JEAN FRESNEL

Les fonctions p-adiques L de Dirichlet

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 2 (1964-1965), exp. n° 17, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_2_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
6e année, 1964/65, n° 17

24 mai 1965

LES FONCTIONS p-ADIQUES L DE DIRICHLET

par Jean FRESNEL

Introduction. - La fonction $L(s , \chi)$ de Dirichlet correspondant au caractère primitif χ admet pour $s = 1 - m$ (m entier naturel) la valeur algébrique

$$L(1 - m , \chi) = - \frac{B_\chi^m}{m}$$

où B_χ^m est le nombre de Bernoulli relatif au caractère χ .

Partant de cette remarque Tomio KUBOTA et Henrich Wolfang LEOPOLDT [4] ont cherché à construire une fonction continue sur l'anneau de valuation p-adique coïncidant sur les entiers négatifs avec la fonction complexe $L(s , \chi)$.

Ils ont montré en fait, qu'il existe une seule fonction continue coïncidant (à un facteur multiplicatif près) avec la fonction complexe sur les entiers négatifs d'une classe modulo $p - 1$.

Des classes différentes conduisent à des fonctions distinctes qui cependant ont rapport entre elles de façon simple (grâce à l'introduction d'un caractère θ).

La fonction p-adique ainsi construite est holomorphe pour $\chi \neq \chi_0$ (caractère principal de conducteur 1) et pour $\chi = \chi_0$ elle admet un pôle simple pour $s = 1$.

1. Avant-propos sur les séries.

Posons $q = 4$ si $p = 2$, et $q = p$ autrement ; soient $\mathbb{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, $x \longrightarrow |x|$ la valeur absolue p-adique définie par $|p| = p^{-1}$; soit $\mathfrak{U}$ le groupe des $u \in \mathbb{Q}_p$ tels que $|u - 1| \leqslant |q|$.

Soit $\mathfrak{F}$ l'algèbre **sur** $\mathbb{Q}_p$ des séries convergentes sur $\mathfrak{U}$ de la forme

$$A(u) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (u - 1)^n \qquad (a_n \in \mathbb{Q}_p) .$$

Alors $a_n q^n \longrightarrow 0$, et nous posons

$$\|A\| = \sup_{n \geqslant 0} |a_n q^n| . \tag{0}$$

L'application $A \longrightarrow \|A\|$ est une norme ultramétrique pour l'algèbre $\mathfrak{F}$, satisfaisant les conditions :

(1) $\|A\| \geqslant 0$ et $\|A\| = 0 \iff A = 0$;

(2) $\|cA\| = |c| . \|A\|$ pour $c \in \mathbb{Q}_p$;

(3) $\|A_1 + A_2\| \leqslant \sup(\|A_1\| , \|A_2\|)$;

(4) $\|A_1 . A_2\| \leqslant \|A_1\| . \|A_2\|$.

Soit $\tilde{\mathbb{Q}}_p$ une extension de $\mathbb{Q}_p$; supposons que le corps des restes de $\tilde{\mathbb{Q}}_p$ soit infini. Soit $\tilde{\mathfrak{U}}$ le groupe des $u \in \tilde{\mathbb{Q}}_p$, tels que $|u - 1| \leqslant |q|$. Alors

(5) $$\|A\| = \sup_{u \in \mathfrak{U}} |A(u)| \qquad \text{(1re formule de Cauchy)}.$$

Posons

(6) $$\frac{1}{k!} A^{(k)}(u) = \sum_{n \geqslant 0} \binom{n+k}{k} a_{n+k} (u - 1)^n .$$

Il est immédiat que

(7) $$\left|\frac{q^k}{k!}\right| . \|A^{(k)}\| \leqslant \|A\| .$$

On peut montrer facilement que $\mathfrak{Z}$ est complet, c'est-à-dire que $\mathfrak{Z}$ <u>est un espace de Banach</u> p-<u>adique</u>.

2. Construction du " χ-moyen".

Soit $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers.

Si $p \neq 2$, définissons le <u>caractère</u> θ par

$$\theta(x) = \lim_{n \to \infty} x^{p^n} .$$

θ est un caractère modulo p , d'ordre $p - 1$.

Si $p = 2$,

$$\theta(x) = 1 \qquad \text{si } x \equiv 1 \mod 4 ,$$
$$\theta(x) = -1 \qquad \text{si } x \equiv -1 \mod 4 ,$$
$$\theta(x) = 0 \qquad \text{si } x \text{ divise } 2 .$$

θ est un caractère modulo 4 et d'ordre 2 .

Si $(x , p) = 1$, posons $\langle x \rangle = \frac{x}{\theta(x)} \in \mathfrak{U}$.

Soit χ un caractère modulo $f(\chi)$ considéré comme application de $\mathbb{Z}$ dans le groupe des racines de l'unité.

Dans la suite, la notation $\sum^*$ signifiera sommation pour tous les nombres x premiers avec p du domaine de sommation indiqué chaque fois.

Pour toute série $A \in \mathfrak{J}$, nous posons,

$$(0) \qquad \mathfrak{M}_\chi^n(A) = \frac{1}{\bar{f}q^n} \sum_{x=1}^{\bar{f}q^n}{}^{*} \chi(x)\ A(\langle x\rangle) ,$$

où χ est un caractère modulo f , et $\bar{f} = \mathrm{ppcm}(f , q)$.

$$|\mathfrak{M}_\chi^n(A)| \leqslant C_\chi^n \|A\| \qquad \text{où} \quad C_\chi^n = \left|\frac{1}{\bar{f}q^n}\right|$$

$\mathfrak{M}_\chi^n$ est donc une application linéaire bornée de $\mathfrak{J}$ dans $\hat{\Omega}_p$ (complété de la clôture algébrique Ω_p de $\mathbb{Q}_p$) et appartient à l'espace de Banach p-adique $L_{\mathbb{Q}_p}(\mathfrak{J} , \hat{\Omega}_p)$ (espace vectoriel normé des applications $\mathbb{Q}_p$ linéaires bornées de $\mathfrak{J}$ dans $\hat{\Omega}_p$).

Nous nous proposons de montrer que la suite $\mathfrak{M}_\chi^n$ est convergente dans $L_{\mathbb{Q}_p}(\mathfrak{J}, \hat{\Omega}_p)$. Pour cela, nous allons démontrer deux lemmes.

LEMME 1. - <u>Les applications</u> $\mathfrak{M}_\chi^n$ <u>sont équibornées, c'est-à-dire qu'il existe une constante</u> C_χ <u>telle que</u>

$$\|\mathfrak{M}_\chi^n\| \leqslant C_\chi \qquad \forall\ n \geqslant 0 .$$

<u>Preuve</u>. - Tout d'abord, pour tout $u_0 \in \mathfrak{U}$ et $|u - u_0| < |q|$,

$$(1) \qquad A(u) = \sum_{m\geqslant 0} \frac{A^{(m)}(u_0)}{m!} (u - u_0)^m$$

(cf. par exemple, [1], lemme 1.4).

Posons $u_0 = \langle x\rangle$ et $u = \langle x + \bar{f}q^n z\rangle$, $z \in \mathbb{Z}$, alors $\theta(x) = \theta(x + \bar{f}q^n z)$ et $u - u_0 = \frac{\bar{f}q^n}{\theta(x)}$.

Posons $S_m = \sum_{z=0}^{q-1} z^m$, on a en appliquant la relation (1),

$$(2) \qquad \sum_{z=0}^{q-1} A(\langle x + \bar{f}q^n z\rangle) - qA(\langle x\rangle) = \sum_{m\geqslant 1} \frac{A^{(m)}(\langle x\rangle)}{m!} \frac{(\bar{f}q^n)^m}{\theta^m(x)} S_m ,$$

soit

$$\left|\sum_{z=0}^{q-1} A(\langle x + \bar{f}q^n z\rangle) - qA(\langle x\rangle)\right| \leqslant \|A\| \sup_{m\geqslant 1} (|S_m| . |\bar{f}q^{n-1}|^m) .$$

Comme $|S_m| . |\bar{f}q^{n-1}|^{m-1} \leqslant |p|$ si $n \geqslant 1$,

$$(3) \qquad \left|\sum_{z=0}^{q-1} A(\langle x + \bar{f}q^n z\rangle) - qA(\langle x\rangle)\right| \leqslant \|A\| . |\bar{f}pq^{n-1}| \qquad \text{si} \quad n \geqslant 1 .$$

Considérons maintenant la différence $\mathfrak{M}_\chi^{n+1}(A) - \mathfrak{M}_\chi^n(A)$, nous obtenons :

(4) $$\overline{f}q^{n+1}(\mathfrak{M}_\chi^{n+1}(A) - \mathfrak{M}_\chi^n(A)) = \sum_{x=1}^{\overline{f}q^n}{}^{*} \chi(x) \left\{ \sum_{z=0}^{q-1} A(\langle x + \overline{f}q^n z\rangle) - qA(\langle x\rangle)\right\} ;$$

la relation (3) montre que

$$|\mathfrak{M}_\chi^{n+1}(A) - \mathfrak{M}_\chi^n(A)| \leqslant C\|A\| \qquad \text{avec } C = |pq^{-2}| .$$

LEMME 2. - <u>La suite</u> $\mathfrak{M}_\chi^n$ <u>est de Cauchy</u>.

<u>Preuve</u>. - Transformons le membre de droite de (4), au moyen de la série (2), alors on a l'identité

$$\mathfrak{M}_\chi^{n+1}(A) - \mathfrak{M}_\chi^n(A) = \sum_{m\geqslant 1} \frac{S_m}{q} \frac{(\overline{f}q^n)^m}{m!} \mathfrak{M}^n_{\chi\theta^{-m}}(A^{(m)}) .$$

D'après le lemme 1 et la relation (7) du § 1,

$$|\mathfrak{M}^m_{\chi\theta^{-m}}(\frac{q^m A^{(m)}}{m!})| \leqslant C_{\chi\theta^{-m}} \|A\| ,$$

et par conséquent

$$|\mathfrak{M}_\chi^{n+1}(A) - \mathfrak{M}_\chi^n(A)| \leqslant C_\chi^* \|A\| \, |\overline{f}q^{n-1}|$$

avec $C_\chi^* = \sup_{m\geqslant 1} \left\{ |\frac{S_m}{q}| . |\overline{f}q^{n-1}|^{m-1} C_{\chi\theta^{-m}} \right\}$. C_χ^* existe bien puisque les $C_{\chi\theta^{-m}}$ sont en nombre fini.

Par suite $\|\mathfrak{M}_\chi^{n+1} - \mathfrak{M}_\chi^n\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Il en résulte alors immédiatement le théorème :

THÉORÈME 1. - <u>La suite</u> $\mathfrak{M}_\chi^n$ <u>converge dans</u> $L_{\mathbb{Q}_p}(\mathfrak{F} , \hat{\Omega}_p)$ <u>vers</u> $\mathfrak{M}_\chi$.

L'application linéaire bornée $\mathfrak{M}_\chi$ s'appelle le " χ-moyen".

3. Introduction des fonctions p-adiques L de Dirichlet.

Soit $\mathbb{Z}_p$ l'anneau de valuation de $\mathbb{Q}_p$. Pour $s \in \mathbb{Z}_p$ et $u \in \mathfrak{U}$, posons

$$P_s(u) = u^s = \sum_{n\geqslant 0} \binom{s}{n} (u - 1)^n .$$

La série P_s est un élément de $\mathfrak{F}$, et par conséquent $\mathfrak{M}_\chi(P_s)$ existe pour tout $s \in \mathbb{Z}_p$.

DÉFINITION. - <u>La fonction</u> p-<u>adique</u> L <u>de Dirichlet, relative au caractère</u> χ (primitif), <u>est une application de</u> $\mathbb{Z}_p$ <u>dans</u> Ω_p <u>définie par</u>

(0) $$L(s , \chi) = \frac{1}{s - 1} \mathfrak{M}_\chi(P_s) .$$

La fonction logarithme, notée Log, définie par

$$\mathrm{Log}(u) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (u-1)^n \qquad \text{pour} \quad u \in \mathfrak{U} ,$$

est un élément de $\mathfrak{F}$.

D'autre part, notons par E la fonction exponentielle, nous avons

$$E(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} \qquad \text{pour} \quad |t| \leqslant |p|^{1/(p-1)} .$$

Notons par E_N la somme partielle

$$E_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} .$$

Nous avons $P_s(u) = E(s\ \mathrm{Log}(u))$ pour $u \in \mathfrak{U}$. La série $E_N(s\ \mathrm{Log})$ appartient à $\mathfrak{F}$ et converge vers $E(s\ \mathrm{Log})$ pour la norme de $\mathfrak{F}$, et puisque $\mathfrak{M}_\chi$ est une application linéaire bornée,

$$\mathfrak{M}_\chi(P_s) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_\chi(E_N(s\ \mathrm{Log})) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{s^n}{n!} \mathfrak{M}_\chi(\mathrm{Log}^n) .$$

Par conséquent

(1) $$\mathfrak{M}_\chi(P_s) = \sum_{n\geq 0} \frac{s^n}{n!} \mathfrak{M}_\chi(\mathrm{Log}^n) .$$

La fonction $\mathfrak{M}_\chi(P_s)$ est <u>analytique stricte</u> dans le disque de rayon R_χ qui satisfait les inégalités suivantes :

(2) $$R_\chi \geqslant \begin{cases} 2 & \text{si} \quad p = 2 \\ p^{1-\frac{1}{p-1}} & \text{si} \quad p \neq 2 \end{cases}$$

$$L(s\ ,\ \chi) = \frac{1}{s-1} \sum_{m\geq 0} \frac{\mathfrak{M}_\chi(\mathrm{Log}^n)}{n!} q(1-s)^n$$

$$\mathfrak{M}_\chi^n(\mathrm{Log}^0) = \frac{1}{q^n \bar{f}} \sum_{x=1}^{q^n \bar{f}}{}^{*} \chi(x) = \frac{1}{q^n \bar{f}} \sum_{x=1}^{q^n \bar{f}} \chi\theta^0(x) .$$

Par suite

(3) $$\mathfrak{M}_\chi(\mathrm{Log}^0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \chi\theta^0 \neq \chi_0 \\ (p-1)/p & \text{si} \quad \chi\theta^0 = \chi_0 \end{cases}$$

de conducteur p puisque χ est primitif.

Ainsi la fonction $L(s, \chi)$ est analytique dans le disque de rayon R_χ si $\chi\theta^0 \neq \chi_0$ (c'est-à-dire si $\chi \neq \chi_0$ de conducteur 1), sinon elle est méromorphe et admet pour pôle simple $s = 1$ de résidu $\frac{p-1}{p}$.

Calculons maintenant $L(1-m, \chi)$.

$$L(1-m, \chi) = -\frac{\mathfrak{M}_\chi(P_m)}{m} ,$$

$$\mathfrak{M}_\chi^n(P_m) = \frac{1}{\overline{f}q^n} \sum_{x=1}^{\overline{f}q^n}{}^* \chi(x) \left(\frac{x}{\theta(x)}\right)^m \equiv B^m_{\chi\theta^{-m}} \mod p^n .$$

Cette dernière congruence [2] s'obtient en utilisant la relation

$$\frac{(B_{\chi\theta^{-m}} + \lambda\overline{f})^{m+1} - B^{m+1}_{\chi\theta^{-m}}}{m+1} \equiv \sum_{x=1}^{\lambda\overline{f}} \chi\theta^{-m}(x) .$$

Ainsi $\mathfrak{M}_\chi(P_m) = B^m_{\chi\theta^{-m}}$, et,

(4) $$L(1-m, \chi) = -\frac{B^m_{\chi\theta^{-m}}}{m} .$$

Si $m \equiv 0 \mod p-1$,

(5) $$L(1-m, \chi) = -\frac{B^m_{\chi\theta^0}}{m} = -\frac{B^m_\chi}{m}(1-\chi(p)\, p^{m-1}) \quad [2] .$$

Puisque l'ensemble des entiers congrus à $0 \mod p-1$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$, que $L(s, \chi)$ est continue, c'est la seule fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$ qui, pour $1-m$ ($m \equiv 0 \mod p-1$) , prenne la valeur $-\frac{B^m_\chi}{m}(1-\chi(p)\, p^{m-1})$.

Nous pouvons rassembler ces résultats dans le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Pour tout caractère $\chi \neq \chi_0$ (de conducteur 1), il existe exactement sur $\mathbb{Z}_p$, une fonction continue qui, pour $s = 1-m$ avec $m \equiv 0 \mod p-1$, prend la valeur

$$L(1-m, \chi) = -\frac{B^m_\chi}{m}(1-\chi(p)\, p^{m-1}) .$$

Elle est analytique stricte (pour un $R_\chi > 1$), pour $|s-1| < R_\chi$, et se met, pour $s \in \mathbb{Z}_p$, sous la forme

$$L(s, \chi) = \frac{1}{s-1} \mathfrak{M}_\chi(P_{1-s}) .$$

Le théorème reste vrai pour $\chi = \chi_0$ (de conducteur 1), à l'exception près que la fonction est méromorphe et admet un pôle simple pour $s = 1$ de résidu $\frac{p-1}{p}$.

De (4), on peut déduire que les fonctions relatives à caractère pair sont non nulles, tandis que les fonctions correspondantes à des caractères impairs sont identiquement nulles.

Soient $\underset{\sim}{K}$ un corps réel abélien et $\mathfrak{X}$ le groupe de ses caractères. Nous attribuons formellement à $\underset{\sim}{K}$ une fonction ζ p-adique en posant

$$\zeta_{\underset{\sim}{K}}(s) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} L(s , \chi) .$$

Ces fonctions $\zeta_{\underset{\sim}{K}}(s)$ sont toutes méromorphes dans un cercle $|s - 1| < R_{\underset{\sim}{K}}$ (où $R_{\underset{\sim}{K}} > 1$) et y ont au plus un pôle d'ordre 1 , pour $s = 1$.

En particulier,

$$\zeta_{\underset{\sim}{Q}}(s) = L(s , \chi_0) \qquad \chi_0 \text{ de conducteur } 1$$

est conçue comme le pendant p-adique de la fonction ζ de Riemann.

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude du dénominateur de $L(1 , \chi)$ et à l'approximation de $L(1 , \chi)$ par $L(1 - s , \chi)$.

4. Le dénominateur de $L(1 , \chi)$.

THÉORÈME 3. - *On a* $|L(1 , \chi)| \leqslant 1$, *pour tout caractère* $\chi \neq \chi_0$ *si* $p = 2$, *pour tout caractère* $\chi \neq \chi_0$ *si* $p \neq 2$, *tels que les conducteurs et l'ordre* m *ne soient pas en même temps des puissances de* p .

Pour les caractères d'exception χ , on a

$$|L(1 , \chi)| = |1 - \chi(1 + p)|^{-1} .$$

Nous ne reproduisons pas la preuve de ce théorème afin de ne pas alourdir l'exposé. La démonstration se trouve dans [4].

5. Approximation de $L(1 , \chi)$ par les nombres de Bernoulli.

Nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 4. - *Si* $s \in \underset{\sim}{Z}_p$, *si* $p = 2$ *ou* $p = 3$,

$$|L(1 , \chi) - L(1 - s , \chi)| \leqslant |s| ;$$

si $p \neq 2$ *et* 3 *et si l'ordre de* χ *et le conducteur de* χ *ne sont pas en même* temps des puissances de p,

$$|L(1, \chi) - L(1-s, \chi)| \leqslant |ps|$$

sinon

$$|L(1, \chi) - L(1-s, \chi)| \leqslant |p^{1-\frac{2}{p-1}} s| .$$

Preuve. - La preuve de ce théorème est immédiate en utilisant les congruences du théorème 1 [2] sur les nombres de Bernoulli. Les approximations obtenues par cette méthode sont plus fines que celles qui se trouvent dans [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (Bernard). - On the zeta function of a hypersurface. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 5-68).

[2] FRESNEL (Jean). - Congruences entre les nombres de Bernoulli, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 6, 1964/65, n° 14, 12 p.

[3] GÁL (I. S.). - Lectures on algebraic and analytic number theory. - Minneapolis, Jones Letter Service, 1961.
[Cf. en particulier : chapitre 30, p. 229-239.]

[4] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, I : Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen, J. für reine und angew. Math., t. 214/215, 1964, p. 328-339.