Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

ANNETTE DECOMPS-GUILLOUX

Répartition de $\lambda\alpha^n$ dans les adèles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, nº 1 (1965-1966), exp. nº 5, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_1_A4_0>

RÉPARTITION DE $\lambda\alpha^n$ DANS LES ADÈLES

par Annette DECOMPS-GUILLOUX

1. Anneau des I-adèles. Décomposition d'Artin.

P désignera l'ensemble de toutes les valuations distinctes de Q, corps des rationnels ; o sera la valuation ordinaire notée $|\ |$; p la valuation p-adique notée $|\ |_p$, et définie par $|p|_p = \frac{1}{p}$; $Q_o = R$ est le corps complété de Q par rapport à la valuation ordinaire ; Q_p le corps complété de Q par rapport à la valuation p-adique. (Dans la suite, p désignera un élément quelconque de P, on aura éventuellement $p = 0$.)

$V_P(Q)$, anneau des adèles de Q, est l'ensemble des éléments

$$x = (x_0 , x_1 , \ldots , x_n , \ldots)$$

du produit de Q_o par tous les corps p-adiques

$$x_0 \in R , \quad \ldots , \quad x_n \in Q_{p_n} \qquad \text{tels que} \quad |x_n|_{p_n} \leqslant 1 ,$$

sauf au plus pour un nombre fini d'indices n. L'addition et la multiplication composante par composante donnent à V_P une structure d'anneau. V_P contient des sous-anneaux remarquables : I désignant un sous-ensemble fini de P, V_I est le sous-anneau de V_P, défini ainsi :

$$V_I = \{x \in V_P , \ x_p = 0 \ \text{ si } \ p \notin I\} ,$$

on note $|x|_p = |x_p|_p$, e_I l'élément unité de V_I. Du point de vue topologique, on considère V_I comme isomorphe à $\prod_{p\in I} Q_p$.

Dans la suite, on considèrera toujours un anneau V_I où I est fini. (V_I est un I-adèle.)

$$I^- \text{ désigne} \begin{cases} I \ \text{ si } \ o \notin I , \\ I - \{0\} \ \text{ si } \ o \in I , \end{cases}$$

$$I^+ \text{ désigne} \begin{cases} I \ \text{ si } \ o \in I , \\ I + \{0\} \ \text{ si } \ o \notin I . \end{cases}$$

$Z[I]$ désigne l'anneau des rationnels dont le dénominateur ne contient que des facteurs p appartenant à I^-.

Nous utiliserons la décomposition d'Artin [1] qui, dans V_I , a l'expression suivante :

x <u>étant un élément de</u> V_I , <u>il existe une décomposition</u> :

$$x = e_I\, E(x) + \varepsilon_I(x) \quad ,$$

<u>où</u> $E(x)$ <u>appartient à</u> $Z[I]$, <u>et</u> $\varepsilon_I(x)$ <u>vérifie les inégalités</u> :

- $|\varepsilon_I(x)|_p \leqslant 1 \ , \ \forall\, p \in I^-$,
- <u>si</u> $o \in I \ , \ a \leqslant \varepsilon_0(x) < a + 1$,
- <u>si</u> $o \notin I \ , \ a \leqslant -E(x) < a + 1$.

Si a est fixé, la décomposition est unique.

2. Définition de l'ensemble S_I .

Nous allons introduire un nouvel ensemble comprenant les ensembles $S_I^{p'}$ introduits par Françoise BERTRANDIAS [2], dont on obtiendra des éléments par la méthode de Thue.

DÉFINITION. - S_I <u>est l'ensemble des éléments algébriques</u> θ <u>de</u> V_I , <u>vérifiant</u> $|\theta|_p > 1 \ , \ \forall\, p \in I$, <u>et pour lesquels il existe un polynôme</u> A <u>de</u> $Z[X]$ <u>ayant les propriétés suivantes</u> :

- θ <u>est racine de</u> A <u>dans</u> V_I ,
- <u>les racines de</u> A <u>dans</u> Ω_p , <u>clôture algébrique de</u> Q_p (<u>distinctes de</u> θ <u>pour</u> $p \in I$), <u>appartiennent au disque</u> $|x|_p \leqslant 1 \ , \ \forall\, p \in P$.

3. Méthode de Thue appliquée aux éléments de S_I .

3.1. <u>Principe de la méthode de Thue. Résultats dans le domaine réel</u>. - Pour montrer qu'un élément est algébrique, on lui associe en général une fonction, dont on démontre que c'est une fraction rationnelle par l'étude de son développement de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$. La méthode de Thue, qui s'appuie sur le principe des tiroirs, consiste à chercher à réaliser, a priori, une relation entre les u_n . On cherche, en utilisant une majoration des coefficients a_i de la relation supposée réalisée entre les u_n , le nombre de valeurs que peut prendre une telle expression. On dénombre les systèmes possibles, compte tenu de la majoration des coefficients. Si le nombre des systèmes est supérieur au nombre de valeurs que peut prendre l'expression, deux systèmes distincts donnent la même valeur, et il y a une relation linéaire et homogène à coefficients non tous nuls entre les u_n . Introduite par

THUE [8], cette méthode a été approfondie par Charles PISOT [5] et lui a permis d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. - Si α et λ sont deux nombres réels > 1, et si en posant $\lambda\alpha^n = u_n + \psi_n$ où $u_n \in Z$ et $-\frac{1}{2} \leqslant \psi_n < \frac{1}{2}$, on a, $\forall\ n \geqslant 0$:

$$|\psi_n| \leqslant \frac{1}{2e\alpha(\alpha+1)(1+\log\lambda)} ,$$

alors α et λ sont algébriques, et α est un nombre de Pisot ou de Salem.

3.2. Méthode de Thue : o n'appartient pas à I .

(a) Notations. - On considère $\theta \in V_I$, $\lambda \in V_I$; on pose :

$$|\theta|_p = p^{t_p} \qquad t_p > 0 , \ \forall\ p \in I \qquad \prod_{p\in I} p^{t_p} = q$$

$$|\lambda|_p = p^{b_p} \qquad b_p > 0 , \ \forall\ p \in I \qquad \prod_{p\in I} p^{b_p} = m .$$

On écrira la décomposition d'Artin sous la forme

$$\lambda\theta^n = e_I\ E(\lambda\theta^n) + \varepsilon_I(\lambda\theta^n) ,$$

en posant $u_n = E(\lambda\theta^n)$ avec $-\frac{1}{2} < u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

(b) Enoncé du théorème. - Soit θ un élément de V_I vérifiant $|\theta|_p > 1$, $\forall\ p \in I$; s'il existe λ appartenant à V_I et vérifiant $|\lambda|_p > 1$, $\forall\ p \in I$, tel que dans la décomposition d'Artin :

$$\lambda\theta^n = e_I\ u_n + \varepsilon_I(\lambda\theta^n) ,$$

on ait

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{q^2\ e(1+\log m)} \qquad \forall\ n \geqslant 0 ,$$

alors θ et λ sont algébriques et $\theta \in S_I$.

(c) Démonstration. - On se propose de trouver des entiers rationnels $a_0 , \dots , a_s$ tels que :

$$V_n = a_0\ u_n + a_1\ u_{n+1} + \dots + a_s\ u_{n+s} = 0 ,$$

avec $|a_0| \leqslant a$, $\forall\ i = 0 , 1 , \dots , s$.

Nous désignerons par $\frac{1}{U}$ une borne supérieure pour $|u_n|$.

- $U > (s+1)aq$ <u>et si</u> $V_0 = 0$, <u>alors</u> $V_n = 0, \forall n$. On a dans Q_p , $\forall p \in I$ la décomposition :

$$\lambda_p \theta_p^n = u_n + \varepsilon_p(\lambda\theta^n) \quad ,$$

on pose :

$$\varepsilon_p(\lambda\theta^n) = \varepsilon_{p,n} \qquad \text{où} \quad |\varepsilon_{p,n}| \leqslant 1 \ , \quad \forall p \in I \ ,$$

et l'on a :

$$|u_n|_p = p^{b_p + nt_p} \quad .$$

Formons

$$|V_{n+1} - \theta_p V_n|_p \leqslant \max|u_{n+i+1} - \theta_p u_{n+i}|_p \ ,$$

d'où

$$|V_{n+1} - \theta_p V_n| \leqslant \max|\theta_p \eta_{n+i} - \eta_{n+i+1}|_p \leqslant p^{t_p} \ ,$$

donc $V_n = 0$ entraîne

$$|V_{n+1}|_p \leqslant p^{t_p} \ , \quad \forall p \in I \qquad \text{et} \qquad \prod_{p\in I} |V_{n+1}|_p \leqslant q \quad .$$

D'autre part, la majoration $|a_i| \leqslant a$, $\forall i$, entraîne $|V_{n+1}| \leqslant \frac{(s+1)a}{U}$; or V_{n+1} étant un élément de $Z[I]$, si $|V_{n+1}| \prod_{p\in I} |V_{n+1}|_p < 1$, $V_{n+1} = 0$.

$V_n = 0$ entraîne

$$|V_{n+1}| \prod_{p\in I} |V_{n+1}|_p \leqslant \frac{a(s+1)q}{U} \ ,$$

donc si $U > a(s+1)q$ et si $V_0 = 0$, alors $V_n = 0$, $\forall n$.

- <u>On peut trouver, quel que soit l'entier</u> $s \geqslant 1$, <u>des entiers</u> $a_0, \dots, a_s$ <u>tels que</u> $V_0 = 0$ <u>dès que</u> $a \geqslant qm^{1/s} - 1$ <u>si</u> $U > a(s+1)q$.

Formons toutes les expressions

$$V_0' = A_0|u_0| + A_1|u_1| + \dots + A_s|u_s| \ ,$$

où les A_i , pour $i = 0, \dots, s$, sont des entiers vérifiant $0 \leqslant A_i \leqslant a$.

Il y a $(a+1)^{s+1}$ telles expressions, la valeur de chacune d'elles vérifie :

$$V_0' \leqslant \frac{(s+1)a}{U} \ ;$$

d'autre part, V_0' est un élément de $Z[I]$, comme

$$|u_n|_p = p^{b_p + nt_p} , \quad \forall\ p \in I \qquad u_n = \frac{W_n}{mq^n} ,$$

où $W_n \in Z$ et $|W_n|_p = 1$, $\forall\ p \in I$.

Le dénominateur de V_0' est donc celui de u_s , soit mq^s .

V_0' peut donc prendre $\frac{mq^s\ a(s+1)}{U}$ valeurs possibles. Donc si

$$(a+1)^{s+1} > \frac{(s+1)amq^s}{U} ,$$

on a deux systèmes avec des A_i distincts ayant la même valeur ; il existe donc un système donnant $V_0 = 0$ avec les a_i non tous nuls et inférieurs à a en valeur absolue. L'inégalité précédente est réalisée a fortiori si $a + 1 \geqslant qm^{1/s}$.

- Soit s l'entier défini par $s - 1 \leqslant \log m < s$. On a alors

$$(s+1)m^{1/s} < e(1 + \log m) .$$

La droite $y_1 = \frac{x}{s} + \log(1+s)$ et la courbe $y_2 = 1 + \log(1+x)$ se coupent pour $x = s$. Pour $x = s - 1$, on a $y_1 < y_2$, donc, en raison de la concavité de la courbe, on a

$$y_1(x) < y_2(x) , \quad \forall\ x \quad \text{vérifiant} \quad s - 1 \leqslant x < s ,$$

donc en particulier pour $x = \log m$. Cela nous donne l'inégalité :

$$(s+1)m^{1/s} < e(1 + \log m) ,$$

en prenant m défini par $s - 1 \leqslant \log m < s$ et a par $a < qm^{1/s} \leqslant a + 1$. On a alors

$$U \geqslant q^2\ e(1 + \log m) > q^2(s+1)m^{1/s} > a(s+1)q ,$$

et l'on peut trouver des entiers $a_0 , \dots , a_s$ tels que $V_n = 0$, $\forall\ n \geqslant 0$.

- La fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ représente une fraction rationnelle $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$; d'autre part, comme $u_n = \frac{W_n}{mq^n}$,

$$m\ f(qz) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n z^n \qquad \text{où } W_n \in Z .$$

L'étude du polygone de Newton de $Q(z)$, $\forall\ p \in I$, et l'application du théorème de Fatou, permettent de dire que θ est racine dans V_I du polynôme :

$$P(z) = qz^s + a_{s-1} z^{s-1} + \dots + a_0 \quad \text{où } q = \prod_{p \in I} p^{t_p} \text{ et } |a_{s-1}|_p = 1 , \ \forall\ p \in I ,$$

tous les zéros de P dans $\underset{\sim}{C}$ appartiennent à $|z| \leqslant 1$; donc $\theta \in S_I$ et $\lambda = \frac{-\theta\, P(1/\theta)}{Q'(1/\theta)}$, λ appartient donc au corps de θ.

3.3. Méthode de Thue : o appartient à I .

(a) Notations. - On considère $\theta \in V_I$ et $\lambda \in V_I$; on pose

$$|\theta|_p = p^{t_p} , \quad t_p > 0 , \quad \forall\, p \in I^- , \quad \prod_{p \in I^-} p^{t_p} = q ,$$

$$|\lambda|_p = p^{b_p} , \quad b_p > 0 , \quad \forall\, p \in I^- , \quad \prod_{p \in I^-} p^{b_p} = m' , \quad m'\lambda_0 = m .$$

(b) Enoncé du théorème. - Soit θ un élément de V_I vérifiant $|\theta|_p > 1$, $\forall\, p \in I^-$, et $\theta_0 > 1$; s'il existe λ élément de V_I vérifiant $|\lambda|_p > 1$, $\forall\, p \in I^-$, et $\lambda_0 > 1$ tel que dans la décomposition d'Artin :

$$\lambda\theta^n = e_I\, u_n + \varepsilon_I(\lambda\theta^n) ,$$

on ait :

$$|\varepsilon_0(\lambda\theta^n)| < \frac{1}{2eq^2\, \theta_0(\theta_0 + 1)(1 + \log m)} \qquad \forall\, n \geqslant 0 ,$$

alors θ et λ sont algébriques, et $\theta \in S_I$.

(c) Démonstration. - Le principe en est le même que précédemment, on cherche à réaliser :

$$V_n = a_0\, u_n + a_1\, u_{n+1} + \dots + a_s\, u_{n+s} = 0 ,$$

avec $a_i \in Z$ et $|a_i| \leqslant a$, $\forall\, i = 0, 1, \dots, s$.

On note $\frac{1}{\psi}$ la borne supérieure de $\varepsilon_0(\lambda\theta^n)$.

- Si $\psi > (1 + \theta_0)(s + 1)aq$ et si $V_0 = 0$, alors $V_n = 0$, $\forall\, n$.

$$V_n = 0 \implies \prod_{p \in I^-} |V_{n+1}|_p \leqslant q ;$$

d'autre part, $|V_{n+1} - \theta_0\, V_n| \leqslant a(s + 1) \max|u_{n+i+1} - \theta_0\, u_{n+i}|$,

$$|u_{n+i+1} - \theta_0\, u_{n+i}| = |\theta_0\, \varepsilon_{0,n} - \varepsilon_{0,n+1}| ,$$

en notant $\varepsilon_{0,n} = \varepsilon_0(\lambda\theta^n)$,

$$|V_{n+1} - \theta_0\, V_n| \leqslant \frac{(1 + \theta_0)}{\psi} ;$$

donc, si $V_n = 0$:

$$|V_{n+1}| \prod_{p\in I^-} |V_{n+1}|_p \leqslant \frac{(1+\theta_0)\, a(s+1)q}{\psi} .$$

- Si $\psi > (1+\theta_0)(s+1)aq$, on peut trouver, quel que soit l'entier s , des entiers $a_0 , \dots , a_s$ tels que $V_0 = 0$ si $a \geqslant 2q\theta_0\, m^{1/s} - 1$.

On a $(a+1)^{s+1}$ expressions

$$V_0' = A_0|u_0| + \dots + A_s|u_s| ,$$

où $A_i \in Z$, $0 \leqslant A_i \leqslant a$, $\forall\, i = 0 , 1 , \dots , s$, dont la valeur V_0' vérifie :

$$V_0' \leqslant a(s+1) \max|\lambda_0\, \theta_0^i + \frac{1}{\psi}|$$

$$< a(s+1)(\lambda_0\, \theta_0^s + \frac{1}{\psi}) .$$

Le dénominateur de V_0' est $q^s\, m'$, donc si

$$(a+1)^{s+1} \geqslant a(s+1)q^s\, m'|\lambda_0\, \theta_0^s + \frac{1}{\psi}| ,$$

égalité réalisée a fortiori si $a + 1 \geqslant 2q\theta_0\, m^{1/s}$, on a $V_0 = 0$ avec des a_i non tous nuls.

- En prenant s défini par $s - 1 \leqslant \log m < s$, et a par $a < 2q\theta_0\, m^{1/s} \leqslant a+1$,

$$\psi \geqslant 2e(1+\theta_0)\, \theta_0\, q^2(1 + \log m) > (1+\theta_0)(s+1)aq .$$

On peut donc trouver des entiers $a_0 , \dots , a_s$ tels que $V_n = 0$, $\forall\, n \geqslant 0$.

- La série $\sum u_n\, z^n$ représente une fraction rationnelle, et θ est racine du polynôme :

$$P(z) = qz^s + a_{s-1}\, z^{s-1} + \dots + a_0 \quad \text{où } q = \prod_{p\in I^-} p^{t_p} \quad \text{et } |a_{s-1}|_p = 1 , \quad \forall\, p \in I^-$$

dont toutes les racines complexes, sauf θ_0 , sont intérieures ou sur le cercle unité, donc $\theta \in S_I$ et $\lambda = \frac{-\theta\, P(1/\theta)}{Q'(1/\theta)}$.

3.4. Remarques.

(a) Dans le cas où o n'appartient pas à I , on peut remplacer la condition :

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{q^2\, e(1 + \log m)} \qquad \forall\, n \geqslant 0 ,$$

par la condition :

$$\prod_{p\in J, J\subset I} |\varepsilon_p(\lambda\theta^n)|_p \leqslant \frac{1}{q^2\, e(1+\log m)} \qquad \forall\, n \geqslant 0 ,$$

ou encore par la condition :

$$|u_n| \prod_{p\in J, J\subset I} |\varepsilon_p(\lambda\theta^n)|_p \leqslant \frac{1}{2eq^2(1+\log m)} \qquad \forall\, n \geqslant 0 .$$

On peut envisager également la condition suivante : $\exists\, p' \notin I$ tel que, dans la décomposition d'Artin dans $V_{I'}$ où $I' = I \cup p$, on ait :

$$|\varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n)|_{p'} \leqslant \frac{1}{q^2\, e(1+\log m)} .$$

(b) Dans le cas où o <u>appartient à</u> I , on peut remplacer la condition :

$$\varepsilon_0(\lambda\theta^n) \leqslant \frac{1}{2eq^2\, \theta_0(\theta_0+1)(1+\log m)} \qquad \forall\, n \geqslant 0 ,$$

par :

$$\prod_{p\in J, J\subset I} |\varepsilon_p(\lambda\theta^n)|_p \leqslant \frac{1}{2eq^2(\theta_0+1)^2\,(1+\log m)} \qquad \forall\, n \geqslant 0 ,$$

J contenant éventuellement 0 ; ou encore : $\exists\, p' \notin I$ tel que, dans la décomposition d'Artin dans $V_{I'} = V_{I\cup p}$, on ait :

$$|\varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n)|_{p'} \leqslant \frac{1}{2eq^2(\theta_0+1)^2\,(1+\log m)} \qquad \forall\, n \geqslant 0 .$$

4. Etude de S_I .

4.1. I <u>se réduit à un seul élément</u> $\{p\}$. – Dans ce cas, l'ensemble S_I est l'ensemble S_p , introduit par C. CHABAUTY.

Rappelons-en la définition :

<u>Un élément</u> θ <u>de</u> Q_p <u>vérifiant</u> $|\theta|_p > 1$ <u>appartient à</u> S_p <u>s'il est racine d'une équation de la forme</u> :

$$P(x) = p^t x^s + a_1 x^{s-1} + \dots + a_{s-1} x + a_s = 0 ,$$

(<u>les</u> a_i <u>sont des entiers rationnels,</u> t <u>un entier rationnel</u> > 0) <u>où tous les zéros de</u> P <u>sont dans</u> $|z| \leqslant 1$ <u>dans</u> C , <u>et dans</u> $|z|_p \leqslant 1$ <u>dans</u> Ω_p .

On notera $|\theta_i|$ les modules des racines de P dans $\underset{\sim}{C}$, $i = 1, 2, \dots, s$;

$|\theta_i|_p$ les valeurs absolues p-adiques des conjugués de θ dans Ω_p , $i = 2, \dots, s$.

C. CHABAUTY introduit les sous-ensembles suivants (nous utilisons ici les notations de Françoise BERTRANDIAS [2]) :

$$S_p^p = \{\theta \ , \ \theta \in S_p \ , \ |\theta_i|_p < 1 \ \text{pour} \ i = 2 , \dots , s\} \ ,$$

$$S_p^0 = \{\theta \ , \ \theta \in S_p \ , \ |\theta_i| < 1 \ \text{pour} \ i = 1 , 2 , \dots , s\} \ ,$$

et

$$S_p^0 \cap S_p^p \ .$$

Nous nous proposons de montrer que tout élément de S_p appartient à S_p^0 ou à T_p , ensemble que nous définirons ultérieurement, classification mettant en évidence l'analogie existant entre S_p^0 et S (nombres de Pisot), et T_p et T (nombres de Salem). S_p^0 est en effet fermé ([3], [6]).

On considère les éléments de S_p n'appartenant pas à S_p^0 , et les éléments de S_p^p n'appartenant pas à $S_p^0 \cap S_p^p$, c'est-à-dire les éléments de S_p ou de S_p^p tels que le polynôme P , dont ils sont les zéros, a effectivement un zéro sur le cercle unité complexe, soit θ_i . En écartant le cas où $\theta_i = \pm 1$ qui ne présente pas d'intérêt, on se trouve dans le cas suivant : P a un autre zéro au moins, $\overline{\theta_i} = \frac{1}{\theta_i}$, sur le cercle unité, donc P s'écrit :

$$P(x) = \Pi(x)\ P_1(x) \ ,$$

où Π est un polynôme réciproque dont tous les zéros complexes sont sur le cercle unité, P_1 est un polynôme n'ayant plus de zéro complexe sur le cercle unité.

Si θ était racine de P_1 , θ appartiendrait alors à S_p^0 ou à $S_p^0 \cap S_p^p$.

Si θ est racine de Π , Π est un polynôme réciproque dont tous les zéros complexes appartiennent au cercle unité ; du point de vue p-adique, Π a un zéro extérieur au cercle unité θ , un zéro intérieur $\frac{1}{\theta}$, tous les autres sont sur le cercle unité. (On remarque que, dans le cas où $\theta \in S_p^p$, et donc où il n'y a pas de zéro sur le cercle unité dans Ω_p , le polynôme est nécessairement du 2e degré.)

Donc tout élément de S_p appartient, soit à S_p^0 , soit à T_p , dont nous allons donner maintenant la définition :

T_p <u>est l'ensemble des éléments</u> θ <u>de</u> Q_p <u>vérifiant</u> $|\theta|_p > 1$, <u>zéro d'un polynôme</u> P , <u>réciproque, à coefficients entiers rationnels de degré pair</u> :

$$P(x) = p^t x^{2s} + a_1 x^{2s-1} + \dots + a_1 x + p^t \ ,$$

<u>où</u> $|a_1|_p = 1$, $t > 0$, <u>dont tous les zéros complexes sont sur le cercle unité</u>.

Nous allons pouvoir énoncer un théorème analogue à celui de Salem [7] :

Tout élément de S_p^0 est limite d'éléments de T_p .

Soit θ un élément de S_p^0 , racine d'un polynôme P :

$$P(x) = p^t x^s + a_1 x^{s-1} + \dots + a_{s-1} x + a_s \quad ,$$

où $|a_1|_p = 1$ et $|\theta_j| < 1$, $j = 1 , \dots , s$.

Soient $Q(x) = x^s$, $P(1/x)$; P et Q sont distincts ; en effet, P ayant tous ses zéros complexes, intérieurs au cercle unité, ne peut être réciproque. Formons :

$$R_m(x) = x^m P(x) + Q(x) \quad .$$

- θ_m vérifiant $|\theta_m|_p > 1$, zéro de R_m appartient à T_p .

R_m est réciproque.

R_m a un zéro θ_m extérieur à $|x|_p = 1$, un zéro intérieur $\frac{1}{\theta_m}$, tous ses autres zéros appartiennent au cercle unité. Dans C , on a sur le cercle $|x| = 1 + \varepsilon$,

$$\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| = \left|\frac{\Pi(x - \theta_i)}{\Pi(1 - \bar{\theta}_i x)}\right| > 1 \quad ,$$

donc, sur $|x| = 1 + \varepsilon$, $|x^m P(x)| > |Q(x)|$.

R_m a $m + s$ zéros dans $|x| \leqslant 1 + \varepsilon$. Ceci étant vrai $\forall \varepsilon$, et R_m étant réciproque, tous les zéros complexes de R_m appartiennent au cercle unité.

- $\lim\limits_{m \infty} \theta_m = \theta$.

Formons $P(\theta_m)$, on a

$$P(\theta_m) = \frac{Q(\theta_m)}{\theta_m^m} \quad .$$

Or $|Q(\theta_m)|_p \leqslant |\theta_m^s|_p = p^{ts}$,

$$P(\theta_m) = p^t(\theta_m - \theta)(\theta_m - \theta^{(2)})\dots(\theta_m - \theta^{(s)}) \quad ,$$

or $|\theta_m - \theta^{(i)}|_p = |\theta_m|_p = p^t$,

$$P(\theta_m) = |\theta_m - \theta|_p \times p^{t(s-2)} \quad ;$$

on a donc $|\theta_m - \theta|_p \leqslant p^{-t(m-2)}$, donc :

$$\lim_{m \infty} \theta_m = \theta \quad .$$

4.2. Etude de S_I dans le cas général. - Soit A le polynôme dont θ, élément de S_I, est zéro dans V_I. Si les zéros de A dans $\underset{\sim}{C}$ appartiennent à $|x| < 1$, alors $\theta \in S_I^0$. Nous allons chercher à caractériser les éléments de S_I n'appartenant pas à S_I^0.

On suppose donc que A a des racines sur le cercle unité dans C. Plus précisément, associons à θ la partition $(I_h)_{h=1,\ldots,m}$ de I relative à l'élément algébrique θ ([2], 1.14). Le polynôme minimal de θ :

$$P_{m_I}(\theta , X) = \prod_{h=1,\ldots,m} P_{m_{I_h}}(\theta , X) ,$$

les polynômes $P_{m_{I_h}}(\theta , X)$ sont unitaires, irréductibles et deux à deux distincts, et

$$P_{m_{I_h}}(\theta , X)q_h = A_h(x) ,$$

où A_h est un polynôme à coefficients entiers, irréductible, ayant pour racine θ_{I_h} dans V_{I_h}. A s'écrit :

$$A(x) = qx^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_0 = \Pi\, A_h(x) .$$

La décomposition $A(x) = \Pi\, A_h(x)$ peut présenter deux aspects :

- Il existe un élément de la partition I_{h_0} pour lequel les racines de $A_{h_0}(x)$ appartiennent à l'intérieur du disque unité de C : $\theta_{I_h} \in S_{I_h}^0$.

- Ou, $\forall\, h$, le polynôme A a au moins un zéro sur le cercle unité dans $\underset{\sim}{C}$ $(\neq \pm 1)$; c'est ce second cas que nous étudierons, c'est-à-dire en fait l'ensemble $S_I - S_I^0 - \Sigma_I^0$, Σ_I^0 (notation de Françoise BERTRANDIAS, éléments θ de S_I dont une composante $\theta_{I_{h_0}} \in S_{I_{h_0}}^0$).

4.3. Etude de la décomposition $A(x) = \Pi\, A_h(x)$.

- $o \notin I_h$. - A_h, ayant un zéro sur le cercle unité dans $\underset{\sim}{C}$, et étant irréductible, est donc réciproque, et tous ses zéros sont sur le cercle unité :

$$A_h(x) = q_h^{(0)}\, x^{2s} + q_h^{(1)}\, x^{2s-1} + \ldots + q_h^{(1)}\, x + q_h^{(0)} ,$$

où

$$q_h^{(0)} = \prod_{p\in I_h} p^{t_p} \qquad \text{et} \qquad |q_h^{(1)}|_p = 1 , \ \forall\, p \in I_h .$$

$o \in I_h$. - A_h a, par hypothèse, un zéro extérieur au cercle unité et un zéro sur le cercle unité ; il est donc réciproque et de la forme :

$$A_h(x) = q_h^{(0)} x^{2s} + q_h^{(1)} x^{2s-1} + \dots + q_h^{(1)} + q_h^{(0)} ,$$

où

$$q_h^{(0)} = \prod_{p \in I_h^-} p^{t_p} \quad \text{et} \quad |q_h^{(1)}|_p = 1 , \ \forall p \in I_h^- .$$

Donc, un élément θ de S_I, n'appartenant ni à S_I^0 ni à Σ_0, est racine d'un polynôme à coefficients entiers :

$$A(x) = \Pi A_h(x) = qx^{2s} + q^{(1)} x^{2s-1} + \dots + q^{(1)} x + q .$$

A est réciproque, car tous les A_h le sont :

$$q = \prod_{h=1,\dots,m} q_h^{(0)} = \Big(\prod_{p \in I^-} p^{t_p} \Big) ,$$

$$q^{(1)} = \sum_{h_j=1,\dots,m} (\Pi\, q_{h_i}^{(0)})\, q_{h_j}^{(1)} ,$$

$$|q_{h_j}^{(1)}|_p = 1 \qquad \text{si } p \in I_{h_j} ,$$

donc $|q^{(1)}|_p = 1$, $\forall p \in I$.

La répartition des zéros de A est donc la suivante :

- $\forall p \in I$, A a un zéro extérieur au cercle unité, un zéro intérieur, tous les autres appartiennent au cercle unité.
- $\forall p \notin I$, A a tous ses zéros sur le cercle unité.

Cela nous permet donc de définir un nouvel ensemble T_I .

DÉFINITION. - <u>T_I est l'ensemble des éléments θ algébriques de V_I vérifiant $|\theta|_p > 1$, $\forall p \in I^-$, et pour lesquels il existe un polynôme A à coefficients entiers ayant les propriétés suivantes :</u>

$$A(x) = qx^{2s} + q_1 x^{2s-1} + \dots + q_1 x + q ,$$

<u>où</u>

$$q = \prod_{p \in I^-} p^{t_p} \quad \underline{\text{et}} \quad |q_1|_p = 1 , \ \forall p \in I^- ;$$

- si o n'appartient pas à I , les zéros de A , dans C , sont tous sur le cercle unité ;

- si o appartient à I , A a un zéro extérieur au cercle unité, un zéro intérieur, tous les autres zéros sont sur le cercle unité.

Dans ces conditions, si $(I_h)_{h=1,\dots,m}$ est la partition de I relative à θ , la décomposition $A(x) = \Pi A_h(x)$ ne comprend que des polynômes réciproques dont tous les zéros complexes sont sur le cercle unité (à l'exception d'un polynôme A_h , si $o \in I$, qui a un zéro intérieur au cercle unité, un zéro extérieur, tous ses autres zéros appartenant au cercle unité).

D'autre part, l'égalité $A(x) = \Pi A_h(x)$ s'écrit :

$$(qx^{2s} + q_1 x^{2s-1} + \dots + q_1 x + q) = \Pi (q_h^{(0)} x^{2s_h} + q_h^{(1)} x^{2s_h - 1} + \dots + q_h^{(1)} x + q_h^{(0)}) \quad ,$$

où

$$q = \prod_{h=1,\dots,m} q_h^{(0)} \qquad \text{et} \qquad q^{(1)} = \sum_{h_j=1,\dots,m} (\Pi\, q_{h_i}^{(0)})\, q_{h_j}^{(1)}$$

entraîne, si $p \in I_{h_j}$, $|q^{(1)}|_p = 1$; donc un terme de la somme a une valeur absolue p-adique $= 1$, ce ne peut être que $(\Pi\, q_{h_i}^{(0)})\, q_{h_j}^{(1)}$. Donc :

$$|q_{h_j}^{(1)}|_p = 1 \quad ;$$

A_{h_j} a dans Ω_p , $\forall\, p \in I_{h_j}$, un zéro extérieur au cercle unité, un zéro intérieur, tous ses autres zéros appartiennent au cercle unité ; $\forall\, p \notin I_{h_j}$, les zéros de A sont sur le cercle unité.

THÉORÈME. - Tout élément de S_I^0 est limite d'éléments de T_I .

Soit θ un élément de V_I appartenant à S_I^0 , zéro d'un polynôme $P \in Z[z]$:

$$P(z) = qz^s + q_1 z^{s-1} + \dots + q_s \qquad \text{où } q = \prod_{p \in I} p^{t_p} \quad \text{et} \quad |q_1|_p = 1 \ , \quad \forall\, p \in I \ ,$$

dont les racines sont dans $|x|_p \leqslant 1$, $\forall\, p \in P^-$ (sauf θ_p si $p \in I$) , dans $|x| < 1$ pour o ; formons $R_m(z) = z^m P(z) + Q(z)$, c'est un polynôme réciproque.

- R_m a un zéro θ_m appartenant à T_I .

Dans Ω_p , $\forall\, p \in I^-$, d'après l'étude du polygone de Newton, R_m a un zéro θ_m extérieur au cercle unité, un zéro intérieur, tous ses autres zéros sont sur le cercle unité ; dans Ω_p , $\forall\, p \notin I^-$, $p \neq 0$, si $o \notin I$, tous les zéros de R_m appartiennent au cercle unité.

Dans C , si $o \in I$: sur $|z| = 1 + \varepsilon$,

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{\Pi(z - \theta_j)}{\Pi(1 - \theta_j\, z)}\right| > 1 \quad ,$$

d'après les propriétés de la transformation conforme ; dans $|z| \leqslant 1 + \varepsilon$, $R_m(z)$ a donc $m + s$ zéros, c'est-à-dire tous ses zéros. Comme ceci est vrai $\forall\, \varepsilon$ et que R_m est réciproque, R_m a donc $m + s$ racines sur le cercle unité.

Si $o \notin I$: en utilisant la démonstration de R. SALEM, on trouve que R_m a un zéro extérieur au cercle unité, un zéro intérieur, tous les autres appartiennent au cercle unité, donc θ_m est un élément de T_I .

- $\lim\limits_{m\, \infty} \theta_m = \theta$, élément de S_I^0 .

$$\lim \theta_m^{(p)} = \theta^{(p)} \qquad \forall\, p \in I^- \ .$$

La démonstration reprend celle effectuée précédemment dans le cas de S_p .

- $\lim \theta_m^0 = \theta^0$ si $o \in I$.

La démonstration reprend celle de R. SALEM dans [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions, New York and Princeton University, 1950-1951 (multigraphié).

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965 (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[3] CHABAUTY (Claude). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.

[4] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).

[5] PISOT (Charles). - Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels, Comment. Math. Helvet., t. 19, 1946-1947, p. 153-160.

[6] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.

[7] SALEM (Raphaël). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.

[8] THUE (A.). - Über eine Eigenschaft die keine transcendente Grösse haben kann, Vid. Selsk. Skrift., Kristiana, I : Math. naturw. Kl., 1912, n° 20, 15 p.