqslant \varepsilon p^{2t_{p'}} \text{ à partir d'un certain rang} \quad .$$

– Si $o \notin I$, d'après la définition de $F_a(I')$ on aura :

(6) $$|u_{n+2} - u'_{n+2}| < 1 \quad .$$

– Si $p' = 0$, alors de (5) on tire :

(5') $$|u_{n+2} - u'_{n+2}| < 2\varepsilon M \quad .$$

Dans tous les cas, on a donc :

$$\prod_{p\in I^+} |u_{n+2} - u'_{n+2}|_p < C\varepsilon \quad ,$$

où C est une constante , donc si ε est choisi assez petit, à partir d'un certain rang on a :

$$\prod_{p\in I^+} |u_{n+2} - u'_{n+2}|_p < 1 \quad ,$$

ce qui, compte tenu du fait qu'alors $u_n \in \underset{\sim}{Z}[I]$, entraîne que $u_{n+2} = u'_{n+2}$.

2° $p' \notin I$.

Pour $p \in I$ et pour la valuation ordinaire si $p' \neq 0$, on utilise les mêmes inégalités que ci-dessus et l'on a, à partir d'un certain rang :

$$|u_{n+2}|_{p'} < \varepsilon \quad ,$$

d'où

$$|u_{n+2} - u'_{n+2}|_{p'} < 2\varepsilon \quad ,$$

donc

$$\prod_{p\in I'^+} |u_{n+2} - u'_{n+2}|_{p'} < C\varepsilon \quad ,$$

ce qui permet de conclure comme plus haut.

L'ensemble des suites $\{u_n\}$ est donc dénombrable, et puisqu'à chaque suite correspond au plus un élément α et un élément λ de V_I , l'ensemble des α et l'ensemble des λ sont des ensembles dénombrables.

4. Cas où $\varepsilon_{p'}(\lambda\alpha^n)$ a un nombre fini de points d'accumulation.

On peut, sans restreindre la généralité du problème, prendre $a = -\frac{1}{2}$.

$p' \neq 0$. - Considérons une suite d'éléments $\varphi_n \in V_{I'}$ (ici $\varphi_n = \lambda\alpha^n$), et supposons que, pour $p' \in I'$, $\varepsilon_{p'}(\varphi_n)$ ait un nombre fini de points d'accumulation dans $\underset{\sim}{Z}_{p'}$.

Soient r_i $(i = 1 , \dots , h)$ les points d'accumulation rationnels, et ω_j $(j = 1 , \dots , h)$ les autres. Si $(\varphi_n)_{p'}$ désigne la composante de φ_n dans $\underset{\sim}{Q}_{p'}$:

<u>On peut trouver un élément</u> $d \in \underset{\sim}{Z}[P']$ <u>tel que, dans la décomposition d'Artin de</u> $d\varphi_n$, <u>le seul point d'accumulation rationnel de</u> $\varepsilon_{p'}(d\varphi_n)$ <u>soit</u> 0 .

Dans la suite, nous supposerons avoir ramené toutes les valeurs limites rationnelles à 0 .

Etant donné le système des formes linéaires :

$$\Lambda j = x\omega_j - y_j \qquad j = 1 , \dots , h ,$$

on sait (cf. [5], chapitre II) qu'on peut trouver un entier H aussi grand que l'on veut tel que :

$$|x\omega_j - y_j|_{p'} < \frac{1}{H^{1+1/h}} \qquad j = 1 , \dots , h ,$$

avec

$$H = \max_{j=1,\dots,h} (|x| , |y_j|) ,$$

x et les y_j étant des entiers rationnels premiers entre eux dans leur ensemble.

On a alors nécessairement $|x|_{p'} = 1$, car si $|x|_{p'} < 1$, on aurait, d'après l'inégalité ultramétrique, $|y_j|_{p'} < 1$ pour tout j , et x et les y_j ne seraient pas premiers entre eux dans leur ensemble.

On a donc :

$$(x\varphi_n)_{p'} = x\, E(\varphi_n) + x\omega_j + \varepsilon_n \qquad j = 0 , 1 , \dots , h ,$$

où éventuellement l'on pose $w_0 = 0$, et $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc, si

$$\eta_j = x\omega_j - y_j ,$$

$$(x\varphi_n)_{p'} = x\, E(\varphi_n) + y_j + \eta_j + x\varepsilon_n$$

et

$$|\eta_j|_{p'} < \frac{1}{H^{1+1/h}} \qquad j = 1 , \dots , h .$$

On peut donc poser :

$$x\varphi_n = v_n\, e_{I'} + \eta_n \qquad \text{où} \quad v_n = xu_n + y_j ,$$

où $v_n \in Z[I']$, et où η_n vérifie les inégalités suivantes, pour n assez grand :

$$|\eta_n|_{p'} < \frac{2}{H^{1+1/h}}$$

$$|\eta_n|_p \leqslant 1 \qquad \text{pour } p \neq p'$$

$$|\eta_n|_0 < H + \frac{1}{2} .$$

On peut alors écrire des inégalités analogues à celles du § 3, c'est-à-dire :

- Si $p' \in I$:

$$|v_{n+2} - \frac{v_{n+1}^2}{v_n}|_{p'} \leqslant \frac{K}{H^{1+1/h}} \quad ,$$

où K est une constante.

- Si $p' \notin I$, alors :

$$|v_n|_{p'} \leqslant \frac{K}{H^{1+1/h}}$$

à partir d'un certain rang.

Pour la valeur absolue ordinaire, on obtient les inégalités suivantes :

- Si $o \in I$:

$$|v_{n+2} - \frac{v_{n+1}^2}{v_n}| < CH \quad .$$

- Si $o \notin I$:

$$|v_n| \leqslant CH \quad ,$$

C étant une constante.

On en déduit de la même manière qu'au § 3 que l'ensemble des suites $\{v_n\}$ est dénombrable, ainsi que l'ensemble des α et des λ .

$p' = 0$. - La démonstration est presque identique à celle qui a été faite dans le cas réel [7].

THÉORÈME 2. - <u>Les éléments</u> $\alpha \in V_I$, <u>tels qu'il existe un élément inversible</u> λ <u>de</u> V_I , <u>pour lequel, en considérant la décomposition d'Artin de</u> $\lambda\alpha^n$ <u>dans</u> V_I , $\varepsilon_{p'}(\lambda\alpha^n)$ <u>ait un nombre fini de points d'accumulation dans</u> $Z_{p'}$, <u>forment un ensemble dénombrable. L'ensemble des</u> λ <u>associés est également dénombrable</u>.

On démontre alors, de manière analogue à ce qui a été fait dans le cas réel [7], que les éléments algébriques de cet ensemble sont les éléments de $S_I^{p'}$ [2].

<u>Cas particulier où</u> $p' = 0$. - Dans ce cas, grâce à un théorème d'A. DECOMPS [3], [4], on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - <u>Si</u> $\alpha \in V_I$ <u>et</u> $|\alpha|_p > 1$, <u>pour tout</u> $p \in V_I$, <u>et si les conditions suivantes sont vérifiées</u> :

(a) <u>Il existe un élément inversible</u> λ <u>de</u> V_I <u>tel que, si l'on considère la décomposition d'Artin de</u> $\lambda\alpha^n$ <u>dans</u> V_I :

$$\lambda\alpha^n = u_n e_I + \varepsilon(\lambda\alpha^n) \quad ,$$

$\varepsilon_0(\lambda\alpha^n)$ admet un nombre fini de points d'accumulation.

(b) La convergence de $\varepsilon_0(\lambda\alpha^n)$ vers ses points d'accumulation est $o(\frac{1}{n^{h+1}})$, h étant le nombre de points d'accumulation irrationnels.

Alors $\alpha \in S_I^0$, et λ est un élément de l'anneau $Q_I[\alpha]$.

Il suffit de montrer que α est algébrique ; on utilise alors l'un ou l'autre des théorèmes suivants [3], [4].

THÉORÈME A $(o \notin I)$. - Soit $\alpha \in V_I$, $|\alpha|_p = p^{t_p}$, $t_p > 0$, $\forall\, p \in I$. S'il existe $\lambda \in V_I$, $|\lambda|_p = p^{b_p}$, $b_p > 0$, $\forall\, p \in I$, tel que dans la décomposition d'Artin :

$$\lambda\alpha^n = e_I u_n + \varepsilon(\lambda\alpha^n) \quad ,$$

on ait :

$$|u_n| < \frac{1}{q^2 e(1 + \log m)} \qquad \forall\, n \geqslant 0 \quad ,$$

où

$$q = \prod_{p\in I} p^{t_p} \qquad \text{et} \qquad m = \prod_{p\in I} p^{b_p} \quad ,$$

alors α et λ sont algébriques.

THÉORÈME B $(o \in I)$. - Soit $\alpha \in V_I$, $|\alpha|_p = p^{t_p}$, $t_p > 0$, $\forall\, p \in I^-$ et $|\alpha_0| > 1$; s'il existe $\lambda \in V_I$, $|\lambda|_p = p^{b_p}$, $b_p > 0$, $\forall\, p \in I^-$ et $|\lambda_0| > 1$ tel que dans la décomposition d'Artin :

$$\lambda\alpha^n = e_I u_n + \varepsilon(\lambda\alpha^n) \quad ,$$

on ait :

$$|\varepsilon_0(\lambda\alpha^n)| < \frac{1}{2q^2 \alpha_0(\alpha_0 + 1)\, e(1 + \log m)} \qquad \forall\, n \geqslant 0 \quad ,$$

où l'on a posé :

$$q = \prod_{p\in I^-} p^{t_p} \quad , \qquad m = \prod_{p\in I} |\lambda|_p \quad ,$$

alors α et λ sont algébriques.

La démonstration se fait alors comme dans le cas réel [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions, New York and Princeton University, 1950-1951 (multigraphié).

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965 (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[3] DECOMPS-GUILLOUX (Annette). - Ensembles d'éléments algébriques dans les adèles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 1929-1931.

[4] DECOMPS-GUILLOUX (Annette). - Répartition modulo 1 de $\lambda\alpha^n$ dans les adèles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 7e année, 1965/66, n° 5.

[5] LUTZ (Elisabeth). - Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1224 ; Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg, 12).

[6] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248.

[7] PISOT (Charles). - Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres réels, Comment. Math. Helvet., t. 19, 1946, p. 153-160.