Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Françoise Bertrandias

Ensembles d'unicité dans des produits de corps p-adiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, nº 1 (1964-1965), exp. nº 9, p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_1_A7_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ENSEMBLES D'UNICITÉ DANS DES PRODUITS DE CORPS p-ADIQUES

par Mme Françoise BERTRANDIAS

Dans cet exposé, on se propose de généraliser, pour l'ensemble S_I^0 de $V_I(Q)$, la propriété suivante de l'ensemble S :

Soit E_ξ l'ensemble parfait symétrique à rapport constant ξ du segment $(0, 1)$ (avec $0 < \xi < \frac{1}{2}$, $\xi \in R$) ; l'ensemble E_ξ est un ensemble d'unicité, si et seulement si $\theta = \frac{1}{\xi}$ appartient à l'ensemble S.

La démonstration sera parallèle à la démonstration classique ([5], chapitres V et VI).

Le plan adopté est le suivant :

1. Rappel des définitions des ensembles U et M d'un groupe abélien compact. Construction d'une classe d'ensembles U, généralisant les ensembles de Pjateckij-Šapiro ;

2. Définition de l'ensemble E_ξ de $V_I(Q)$, et de l'ensemble $E_\xi^\sim$ associé du groupe abélien compact F_I^+. Définition et étude d'une mesure μ portée par E_ξ et d'une mesure associée $\mu^\sim$ portée par $E_\xi^\sim$;

3. Recherche des ensembles $E_\xi^\sim$ qui sont des ensembles M ;

4. Recherche des ensembles $E_\xi^\sim$ qui sont des ensembles U ;

5. Définition d'un ensemble E_ξ dans $V_K(Q)$, où K est un sous-ensemble infini de P. Cas des ensembles U.

1. Ensembles U et M dans un groupe abélien compact.

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe abélien compact (non discret) et Γ son groupe dual, qui est donc un groupe abélien discret (non compact). On note x un élément de G, γ un élément de Γ, $x \to (x, \gamma)$ un caractère continu de G. T désigne le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

1.1. Définitions.

Un ensemble E de G est dit ensemble de multiplicité (ensemble M) s'il existe une mesure μ (non nulle) de $M(G)$, portée par E, dont la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ vérifie

$$\hat{\mu}(\gamma) \to 0 \quad \text{quand} \quad \gamma \to \infty \quad \text{dans} \quad \Gamma$$

(ensemble M au sens strict), ou s'il existe une fonction φ (non nulle) de $L^{\infty}(\Gamma)$, dont le spectre est porté par E , telle que

$$\varphi(\gamma) \to 0 \quad \text{quand} \quad \gamma \to \infty \quad \text{dans} \quad \Gamma$$

(ensemble M au sens large).

Un ensemble qui n'est pas ensemble de multiplicité est dit <u>ensemble d'unicité</u> (ensemble U).

<u>Remarques</u>. - Un ensemble M au sens strict est bien un ensemble M au sens large : en effet, μ étant la mesure portée par l'ensemble telle que $\hat{\mu}(\gamma) \to 0$ quand $\gamma \to \infty$, on peut prendre $\varphi = \hat{\mu}$, car $|\hat{\mu}(\gamma)|$ est borné dans Γ , et le spectre de $\hat{\mu}$ est identique au support de μ ([6], 7.8.5).

Dans le cas $G = R/Z$, on retrouve des propriétés caractéristiques des ensembles U et M classiques, mais non leur définition initiale, qui résulte d'une étude de l'unicité du développement trigonométrique.

1.2. <u>Exemples</u>.

<u>Tout ensemble borélien</u> E <u>de</u> G , <u>de mesure de Haar positive, est un ensemble de multiplicité au sens strict</u>. En effet, soit χ_E la fonction caractéristique de E dans G : $\chi_E \in L^1(G)$, et donc $\hat{\chi}_E \in C_0(\Gamma)$ ([6], 1.2.4 (a)). Soit μ la mesure de M(G) engendrée par χ_E (c'est-à-dire définie par

$$\mu(A) = \int_A \chi_E(x)\ dx ,$$

pour tout ensemble borélien A de G). μ est non nulle, portée par E , et telle que

$$\lim_{\gamma\to\infty} \hat{\mu}(\gamma) = 0 .$$

<u>Tout ensemble</u> E <u>de</u> G <u>formé d'un nombre fini d'éléments</u> $(x_1 , \ldots , x_m)$ <u>est ensemble d'unicité</u>. En effet, toute fonction $\varphi \in L^{\infty}(\Gamma)$, dont le spectre est porté par E , est de la forme ([6], 7.8.3 (e)) :

$$\varphi(\gamma) = \sum_{i=1}^{m} c_i (x_i , \gamma) \qquad (c_i \in C) .$$

D'autre part il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un élément $\gamma \neq 0$ de Γ tel que

$$\sup_{i=1,2,\ldots,m} |(x_i , \gamma) - 1| < \varepsilon \qquad ([4], (26.4)) .$$

Il en résulte l'existence d'une suite $\{\gamma_k\}$ $(k \in N')$ de Γ , tendant vers l'infini, telle que

$$\lim_{k\to+\infty} (x_i , \gamma_k) = 1 \qquad (1 \leqslant i \leqslant m) .$$

Soit $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $\varphi(\gamma_0) \neq 0$; on a

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi(\gamma_0 + \gamma_k) = \varphi(\gamma_0) .$$

Donc $\varphi(\gamma)$ ne tend pas vers zéro quand $\gamma \to \infty$: E est un ensemble U .

1.3. – Pour montrer qu'un ensemble E est ensemble M , il suffit de trouver <u>une</u> fonction φ de $L^{\infty}(\Gamma)$, de spectre porté par E , avec

$$\lim_{\gamma\to\infty} \varphi(\gamma) = 0 .$$

Pour montrer qu'un ensemble E est ensemble U , il faut montrer qu'aucune fonction φ non nulle ne possède les propriétés précédentes ; on utilisera par la suite le critère suivant :

PROPOSITION 1. – <u>Pour qu'un ensemble</u> E <u>soit ensemble d'unicité, il suffit qu'on puisse lui associer une suite infinie</u> $\{\lambda_k\}$ $(k \in N')$ <u>de fonctions définies sur</u> G <u>ayant les propriétés suivantes</u> :

1° <u>le support de</u> λ_k <u>est disjoint de</u> E ;

2° λ_k <u>appartient à</u> $A(G)$ (c'est-à-dire,

$$\lambda_k(x) = \int_\Gamma \hat{\lambda}_k(\gamma)(x , \gamma)\, d\gamma ,$$

où $\hat{\lambda}_k$ appartient à $L^1(\Gamma)$) <u>et vérifie</u> :

$$\|\hat{\lambda}_k\|_1 = \int_\Gamma |\hat{\lambda}_k(\gamma)|\, d\gamma < B \ \underline{\text{indépendant de}}\ k ;$$

3° $\lim\limits_{k\to+\infty} \hat{\lambda}_k(\gamma) = 0$ si $\gamma \neq 0$;

$\lim\limits_{k\to+\infty} \hat{\lambda}_k(0) = \ell \neq 0$.

<u>Démonstration</u>. – Soit $\varphi \in L^{\infty}(\Gamma)$, non nulle, de spectre porté par E , et telle que $\lim\limits_{\gamma\to\infty} \varphi(\gamma) = 0$. Le support de λ_k étant disjoint de E , on a ([6], 7.8.3 (b))

$$\hat{\lambda}_k \star \varphi = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\hat{\lambda}_k \star \varphi(\delta) = \int_\Gamma \hat{\lambda}_k(\delta - \gamma)\, \varphi(\gamma)\, d\gamma = 0 \qquad \text{pour tout } \delta \in \Gamma .$$

Ceci peut s'écrire, U désignant un compact de Γ ne contenant pas δ :

$$\hat{\lambda}_k(0)\ \varphi(\delta) + \sum_{\gamma \notin U} \hat{\lambda}_k(\delta - \gamma)\ \varphi(\gamma) + \sum_{\gamma \in U} \hat{\lambda}_k(\delta - \gamma)\ \varphi(\gamma) = 0 .$$

Comme $\lim\limits_{\gamma \to \infty} \varphi(\gamma) = 0$ et $\|\hat{\lambda}_k\|_1 < B$, on peut trouver un compact U de Γ tel que

$$\Big| \sum_{\gamma \notin U} \hat{\lambda}_k(\delta - \gamma)\ \varphi(\gamma) \Big| \leqslant B \sup_{\gamma \notin U} |\varphi(\gamma)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \hat{\lambda}_k(\delta - \gamma) = 0$ si $\delta \neq \gamma$, il existe un entier K tel que (U étant fixé) pour tout $k \geqslant K$, on ait :

$$\Big| \sum_{\gamma \in U} \hat{\lambda}_k(\delta - \gamma)\ \varphi(\gamma) \Big| \leqslant \sup_{\gamma \in U} |\lambda_k(\delta - \gamma)| \sum_{\gamma \in U} |\varphi(\gamma)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Par suite, pour $k \geqslant K$:

$$|\hat{\lambda}_k(0)\ \varphi(\delta)| < \varepsilon .$$

D'où, comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \hat{\lambda}_k(0) = \ell \neq 0$, $\varphi(\delta) = 0$ pour tout $\delta \in \Gamma$. Ceci est contraire à l'hypothèse : φ non nulle. La proposition 1 est donc démontrée.

1.4. Ensembles de Pjateckij-Šapiro.

On se propose de définir dans G des ensembles généralisant les ensembles de Pjateckij-Šapiro de R .

DÉFINITION 1. – Soit une suite d'éléments de Γ^s (s entier $\geqslant 1$) :

$$\{((\gamma_k^{(i)})_{i=1,\dots,s})\} \qquad (k \in N') .$$

On dira qu'une telle suite est normale si, quel que soit l'élément $((n_i)_{i=1,2,\dots,s})$ de Z^s , la suite

$$\{\sum_{i=1}^{s} n_i\ \gamma_k^{(i)}\} \qquad (k \in N')$$

tend vers l'infini dans Γ .

DÉFINITION 2. – Un ensemble E non vide de G est dit ensemble de Pjateckij-Šapiro de dimension s (ou ensemble de type $H^{(s)}$), s'il existe :

1° un ouvert Δ non vide du tore T^s ,

2° une suite normale $\{((\gamma_k^{(i)})_{i=1,\dots,s})\}$ $(k \in N')$ de Γ^s ,

tels que, quel que soit $k \in N'$, l'ensemble des éléments de T^s :

$$((x\ ,\ \gamma_k^{(i)})_{i=1,\ldots,s}) \qquad \text{où } x \text{ élément de } E\ ,$$

soit disjoint de Δ .

Remarques. - On vérifie facilement que, dans le cas $G = R/Z$, on retrouve les ensembles de Pjateckij-Šapiro classiques. Les ensembles de type $H^{(1)}$ (noté H) généralisent les ensembles de Rajchman.

Tout sous-ensemble non vide d'un ensemble de type $H^{(s)}$ est un ensemble de type $H^{(s)}$.

Si le groupe G est d'ordre borné (et donc également Γ d'ordre borné), il n'existe pas de suite normale dans Γ^s : quels que soient les $\gamma_k^{(i)}$ $(i = 1\ ,\ ..\ ,\ s)$

$$\sum_{i=1}^{s} q\ \gamma_k^{(i)} = 0 \quad (\ q \ \text{ ordre de } \Gamma\ )\ ;$$

on ne peut donc pas définir d'ensemble de type $H^{(s)}$.

On sait qu'il existe des ensembles de type $H^{(s)}$ dans $G = R/Z$ $(\sim F_0^+)$. On verra dans la suite (paragraphe 4) qu'il existe des ensembles de type $H^{(s)}$ dans $G = F_I^+$.

1.5. - On sait que, sur la droite réelle, tout ensemble de type $H^{(s)}$ est un ensemble U . Ce résultat se généralise :

THÉORÈME 1. - Dans G , groupe abélien compact, tout ensemble de type $H^{(s)}$ est ensemble d'unicité.

Démonstration. - Soit E un ensemble de type $H^{(s)}$. Nous allons construire une suite de fonctions $\{\lambda_k\}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 1.

L'ouvert Δ du tore T^s contient un ouvert qui est le produit de s intervalles ouverts non vides $\Delta^{(i)}$ $(i = 1\ ,\ \ldots\ ,\ s)$ de T .

Il existe ([4], 1.6.4) une fonction $f^{(i)}$ appartenant à $A(T)$, c'est-à-dire donnée par

$$f^{(i)}(z) = \sum_{n\in Z} a_n^{(i)}\ z^n \qquad (z \in T)$$

avec : $\sum_{n\in Z} |a_n| < \infty$, telle que : $f^{(i)}(z) = 0$ à l'extérieur d'un ouvert $\Delta'^{(i)}$ non vide de T et

$$\int_T f^{(i)}(z)\ dz = a_0^{(i)} > 0\ .$$

L'ouvert $\Delta^{(i)}$ étant un intervalle $]u_i\ ,\ v_i[$ de T , on prendra comme ouvert $\Delta'^{(i)}$ un intervalle ouvert $]u'_i\ ,\ v'_i[$ contenu dans $\Delta^{(i)}$ avec $u'_i \neq u_i$, $v'_i \neq v_i$. Par suite, le support de $f^{(i)}$ est contenu dans $\Delta^{(i)}$.

A tout élément $\gamma_k^{(i)}$ (donné par la suite normale associée à E), on associe une fonction $\lambda_k^{(i)}$ de $A(G)$, définie par :

$$\lambda_k^{(i)} = f^{(i)} \cdot [\gamma_k^{(i)}]$$

(où $[\gamma_k^{(i)}]$ désigne l'application $x \to (x\ ,\ \gamma_k^{(i)})$ de G dans T), c'est-à-dire

$$\lambda_k^{(i)}(x) = f^{(i)}(x\ ,\ \gamma_k^{(i)}) = \sum_{n\in Z} a_n(x\ ,\ n\gamma_k^{(i)}) \ .$$

$\lambda_k^{(i)}$ appartient à $A(G)$, car on peut écrire :

$$\lambda_k^{(i)}(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{\lambda}_k^{(i)}(\gamma)\ (x\ ,\ \gamma) \qquad \text{où} \quad \hat{\lambda}_k^{(i)}(\gamma) = \sum_{n\in Z,\, n\gamma_k^{(i)}=\gamma} a_n^{(i)} \ .$$

D'où

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{\lambda}_k^{(i)}(\gamma)| \leqslant \sum_{n\in Z} |a_n^{(i)}| < \infty \ .$$

Posons :

$$\lambda_k = \prod_{i=1}^{s} \lambda_k^{(i)} \ .$$

La fonction λ_k appartient évidemment à $A(G)$. On a :

$$\lambda_k(x) = \prod_{i=1}^{s} \sum_{n\in Z} a_n^{(i)}(x\ ,\ n\gamma_k^{(i)}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{\lambda}_k(\gamma)(x\ ,\ \gamma) \ ,$$

avec

$$\hat{\lambda}_k(\gamma) = \sum_{\substack{n_i\in Z \\ n_1\gamma_k^{(1)}+\dots+n_s\gamma_k^{(s)}=\gamma}} a_{n_1}^{(1)} \dots a_{n_s}^{(1)} \ .$$

On en déduit

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{\lambda}_k(\gamma)| \leqslant \prod_{i=1}^{s} \sum_{n\in Z} |a_n^{(i)}| = B < \infty \ ,$$

où B est indépendant de k .

Si $x \in E$, $((x , \gamma_k^{(i)})_{i=1,\dots,s})$ n'appartient pas à l'ouvert Δ : il existe donc un indice i_0 , $1 \leqslant i_0 \leqslant s$, pour lequel $(x , \gamma_k^{(i_0)})$ n'appartient pas à $\Delta^{(i_0)}$. Ceci intraîne que le support de λ_k est disjoint de E . En effet, il est évident que λ_k s'annule sur tout élément de E ; d'autre part, supposons qu'il existe une suite $\{x_n\}$ $(n \in N')$ d'éléments de G tendant vers un élément x de E et tels que $\lambda_k(x_n) \neq 0$.

$$\lambda(x_n) \neq 0 \qquad \text{entraîne} \qquad (x_n , \gamma_k^{(i)}) \in \Delta'^{(i)} \qquad \text{pour tout } i = 1 , 2 , \dots, s .$$

Comme x appartient à E ,

$$(x , \gamma_k^{(i_0)}) \notin \Delta^{(i_0)} \qquad \text{pour un indice } i_0 , \ 1 \leqslant i_0 \leqslant s ;$$

or

$$x_n \to x \qquad \text{entraîne} \qquad (x_n , \gamma_k^{(i_0)}) \to (x , \gamma_k^{(i_0)}) ,$$

mais ceci est incompatible avec les 2 propriétés précédentes puisqu'on a choisi l'ouvert $\Delta'^{i_0} =]u'_{i_0} , v'_{i_0}[$ contenu dans $\Delta^{(i_0)} =]u_{i_0} , v_{i_0}[$ avec $u'_{i_0} \neq u_{i_0}$ et $v'_{i_0} = v_{i_0}$. Aucun élément de E n'appartient donc au support de λ_k .

Etudions le comportement de $\lambda_k(\gamma)$, γ étant fixé, quand $k \to +\infty$.

$$\hat{\lambda}_k(\gamma) = \sum_{\substack{n_i \in Z \\ n_1\gamma_k^{(1)}+\dots+n_s\gamma_k^{(s)} \leqslant \gamma}} a_{n_1}^{(1)} \dots a_{n_s}^{(s)} .$$

La suite $\{(\gamma_k^{(i)})_{i=1,\dots,s}\}$ est normale ; donc, si $n_1 \dots n_s$ sont fixés tels que $(n_1 , \dots , n_s) \neq (0 , \dots , 0)$,

$$n_1 \gamma_k^{(1)} + \dots + n_s \gamma_k^{(s)} \to \infty \qquad \text{quand} \qquad k \to +\infty .$$

Soit N un entier positif. γ étant fixé dans Γ , il existe un entier $K = K(N , \gamma)$ dépendant de N et de γ tel que

$$n_1 \gamma_k^{(1)} + \dots + n_s \gamma_k^{(s)} \neq \gamma$$

pour tout $k \geqslant K$ et pour tout système $(n_i)_{i=1,\dots,s}$ avec $0 < |n_i| \leqslant N$.

Donc, si $k \geqslant K$ et $\gamma \neq 0$,

$$\hat{\lambda}_k(\gamma) = \sum^{(N)}_{\substack{n_i \in Z \\ n_1\gamma_k^{(1)}+\dots+n_s\gamma_k^{(s)}=\gamma}} a_n^{(1)} \dots a_n^{(s)}$$

où la sommation est prise sur l'ensemble des systèmes (n_i) tels que $|n_{i_0}| > N$ pour un indice i_0 , $1 \leqslant i_0 \leqslant s$.

Si $\gamma = 0$ et $k \geqslant K$, on a :

$$\hat{\lambda}_k(0) = a_0^{(1)} \dots a_0^{(s)} + \sum_{\substack{n_i \in Z \\ n_1\gamma_k^{(1)}+\dots+n_s\gamma_k^{(s)}=0}} a_n^{(1)} \dots a_n^{(s)} .$$

On notera :

$$r_N^{(i)} = \sum_{\substack{n\in Z \\ |n|>N}} |a_n^{(i)}| , \quad B^{(i)} = \sum_{n\in Z} |a_n^{(i)}| \quad \text{et} \quad B = \prod_{i=1}^{s} B^{(i)} .$$

On voit facilement que, pour $k \geqslant K$,

$$\Big| \sum^{(N)}_{\substack{n_i \in Z \\ n_1\gamma_k^{(1)}+\dots+n_s\gamma_k^{(s)}=\gamma}} a_{n_1}^{(1)} \dots a_{n_s}^{(s)} \Big| \leqslant \sum_{i=1}^{s} r_N^{(i)} \frac{B}{B^{(i)}} .$$

Quand $N \to \infty$, $r_N^{(i)} \to \infty$. On peut donc choisir N tel que

$$\sum_{i=1}^{s} r_N^{(i)} \frac{B}{B^{(i)}} < \varepsilon .$$

Il en résulte le choix de $K = K(N , \gamma)$ tel que, si $k \geqslant K$,

$$|\hat{\lambda}_k(\gamma)| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad \gamma \neq 0 ,$$

et

$$|\hat{\lambda}_k(0) - a_0^{(1)} \dots a_0^{(s)}| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad \gamma = 0 .$$

D'où

$$\lim_{k\to+\infty} \hat{\lambda}_k(\gamma) = 0 \qquad \text{si} \quad \gamma \neq 0 ,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \hat{\lambda}_k(0) = a_0^{(1)} \dots a_0^{(s)} \neq 0 \qquad \text{(par construction des } f^{(i)} \text{) .}$$

La suite $\{\lambda_k\}$ vérifie donc les conditions de la proposition 1 : E est un ensemble U.

2. Ensemble à rapport constant dans $V_I(Q)$.

On se propose de définir, dans $V_I(Q)$, un ensemble généralisant les ensembles parfaits à rapport constant de la droite réelle.

2.1. Définition.

Dans la suite (à l'exception du paragraphe 5), ξ désignera un élément de $V_I(Q)$ tel que

$$0 < |\xi|_p < 1 \qquad \text{pour tout} \quad p \in I^- ,$$

et

$$0 < \xi_0 < 1 \qquad \text{si} \quad 0 \in I .$$

On pose :

$$E_\xi = \{x \in V_I(Q) \; ; \quad x = (e_I - \xi)(\delta_0 e_I + \delta_1 \xi + \dots + \delta_n \xi^n + \dots) \; ; \quad \delta_n = 0 \text{ ou } 1\}$$

(d'après le choix de ξ, toute série $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \xi^n$, avec $\delta_n = 0$ ou 1, converge).

Pour tout x de E_ξ, on a

$$|x|_p \leqslant 1 \qquad \text{si} \quad p \in I^- ,$$

et

$$0 \leqslant x_0 < 1 \qquad \text{si} \quad 0 \in I \quad \text{et} \quad x \neq e_I .$$

Donc, si $0 \notin I$: E_ξ, et si $0 \in I$: $E_\xi - (e_I)$, sont contenus dans le domaine fondamental F_I de $V_I(Q)$,

$$F_I = \{x \in V_I(Q) \; ; \quad 0 \leqslant |x|_p \leqslant 1 \quad \text{si} \quad p \in I^- \quad \text{et} \quad a \leqslant x_0 < a + 1 \quad \text{si} \quad 0 \in I\} ,$$

si l'on a choisi le réel $a = 0$. Dans la suite, on supposera $a = 0$.

Notons $x(\delta_n)$ un élément de E_ξ. Soient $x(\delta_n)$ et $x(\delta'_n)$ tels que : $\delta_n = \delta'_n$ si $0 \leqslant n \leqslant k - 1$, et $\delta_k < \delta'_k$; on a

$$|x(\delta_n) - x(\delta'_n)|_p = |\xi|_p^k ,$$

et, si $0 \in I$,

$$x_0(\delta_n) \leqslant x_0(\delta'_n) \leqslant x_0(\delta_n) + \xi_0^k .$$

Donc, <u>si</u> I^- <u>n'est pas vide</u>, à 2 systèmes δ_n distincts correspondent 2 éléments distincts de E_ξ ; E_ξ <u>a la puissance du continu</u>. Dans le cas $I = \{0\}$, on sait que, si $0 < \xi < \frac{1}{2}$, à 2 systèmes δ_n distincts correspondent 2 points distincts ; la situation est différente si $\frac{1}{2} \leqslant \xi < 1$; on laissera ce cas de côté.

Notons $x_k(\delta_0 , \dots , \delta_{k-1})$, ou en abrégé x_k , les éléments de E_ξ définis par

$$x_k(\delta_0 , \dots , \delta_{k-1}) = x(\delta_n) \qquad \text{avec } \delta_n = 0 \quad \text{si} \quad n \geqslant k .$$

E_ξ est contenu dans le compact $E_\xi^{(k)}$ défini par

$$E_\xi^{(k)} = \{x \in V_I(Q) \; ; \; \exists\, x_k(\delta_0 , \dots , \delta_{k-1})$$

$$\text{tel que } |x - x_k|_p \leqslant |\xi|_p^k , \ \forall p \in I^- , \text{ et } x_{k,0} \leqslant x \leqslant x_{k,0} + \xi_0^k \text{ si } 0 \in I\} .$$

Comme un élément appartenant à tous les $E_\xi^{(k)}$ est nécessairement un élément de E_ξ , on a

$$E_\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_\xi^{(k)} .$$

D'autre part,

$$\text{mes } E_\xi^{(k)} = \Big(\prod_{p \in I} |\xi|_p \Big)^k \times 2^k .$$

<u>Conséquence</u>. - Si $\prod_{p \in I} |\xi|_p < \frac{1}{2}$, E_ξ <u>est de mesure nulle</u>.

<u>Remarque</u>. - Le cas $\prod_{p \in I} |\xi|_p = \frac{1}{2}$ se produit si :

- ou bien $I = \{0\}$ et $\xi = \frac{1}{2}$, d'où $E_\xi = [0 , 1]$,
- ou bien $I = \{2\}$, $|\xi|_2 = \frac{1}{2}$, d'où $E_\xi = Z_2$.

Dans chacun de ces cas, $\text{mes } E_\xi = 1$.

2.2. <u>Définition d'une mesure</u> μ <u>portée par</u> E_ξ .

On se propose de définir une mesure μ portée par E_ξ et appartenant à $M(V_I(Q))$.

Soit μ_k la mesure ponctuelle obtenue en attribuant la masse $1/2^k$ à chacun des 2^k éléments $x(\delta_0 , \dots , \delta_{k-1})$ de E_ξ .

LEMME. - <u>La suite des mesures</u> $\{\mu_k\}$ $(k \in N')$ <u>converge au sens de la convergence faible* vers une mesure</u> $\mu \in M(V_I(Q))$, <u>dont le support est</u> E_ξ .

<u>Démonstration</u>. - Soit $f \in C_0(V_I(Q))$ (fonction continue à valeurs complexes et s'annulant à l'infini). Posons :

$$I_k(f) = \int_{V_I(Q)} f \, d\mu_k .$$

Montrons que la suite $\{I_k(f)\}$ $(k \in N')$ est convergente. On a

$$I_k(f) - I_h(f) = \frac{1}{2^k} \sum_{\delta_0,\ldots,\delta_{k-1}} f(x_k(\delta_0,\ldots,\delta_{k-1})) - \frac{1}{2^h} \sum_{\delta_0,\ldots,\delta_{h-1}} f(x_h(\delta_0,\ldots,\delta_{h-1}))$$

$$= \frac{1}{2^k} \sum_{\delta_0,\ldots,\delta_{h-1}} \Big(\sum_{\delta_h,\ldots,\delta_{k-1}} f(x_k) - 2^{k-h} f(x_h) \Big) ,$$

en supposant $k > h$.

f est uniformément continue sur $\overline{F_I}$, c'est-à-dire qu'il existe une application φ de N' dans R^+ , avec $\lim_{h\to+\infty} \varphi(h) = 0$, pour laquelle

$$\|x - x'\| \leqslant \|\xi\|^h \implies |f(x) - f(x')| \leqslant \varphi(h) \qquad (x \text{ et } x' \in \overline{F_I}) .$$

On a donc

$$|I_k(f) - I_h(f)| \leqslant \frac{1}{2^k} \sum_{\delta_0,\ldots,\delta_{h-1}} 2^{k-h} \varphi(h) \leqslant \varphi(h) .$$

Par suite, $\{I_k(f)\}$ converge. La limite, qu'on notera $I(f)$, est une fonctionnelle linéaire bornée sur $C_0(V_I(Q))$. D'après le théorème de Riesz, il existe donc une mesure unique μ de $M(V_I(Q))$ telle que

$$I(f) = \int_{V_I(Q)} f \, d\mu .$$

<u>La mesure</u> μ <u>est portée par</u> E_ξ : en effet, étant donnés un ouvert quelconque Ω ne rencontrant pas E_ξ , et une fonction f de support contenu dans Ω , $I_k(f) = 0$ quel que soit k , et donc

$$I(f) = 0 .$$

Par contre, si l'ouvert Ω rencontre E_ξ , on peut trouver des fonctions f à support dans Ω , telles que

$$I_k(f) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad I(f) \neq 0 .$$

2.3. Transformée de Fourier de la mesure μ .

Par définition, la transformée de Fourier d'une mesure $\mu \in M(V_I(Q))$ est donnée par

$$\hat{\mu}(y) = \int_{V_I(Q)} \exp(-2i\pi\varepsilon_0(xy))\, d\mu(x) \ ,$$

où $y \in V_I(Q)$ puisque (cf. [3]) tous les caractères continus de $V_I(Q)$ sont donnés par

$$x \to \exp(2i\pi\varepsilon_0(xy)) \qquad \text{où} \quad y \in V_I(Q) \ .$$

μ étant limite faible* des μ_k , on a

$$\hat{\mu}(y) = \lim_{k\to\infty} \hat{\mu}_k(y) \ .$$

Or,

$$\hat{\mu}_k(y) = \frac{1}{2^k} \sum_{\delta_i = 0 \text{ ou } 1} \exp(-2i\pi\varepsilon_0(y(e_I - \xi)(e_I\, \delta_0 + \dots + \delta_{k-1}\, \xi^{k-1}))$$

$$= \frac{1}{2^k} \prod_{j=0}^{k-1} (1 + \exp(-2i\pi\varepsilon_0(y(e_I - \xi)\xi^j)))$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1} \exp(-i\pi\varepsilon_0(y(e_I - \xi)\xi^j)).\cos \pi\, \varepsilon_0(y(e_I - \xi)\xi^j) \ .$$

D'où,

$$\hat{\mu}(y) = \exp(-i\pi\varepsilon_0(y)) \prod_{j=0}^{\infty} \cos \pi\, \varepsilon_0(y(e_I - \xi)\xi^j) \ ,$$

ce qui entraîne

$$|\hat{\mu}(y)| = \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi\, \varepsilon_0(y(e_I - \xi)\xi^j)| \ .$$

Cette expression, qui généralise l'expression trouvée dans le cas classique, servira de base à l'étude du paragraphe 3 (ensembles M).

2.4. Ensemble $E_\xi^\sim$ et mesure $\mu^\sim$.

E_ξ est un ensemble du groupe $V_I(Q)$, qui est seulement localement compact. Pour les questions d'unicité et de multiplicité, on va se ramener à un ensemble du groupe compact F_I^+ , de même que, pour les ensembles de la droite réelle, on se ramène, explicitement ou non, dans cette théorie, à des ensembles du groupe compact R/Z $(\sim F_0^+)$.

2.4.1. - Rappelons les résultats suivants :

F_I^+ désigne le groupe obtenu en donnant une structure de groupe additif au domaine fondamental F_I. On a :

$$F_I^+ \sim \prod_{p \in I} Z_p \qquad \text{si } 0 \notin I ,$$

$$F_I^+ \sim V_I(Q)/e_I \, Z[I] \qquad \text{si } 0 \in I .$$

F_I^+, muni de la topologie
- de sous-groupe de $V_I(Q)$ si $0 \notin I$,
- de groupe-quotient de $V_I(Q)$ si $0 \in I$,

est un groupe compact. Son dual $\hat{F}_I^+$ est discret et on a

$$\hat{F}_I^+ \sim V_I(Q)/F_I^+ \sim Z[I]/Z \qquad \text{si } 0 \notin I ,$$

$$\hat{F}_I^+ \sim Z[I] \qquad \text{si } 0 \in I .$$

Exemples :

$$I = \{p\} \quad (p \neq 0) , \quad F_p = Z_p , \quad F_p^+ \sim Z_p , \quad \hat{F}_p^+ \sim Q_p/Z_p \sim Z[p]/Z ,$$

$$I = \{0\} , \quad F_0 = [0 , 1[, \quad F_0^+ \sim R/Z , \quad \hat{F}_0^+ \sim Z .$$

<u>Définition</u>. - $E_\xi^\sim$ <u>est l'ensemble de</u> F_I^+, <u>image de l'ensemble</u> E_ξ <u>de</u> $V_I(Q)$ <u>par l'application</u> $x \to \varepsilon_I(x)$ <u>de</u> $V_I(Q)$ <u>dans</u> F_I^+.

On remarque que $E_\xi^\sim$ coïncide avec E_ξ si $0 \notin I$, avec $E_\xi - \{e_I\}$ si $0 \in I$.

$E_\xi^\sim$ <u>est un ensemble parfait de</u> F_I^+ :
- si $0 \notin I$, parce que E_ξ et $E_\xi^\sim$ coïncident, et que les topologies de F_I^+ et de F_I comme sous-ensembles de $V_I(Q)$ coïncident ;
- si $0 \in I$, parce que l'application $x \to \varepsilon_I(x)$ est alors l'homomorphisme canonique de $V_I(Q)$ dans son groupe quotient F_I^+.

Dans la suite de cet exposé, on se propose de chercher dans quels cas $E_\xi^\sim$ est ensemble U ou ensemble M .

2.4.2. - <u>On définit une mesure</u> $\mu^\sim$ <u>associée à la mesure</u> μ <u>portée par</u> E_ξ <u>par l'application</u> $x \to \varepsilon_I(x)$, de la manière suivante :

Soit $f \in C_0(F_I^+)$; l'application

$$f \to \int_{V_I(Q)} f(\varepsilon_I(x)) \, d\mu(x)$$

est une fonctionnelle linéaire bornée sur $C_0(F_I^+)$; il existe donc une mesure unique $\mu^\sim \in M(F_I^+)$ telle que :

$$\int_{V_I(Q)} f(\varepsilon_I(x))\, d\mu(x) = \int_{F_I^+} f\, d\mu^\sim \qquad (f \in C_0(F_I^+)) .$$

<u>La mesure</u> $\mu^\sim$ <u>est portée par</u> $E_\xi^\sim$: en effet, soient Ω un ouvert de F_I^+ ne rencontrant pas $E_\xi^\sim$, et $f \in C(F_I^+)$ de support contenu dans Ω ; $f(\varepsilon_I(x))$, qui appartient à $C(V_I(Q))$, a son support contenu dans $\varepsilon_I^{-1}(\Omega)$ (ouvert de $V_I(Q)$ qui a Ω pour image dans l'application $x \to \varepsilon_I(x)$) ; comme μ est porté par E_ξ et comme $\varepsilon_I^{-1}(\Omega)$ ne rencontre pas E_ξ , on a

$$\int_{F_I^+} f\, d\mu = \int_{V_I(Q)} f(\varepsilon_I(x))\, d\mu(x) = 0 .$$

2.4.3. – Soit γ un élément de $\hat{F}_I^+$. On a :

$$\hat{\mu}^\sim(\gamma) = \int_{F_I^+} (-x , \gamma)\, d\mu^\sim(x) = \int_{V_I(Q)} (-\varepsilon_I(x) , \gamma)\, d\mu(x) ;$$

on sait que

$$(\varepsilon_I(x) , \gamma) \equiv \exp(2i\pi\varepsilon_0(xy)) ,$$

où $y \in e_I\, Z(I)$ si $0 \in I$ et $y \in V_I(Q)$ si $0 \notin I$, et on désigne par σ l'application $y \to \gamma = \sigma(y)$ ainsi définie (σ est un isomorphisme de $e_I\, Z(I)$ dans $\hat{F}_I^+$ si $0 \in I$, et un homomorphisme de $V_I(Q)$ sur $\hat{F}_I^+$ si $0 \notin I$). On a donc :

$$\hat{\mu}^\sim(\gamma) = \hat{\mu}(y) \qquad \text{pour } \gamma = \sigma(y) .$$

Cette relation est fondamentale pour la suite (paragraphe 3).

2.4.4. – On aura besoin, dans les paragraphes 3 et 4, de la propriété suivante :

LEMME. – <u>Soient</u> $\{\gamma_k\}$ $(k \in N')$ <u>une suite infinie d'éléments de</u> $\hat{F}_I^+$ <u>et</u> $\{y_k\}$ $(k \in N')$ <u>une suite d'éléments de</u> $V_I(Q)$ <u>tels que</u> $\gamma_k = \sigma(y_k)$ <u>pour tout</u> $k \in N'$. $\gamma_k \to \infty$ <u>dans</u> $\hat{F}_I^+$ <u>si et seulement si</u> $y_k \to \infty$ <u>dans</u> $V_I(Q)$.

<u>Démonstration</u>. – $\hat{F}_I^+$ est discret ; $\gamma_k \to \infty$ signifie : pour k assez grand, γ_k est en dehors de tout compact, c'est-à-dire de tout ensemble fini de $\hat{F}_I^+$, fixé.

$y_k \to \infty$ dans $V_I(Q)$ est équivalent à $\|y_k\| \to +\infty$ (car I sous-ensemble <u>fini</u> de P).

Si $0 \in I$: $y_k \in e_I\, Z[I]$, c'est-à-dire

$$y_k = e_I \frac{m_k}{\prod_{p \in I^-} p^{h_{k,p}}} .$$

$\|y_k\| \to +\infty$ si et seulement si

$$\sup\{|m_k|_0 \,,\, \sup_{p \in I^-} h_{k,p}\} \to +\infty ,$$

ce qui est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que $y_k \to \infty$ dans le groupe discret $e_I\, Z[I]$.

Si $0 \notin I$: y_k est défini modulo F_I par $\gamma_k = \sigma(y_k)$, γ_k donné. Ceci peut s'exprimer ainsi :

$$\sigma(y_k) = \sigma(y'_k) \iff E(y_k) = E(y'_k) \mod 1$$

(on retrouve le fait que $F_I^+ \sim Z[I]/Z$). Or,

$$E(y_k) = \frac{m}{\prod_{p \in J} p^{h_{k,p}}} \quad \text{avec} \quad |m|_p = 1 \quad (p \in J) \quad \text{et} \quad \sup_{p \in J} h_{k,p} \geqslant 1 \quad \text{si} \quad \sigma(y_k) \neq 0 .$$

On a :

$$\|y_k\| = \|e_I\, E(y_k)\| = \sup_{p \in I} p^{h_{k,p}} .$$

$\|y_k\| \to +\infty$ si et seulement si

$$\sup_{p \in J} h_{k,p} \to +\infty ,$$

ce qui est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que $E(y_k) \mod 1 \to \infty$ dans le groupe discret $Z[I]/Z$.

3. Ensembles $E_\xi^\sim$ et ensembles M .

Dans ce paragraphe, on va montrer que, pour certains ξ , $E_\xi^\sim$ est ensemble M du groupe F_I^+ .

Méthode employée : elle consiste à montrer que

$$\lim_{\gamma \to \infty} \hat{\mu}^\sim(\gamma) = 0 ,$$

où $\hat{\mu}^{\sim}$ est la mesure portée par $E_{\xi}^{\sim}$ définie dans le paragraphe précédent. Pour cela, on étudie le comportement de $\hat{\mu}(y)$ quand $y \to \infty$ dans $V_I(Q)$. On en déduit la propriété cherchée pour $\hat{\mu}^{\sim}$, grâce aux résultats des paragraphes 2.4.3 et 2.4.4.

3.1. - On démontrera d'abord le résultat suivant :

PROPOSITION 2. - Soit $\xi \in V_I(Q)$ défini comme dans 2.1. Soit μ la mesure portée par E_{ξ} définie dans 2.2. On note $\theta = \frac{1}{\xi}$.
Une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\hat{\mu}(y) \not\longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \quad y \to \infty \quad \text{dans} \quad V_I(Q) ,$$

est l'existence d'un sous-ensemble (non vide) J de I tel que θ_J appartienne à S_J^0 , que le polynôme minimal de θ_J soit irréductible, et que l'on ait

$$\prod_{p \in J} |\theta|_p > 2 .$$

L'expression "polynôme minimal de θ_J " est employée à la place de "polynôme minimal de l'élément algébrique θ_J relatif à $V_J(\Omega)$ " (voir [1] , [2]). On notera ce polynôme : $\mathrm{Pm}(\theta_J \,;\, x)$.

On démontrera la proposition 2 sous la forme équivalente :

PROPOSITION 2 bis. - Une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\hat{\mu}(y) \not\longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \quad y \to \infty \quad \text{dans} \quad V_I(Q) ,$$

est l'existence d'un sous-ensemble (non vide) J de I tel que θ_J appartienne à S_J^0 , θ et J ne vérifiant aucune des 3 conditions suivantes :

(a) $J = \{0\}$ $\qquad \theta_0 = 2$

(b) $J = \{2\}$ $\qquad |\theta|_2 = 2$

(c) $J = \{0 , 2\}$ $\qquad \theta_0 = 2 , \ |\theta|_2 = 2$.

Les propositions 2 et 2 bis sont équivalentes ; en effet, si, pour un sous-ensemble J de I , $\theta_J \in S_J^0$, et si l'on n'a aucun des 3 cas (a) , (b) , (c) ,
- ou bien $\mathrm{Pm}(\theta_J \,;\, x)$ est irréductible, et alors $\prod_{p \in J} |\theta|_p = 2$ ne peut se produire, puisqu'on a exclus (a) et (b),
- ou bien $\mathrm{Pm}(\theta_J \,;\, x)$ est réductible ; il existe alors une partition $J = J' + J''$ telle que $\theta_J = \theta_{J'} e_{J'} + \theta_{J''} e_{J''}$, $\theta_{J'} \in S_{J'}^0$, $\theta_{J''} \in S_{J''}^0$, et $\mathrm{Pm}(\theta_{J'} \,;\, x)$ irréductible.

S'il existe dans J un élément $p \neq 0$ et 2, on peut imposer à J' de contenir p : donc $\prod_{p \in J'} |\theta|_p \geqslant p > 2$, et J' satisfait aux conditions de la proposition 2 ; si $J = \{0, 2\}$, on a $\theta_J = \theta_0 \, e_{(0)} + \theta_2 \, e_{(2)}$ où $\theta_0 \in S_0^0$ et $\theta_2 \in S_2^0$; $\mathrm{Pm}(\theta_0 ; x)$ et $\mathrm{Pm}(\theta_2 ; x)$ sont irréductibles, donc soit $\{0\}$, soit $\{2\}$, peut jouer le rôle de l'ensemble J', à moins que l'on ne se trouve dans le cas (c).

Réciproquement, s'il existe J tel que $\theta_J \in S_J^0$, $\mathrm{Pm}(\theta_J ; x)$ irréductible, et $\prod_{p \in J} |\theta|_p > 2$, on ne peut évidemment avoir aucun des cas (a), (b), (c).

L'équivalence des propositions 2 et 2 bis est donc démontrée.

3.1.1. <u>Proposition 2 bis : condition nécessaire</u>. <u>Démonstration</u>.

Supposons que $\hat{\mu}(y) \not\to 0$: il existe une suite $\{y_k\}$ $(k \in N')$ d'éléments de $V_I(Q)$ tels que

$$y_k \to \infty \qquad \text{et} \qquad |\hat{\mu}(y_k)| \geqslant \delta > 0 .$$

Soit I' l'ensemble des indices p de I tels que $|y_k|_p \to \infty$. On notera : $I = I' + I''$ (I' est non vide, car I est un sous-ensemble <u>fini</u> de P).

Si $p \in I'$, il existe un entier $m_{k,p}$ tel que

$$|\theta|_p^{m_{k,p}} \leqslant |y_k|_p < |\theta|_p^{m_{k,p}+1} ,$$

et on a

$$m_{k,p} \to +\infty .$$

En prenant au besoin une sous-suite en k, on peut supposer que, pour tout $p \in I'$, la suite $\{m_{k,p}\}$ est strictement croissante et qu'il existe un indice $p' \in I'$ tel que

$$m_k = m_{k,p'} \geqslant m_{k,p} \qquad \text{pour tout } p \in I' .$$

Il en résulte, en posant $\lambda_k = y_k \, \theta^{-m_k}$,

$$(1) \qquad \begin{cases} 1 \leqslant |\lambda_k|_{p'} < |\theta|_{p'} & \\ |\lambda_k|_p < |\theta|_p & \text{si } p \in I' \\ |\lambda_k|_p < C|\theta|_p^{-m_k} & \text{si } p \in I'' \end{cases}$$

où C est une constante réelle > 0 indépendante de p et de k.

On peut donc extraire une sous-suite en k telle que $\lambda_k \to \lambda$, où $\lambda \in V_I(Q)$ et $|\lambda|_{p'} \geqslant 1$, ce qui entraîne $\lambda_{p'} \neq 0$.

Soit J le sous-ensemble de I défini par

$$J = \{p \in I \,;\; \lambda_p \neq 0\} .$$

On a évidemment

$$\{p'\} \subset J \subset I' .$$

L'expression de $\hat{\mu}(y)$ a été donnée dans 2.3. On trouve :

$$(2) \qquad |\hat{\mu}(y_k)| = \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi \, \varepsilon_0(\lambda_k(e_I - \xi)\, \theta^{m_k - j})| .$$

On notera $\lambda_k \, e_{I'} = \lambda_{k,I'}$ et $\lambda_k \, e_{I''} = \lambda_{k,I''}$. On a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(\lambda_k(e_I - \xi)\theta^{m_k-j}) &\equiv \varepsilon_0(\lambda_{k,I'}(e_{I'} - \xi_{I'})\theta_{I'}^{m_k-j}) + \varepsilon_0(\lambda_{k,I''}(e_{I''} - \xi_{I''})\theta_{I''}^{m_k-j}) \mod 1 \\ &\equiv \alpha_j + \beta_j \mod 1 . \end{aligned}$$

D'après (1),

$$|\lambda_{k,I''}(e_{I''} - \xi_{I''}) \, \theta_{I''}^{m_k-j}|_p \leqslant C|\theta|_p^{-j} \, |1 - \xi_p|_p \qquad (p \in I'') .$$

Donc, si

$$j \geqslant \sup_{p \in I''} \frac{\log C|1 - \xi_p|_p}{\log |\theta|_p} ,$$

on a

$$H_p(\lambda_{k,p}(1 - \xi_p) \, \theta_p^{m_k-j}) = 0 \qquad \text{pour tout } p \in I''^{-} ,$$

d'où

$$\beta_j \equiv \lambda_{k,0}(1 - \xi_0) \, \theta_0^{m_k-j} \mod 1 \qquad \text{si } 0 \in I'' ,$$

ou

$$\beta_j = 0 \qquad \text{si } 0 \notin I'' .$$

Dans tous les cas, on pourra poser :

$$(3) \qquad |((\beta_j))| \leqslant \frac{1}{4} \rho^j \qquad \text{pour } j \geqslant N ,$$

où ρ est un réel : $0 \leqslant \rho < 1$ ($\rho = 0$ si $0 \notin I''$, et $\rho = |\theta_0|_0$ si $0 \in I''$) et N un entier ne dépendant que de C et de θ.

Par hypothèse,

$$\prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi(\alpha_j + \beta_j)| \geqslant \delta > 0 \ ;$$

on en déduit, à l'aide de (3),

(4) $$\sum_{j=N}^{+\infty} \sin^2 \pi\alpha_j \leqslant \delta' \qquad (\text{où } \delta' \text{ ne dépend que de } \delta \text{ et de } N)\ .$$

En effet, en utilisant l'inégalité : $1 + x < \exp x$, on voit que

$$\prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi(\alpha_j + \beta_j)| > \delta \implies \sum_{j=0}^{\infty} \sin^2 \pi(\alpha_j + \beta_j) \leqslant \log \frac{1}{\delta^2} \ ;$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} \sin^2 \pi\alpha_j &\leqslant \sin^2 \pi(\alpha_j + \beta_j) + \sin^2 \pi\beta_j + |\sin 2\pi\beta_j| \\ &\leqslant \sin^2 \pi(\alpha_j + \beta_j) + \pi^2 |((\beta_j))|^2 + 2\pi |((\beta_j))| \qquad \text{pour } j \geqslant N \\ &\leqslant \sin^2 \pi(\alpha_j + \beta_j) + \frac{3\pi}{2} \rho^j \qquad \text{pour } j \geqslant N \ ; \end{aligned}$$

d'où (4), avec $\delta' = \log \frac{1}{\delta^2} + \frac{3\pi}{2} \frac{\rho^N}{1 - \rho}$.

(4) entraîne

$$\sum_{j=N}^{m_k} \sin^2 \pi\alpha_j \leqslant \delta' \qquad \text{pour tout } m_k > N \ ;$$

or, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=N}^{m_k} \sin^2 \pi\alpha_j &= \sum_{j=N}^{m_k} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\lambda_{k,I'}(e_{I'} - \xi_{I'})\ \theta_{I'}^{m_k - j}) \\ &= \sum_{q=0}^{m_k - N} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\lambda_{k,I'}(e_{I'} - \xi_{I'})\ \theta_{I'}^{q}) \ ; \end{aligned}$$

donc, quels que soient ℓ et k tels que $\ell < k$ et $N < m_\ell$,

$$\sum_{q=0}^{m_\ell - N} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\lambda_{k,I'}(e_{I'} - \xi_{I'})\ \theta_{I'}^{q}) \leqslant \delta' \ ;$$

d'où, ℓ étant fixé et k tendant vers l'infini, on obtient

$$\sum_{q=0}^{m_\ell - N} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\lambda_{I'}(e_{I'} - \xi_{I'})\, \theta_{I'}^q) \leqslant \delta' .$$

Ceci étant vrai quel que soit ℓ tel que $N < m_\ell$, on a

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\lambda_{I'}(e_{I'} - \xi_{I'})\, \theta_{I'}^q) \leqslant \delta' ,$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\lambda_J(e_J - \xi_J)\, \theta_J^q) \leqslant \delta' ,$$

où λ_J est un élément inversible de $V_J(Q)$. Par suite, θ_J est un élément de l'ensemble S_J^0 .

Supposons que θ_J et J vérifient l'une des conditions (a) , (b) , (c).

<u>Cas (a)</u> : $J = \{0\}$, $\theta_0 = 2$.

Par hypothèse, $|\lambda_k|_p \to 0$ pour tout $p \in I^-$. Par suite, il existe un entier K tel que, si $k \geqslant K$, $|\lambda_k(e_I - \xi)\, \theta^{m_k}|_p \leqslant 1$.

(2) entraîne :

$$|\hat{\mu}(y_k)| = \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi\lambda_{k,0}(1 - \xi_0)\, \theta_0^{m_k - j}| \qquad (k \geqslant K)$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi\lambda_{k,0} \frac{1}{2^{-m_k+j+1}}| \qquad (k \geqslant K)$$

$$= \frac{\sin \pi\, 2^{m_k+2}\, \lambda_{k,0}}{2^{m_k+1}\, \lambda_{k,0}} ,$$

quand $k \to \infty$, $\lambda_{k,0} \to \lambda_0 \neq 0$ par hypothèse ; donc, $|\pi\, 2^{m_k+2}\, \lambda_{k,0}| \to +\infty$. Il en résulte $|\hat{\mu}(y_k)| \to 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse : le cas (a) est donc à exclure.

<u>Cas (b)</u> : $J = \{2\}$, $|\theta|_2 = 2$, $\theta_2 \in S_2^0$ par hypothèse.

(Exemples : si θ_2 est de degré 1 : $\theta_2 = \pm \frac{1}{2}$;

si θ_2 est de degré 2 : θ est racine d'un des 2 polynômes $2x^2 \pm x + 1$.)

Dans ce cas, $|\lambda_k|_p \to 0$ pour tout $p \in I - \{2\}$. Il existe un entier K tel que, si $k \geqslant K$,

$$|\lambda_k(e_I - \xi)\,\theta^{m_k}|_p \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } p \in I^- - \{2\}.$$

(2) entraîne

$$|\hat{\mu}(y_k)| = \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi(\lambda_{k,0}(1-\xi_0)\,\theta_0^{m_k-j} + H_2(\lambda_{k,2}(1-\xi_2)\,\theta_2^{m_k-j}))| \quad (k \geqslant K).$$

(1) entraîne $1 \leqslant |\lambda_k|_2 < 2$ pour k assez grand. On supposera K choisi tel que ceci soit réalisé dès que $k \geqslant K$. On a donc

$$|\lambda_{k,2}(1-\xi_2)\,\theta_2^{m_k-j}|_2 = 2^{m_k-j} \qquad (k \geqslant K),$$

d'où

$$H_2(\lambda_{k,2}(1-\xi_2)\,\theta_2^{-1}) = \frac{1}{2};$$

en posant

$$\eta_k = 2\pi\lambda_{k,0}(1-\xi_0)\,\theta_0,$$

on a

$$|\hat{\mu}(y_k)| \leqslant |\cos(\frac{\pi}{2} + \eta_k)| \qquad (k \geqslant K);$$

or $\eta_k \to 0$ quand $k \to \infty$, donc $|\hat{\mu}(y_k)| \to 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le cas (b) est à exclure.

<u>Cas (c)</u> : $J = \{0, 2\}$, $\theta_0 = 2$, $|\theta|_2 = 2$.
Comme $\theta_J \in S_J^0$ et $\theta_0 \in S_0^0$, $\theta_2 \in S_2^0$.
Dans ce cas, $\lambda_{k,p} \to 0$ pour tout $p \in I^- - \{2\}$. Il existe un entier K tel que, si $k \geqslant K$,

$$|\lambda_k(e_I - \xi)\,\theta^{m_k}|_p \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } p \in I^- - \{2\}.$$

D'autre part, $\lambda_{k,0} \to \lambda_0 \neq 0$ et $\lambda_{k,2} \to \lambda_2 \neq 0$. On a

$$|\lambda_0| < 2, \quad |\lambda_2|_2 < 2.$$

On pose

$$|\lambda_2|_2 = 2^{-\ell} \qquad (\ell \geqslant 0).$$

On suppose K tel que, si $k \geqslant K$,

$$|\lambda_{k,2}|_2 = |\lambda_2|_2 = 2^{-\ell}.$$

(2) entraîne, pour $k \geqslant K$,

$$|\hat{\mu}(y_k)| = \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi(\lambda_{k,0}(1 - \xi_0)\, \theta_0^{m_k - j} + H_2(\lambda_{k,2}(1 - \xi_2)\, \theta_2^{m_k - j}))|$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi(\lambda_{k,0}\, 2^{m_k - j - 1} + 2^{m_k - j - \ell})|$$

$$= \frac{\sin(\pi\, 2^{m_k}(\lambda_{k,0} + 2))}{2^{m_k - 1}(\lambda_{k,0} + 2)} .$$

Quand $k \to +\infty$,

$$\lambda_{k,0} \to \lambda_0 \neq 0 \qquad \text{donc} \qquad |2^{m_k - 1}(\lambda_{k,0} + 2)| \to +\infty .$$

Par suite, $|\hat{\mu}(y_k)| \to 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le cas (c) est à exclure.

3.1.2. Proposition 2 bis : condition suffisante. Démonstration.

Supposons qu'il existe un sous-ensemble non vide J de I tel que $\theta_J \in S_J^0$, les cas (a) , (b) , (c) étant exclus. On cherche à construire une suite $\{y_k\}$ $(k \in N')$ tendant vers l'infini dans $V_I(Q)$, telle que $|\hat{\mu}(y_k)| \geqslant \delta > 0$.

Posons

$$y_k = \frac{\theta_J^k}{e_J - \xi_J} .$$

On a

$$|\hat{\mu}(y_k)| = \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi\varepsilon_0(\theta_J^{k-j})|$$

$$= \prod_{q=1}^{k} |\cos \pi\varepsilon_0(\theta_J^q)| \prod_{q=1}^{+\infty} |\cos \pi\varepsilon_0(\xi_J^q)| ;$$

par hypothèse,

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\theta_J^q) < \infty ;$$

donc, ou bien le produit infini

$$\prod_{q=0}^{\infty} |\cos^2 \pi\varepsilon_0(\theta_J^q)|$$

converge vers un réel $A > 0$, ou bien il existe un entier $q_1 > 0$ tel que

$$\varepsilon_0(\theta_J^{q_1}) = \frac{1}{2} .$$

On voit facilement que

$$\sum_{q=1}^{\infty} \sin^2 \pi\varepsilon_0(\xi_J^q) < \infty$$

(en effet, $|\xi|_p < 1$ pour tout $p \in J \implies |((\varepsilon_0(\xi_J^q)))| \leqslant \rho^q$ pour q assez grand, où $\rho = 0$ si $0 \notin J$, et $\rho = |\xi|_0$ si $0 \in J$). Donc, ou bien le produit infini

$$\prod_{q=1}^{\infty} |\cos^2 \pi\varepsilon_0(\xi_J^q)|$$

converge vers un réel $B > 0$, ou bien il existe un entier $q_2 > 0$ tel que

$$\varepsilon_0(\xi_J^{q_2}) = \frac{1}{2} .$$

En revenant à l'expression de $|\hat{\mu}(y_k)|$, on voit que

$$|\hat{\mu}(y_k)| \geqslant \sqrt{A}\,\sqrt{B} > 0 ,$$

sauf s'il existe un entier q_0 de Z tel que

$$\varepsilon_0(\theta_J^{q_0}) = \frac{1}{2} .$$

Cherchons dans quels cas ceci peut se produire.

Si $q_0 < 0$ et $0 \notin J$, $\varepsilon_0(\theta^{q_0}) = - H(\theta^{q_0}) = 0$, c'est donc impossible.

Si $q_0 < 0$ et $0 \in J$, $\varepsilon_0(\theta^{q_0}) \equiv \theta_0^{q_0} \equiv \frac{1}{2} \bmod 1$ entraîne $q_0 = -1$, $\theta_0 = 2$ (considérer le polynôme $x^{-q_0} - 2$, qui est le polynôme irréductible de θ_0 , et utiliser l'hypothèse $\theta_J \in S_J^0$). Si l'on exclut les 3 cas (a) , (b) , (c), on peut trouver une suite $\{z_k\}$ tendant vers l'infini dans $V_I(Q)$, et telle que $|\hat{\mu}(z_k)| \geqslant \delta > 0$: il suffit de prendre

$$z_k = \frac{1}{e_{J^-} - \xi_{J^-}}\, \theta_{J^-}^k .$$

On montre, en effet, que $\varepsilon_0(\theta_{J^-}^q) \neq \frac{1}{2}$ quel que soit $q \in Z$.

<u>Si $q_0 > 0$ et $0 \notin J$</u> , $\varepsilon_0(\theta^{q_0}) = - H(\theta^{q_0}) = \frac{1}{2}$ entraîne $J = \{2\}$, $|\theta|_2 = 2$, c'est-à-dire le cas (b).

<u>Si $q_0 > 0$ et $0 \in J$</u> , $\varepsilon_0(\theta^{q_0}) = \theta_0^{q_0} - H(\theta^{q_0}) = \frac{1}{2}$ entraîne $q_0 = 1$, $2 \in J$, $|\theta|_2 = 2$, et $\theta_2 \in S_2^0$ (considérer le polynôme irréductible de θ_0 :

$$2d^{q_0} x^{q_0} - (2m + d^{q_0}) ,$$

où $d = \prod_{p \in J^-} |\theta|_p$ et $m = d^{q_0} H(\theta^{q_0})$). Si l'on exclut le cas (c), on peut trouver une suite $\{z_k\}$ tendant vers l'infini dans $V_I(Q)$ et telle que $|\hat{\mu}(z_k)| \geqslant \delta > 0$. Il suffit de prendre

$$z_k = \frac{1}{e_{J*} - \xi_{J*}} \theta_{J*}^k \qquad \text{où } J^* = J - \{2\} ;$$

on montre, en effet, que $\varepsilon_0(\theta_{J*}^q) \neq \frac{1}{2}$ pour tout $q \in Z$.
(Si $J^* = \{0\}$, on trouve $\theta_0 = k + 1$, où k entier $\geqslant 2$.
Si $J^* \neq \{0\}$, on trouve $\theta_p = r$ pour tout $p \in J^*$, où r est un rationnel.
Il en résulte $\varepsilon_0(\theta_{J*}^q) = 0$.)

On a donc démontré, si $\theta_J \in S_J^0$, les cas (a) , (b) , (c) étant exclus,

$$|\hat{\mu}(y)| \not\to 0 \quad \text{quand } y \to \infty \quad \text{dans } V_I(Q) .$$

3.2. - On se propose de démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 3. - Soient ξ défini comme dans 2.1, μ la mesure portée par E_ξ définie dans 2.2, $E_\xi^\sim$ et $\mu^\sim$ définis comme dans 2.4.

$$\hat{\mu}^\sim(\gamma) \to 0 \quad \underline{\text{quand}} \quad \gamma \to \infty \quad \underline{\text{dans}} \quad \hat{F}_I^+$$

<u>si et seulement si</u>

$$\hat{\mu}(y) \to 0 \quad \underline{\text{quand}} \quad y \to \infty \quad \underline{\text{dans}} \quad V_I(Q) .$$

3.2.1. <u>Démonstration</u>. - On sait que

$$\hat{\mu}^\sim(\gamma) = \hat{\mu}(y) \qquad \text{où} \qquad \gamma = \sigma(y) \qquad \text{(voir 2.4.3)} ,$$

et que

$$\gamma \to \infty \quad \text{dans } \hat{F}_I^+ \quad \text{si et seulement si} \quad y \to \infty \quad \text{dans } V_I(Q) \quad \text{(voir 2.4.4)} .$$

Par suite, " $\hat{\mu}(y) \to 0$ quand $y \to \infty$ dans $V_I(Q)$ " entraîne " $\hat{\mu}^\sim(\gamma) \to 0$ quand $\gamma \to \infty$ dans $\hat{F}_I^+$ ".

Supposons $\hat{\mu}(y) \not\longrightarrow 0$ quand $y \to \infty$. Il existe une suite $\{y_k\}$ $(k \in N')$ tendant vers l'infini dans $V_I(Q)$ et telle que $|\hat{\mu}(y_k)| \geqslant \delta > 0$.

<u>Si $0 \notin I$</u> : à tout y_k correspond $\gamma_k = \sigma(y_k)$, et l'on a

$$\hat{\mu}^{\sim}(\gamma_k) = \hat{\mu}(y_k) \qquad \text{et} \qquad \gamma_k \to \infty ;$$

d'où

$$\hat{\mu}^{\sim}(\gamma) \not\longrightarrow 0 .$$

<u>Si $0 \in I$</u>, on aura besoin du résultat suivant :

LEMME. - <u>On suppose</u> $0 \in I$. <u>Soit</u> $m \in M(V_I(Q))$ <u>une mesure non négative, portée par</u> $\overline{F_I}$. <u>Si</u> $\hat{m}(r) \to 0$ <u>quand</u> $r \to \infty$ <u>dans</u> $e_I\ Z[I]$, <u>alors</u> $\hat{m}(y) \to 0$ <u>quand</u> $y \to \infty$ <u>dans</u> $V_I(Q)$.

Ce lemme entraînera immédiatement le résultat cherché : en effet, μ est non négative et portée par $E_\xi \subset \overline{F_I}$. On a supposé $\hat{\mu}(y) \not\longrightarrow 0$; si $\hat{\mu}^{\sim}(\gamma) \to 0$ quand $\gamma \to \infty$ dans $\hat{F}_I^+$, alors par l'isomorphisme σ entre $\hat{F}_I^+$ et $e_I\ Z[I]$: $\gamma = \sigma(r)$ où $r \in e_I\ Z[I]$, $\hat{\mu}(r) = \hat{\mu}^{\sim}(\gamma)$, d'où $\hat{\mu}(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ dans $e_I\ Z[I]$. Mais ceci est impossible, d'après le lemme.

3.2.2. - La proposition 3 sera démontrée, si l'on démontre le lemme de 3.2.1.

<u>Démonstration du lemme</u>. - On suppose $\hat{m}(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ dans $e_I\ Z[I]$. Comme $y = e_I\ E(y) + \varepsilon_I(y)$, on a

$$\hat{m}(y) = \int_{V_I(Q)} \exp(-\ 2i\pi\varepsilon_0(xE(y)))\ \exp(-\ 2i\pi\varepsilon_0(x\,\varepsilon_I(y)))\ dm(x)$$

$$= \int_{F_I} \exp(-\ 2i\pi\varepsilon_0(xE(y)))\ \exp(-\ 2i\pi\varepsilon_0(x\varepsilon_I(y)))\ dm(x) .$$

Supposons qu'il existe une suite $\{y_k\}$ $(k \in N')$ tendant vers l'infini dans $V_I(Q)$ et telle que

$$|\hat{m}(y_k)| \geqslant \delta > 0 .$$

La suite $\{\varepsilon_I(y_k)\}$ est formée d'éléments de l'ensemble F_I, dont l'adhérence $\overline{F_I}$ est compacte. En prenant au besoin une sous-suite, on peut donc supposer qu'elle converge vers un élément ω de $\overline{F_I}$. Il existe donc un entier K tel que, si $k \geqslant K$, pour tout $x \in \overline{F_I}$,

$$2\pi|((\varepsilon_0(y_k) - \omega_0))| < \frac{\delta}{2} .$$

Comme

$$|\exp(-2i\pi\varepsilon_0(x\varepsilon_I(y_k))) - \exp(-2i\pi\varepsilon_0(x\omega))| \leqslant 2\pi|((\varepsilon_0(x\varepsilon_I(y_k)) - \varepsilon_0(x\omega)))|$$
$$\leqslant 2\pi|((x_0\ \varepsilon_0(y_k) - x_0\ \omega_0))|$$
$$\leqslant 2\pi|((\varepsilon_0(y_k) - \omega_0))| ,$$

on a, pour $k \geqslant K$,

$$|\exp(-2i\pi\varepsilon_0(x\varepsilon_I(y_k))) - \exp(-2i\pi\varepsilon_0(x\omega))| \leqslant \frac{\delta}{2} ,$$

d'où

$$|\int_{F_I} \exp(-2i\pi\varepsilon_0(xE(y_k)))\ \exp(-2i\pi\varepsilon_0(x\omega))\ dm(x)| \geqslant \frac{\delta}{2} .$$

D'autre part, la fonction $x \to \exp(-2i\pi\varepsilon_0(x\omega))$, comme fonction définie sur le groupe F_I^+ , n'est pas continue en général, mais appartient à $L_1(F_I^+ , m)$; or, les polynômes trigonométriques sur F_I^+ forment une sous-algèbre dense de $L_1(F_I^+, m)$ ([6], 1.5.2 et E8) : il existe donc un polynôme trigonométrique $P(x)$ tel que

$$\int_{F_I} |\exp(-2i\pi\varepsilon_0(\omega x)) - P(x)|\ dm(x) \leqslant \frac{\delta}{4} ;$$

d'où

$$|\int_{F_I} \exp(-2i\pi\varepsilon_0(xE(y_k)))P(x)\ dm(x)| \geqslant \frac{\delta}{4} \qquad (k \geqslant K) .$$

$P(x)$ est de la forme

$$P(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \exp(2i\pi\varepsilon_0(xr_j)) \qquad (a_j \in C\ ,\ \ r_j \in e_I\ Z[I])$$

(a_j , r_j , N dépendent uniquement de ω et de δ). On a donc

$$|\sum_{j=1}^{N} a_j \int_{F_I} \exp(2i\pi\varepsilon_0(x(e_I\ E(y_k) + r_j))\ dm(x)| \geqslant \frac{\delta}{4} \qquad (k \geqslant K) .$$

Quand $k \to +\infty$, $e_I\ E(y_k) \to \infty$ dans $e_I\ Z[I]$. D'où, pour tout $j = 1 , \ldots , N$,

$$e_I\ E(y_k) + r_j \to \infty \qquad \text{dans } e_I\ Z[I] .$$

Il en résulte, d'après l'hypothèse du lemme,

$$\hat{m}(e_I\ E(y_k) + r_j) \to 0 \qquad \text{quand } k \to +\infty ,$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité ci-dessus. Le lemme est donc démontré.

3.3. - Comme conséquence des propositions 2 et 3, on a :

THÉORÈME 2. - Soient $\xi \in V_I(Q)$ défini comme dans 2.1, E_ξ et $E_\xi^\sim$ définis comme dans 2.1 et 2.4. On note $\frac{1}{\xi} = \theta$.

On suppose qu'il n'existe pas de sous-ensemble (non vide) J de I tel que θ_J appartienne à S_J^0 , que le polynôme minimal de θ_J soit irréductible, et que l'on ait

$$\prod_{p \in J} |\theta|_p > 2 .$$

Alors, $E_\xi^\sim$ est ensemble de multiplicité au sens strict du groupe abélien compact F_I^+ .

En effet, si les conditions du théorème sont réalisées, $E_\xi^\sim$ porte une mesure (la mesure $\mu^\sim$) dont la transformée de Fourier tend vers zéro à l'infini de $\hat{F}_I^+$, comme le montrent les propositions 2 et 3.

Remarque. - Comme cas particulier du théorème 1, on retrouve le fait que, si $I = \{0\}$, $\theta_0 = 2$, ou, si $I = \{2\}$, $|\theta|_2 = 2$; alors $E_\xi^\sim$ est ensemble M . Dans chacun de ces cas, on a vu (2.1) que $E_\xi^\sim = F_I$. $E_\xi^\sim$ a donc une mesure de Haar positive, et par suite (1.2) est ensemble M .

Des propositions 2 et 3 résulte également la conséquence suivante :

COROLLAIRE. - S'il existe un sous-ensemble non vide J de I tel que θ_J appartienne à S_J^0 , que le polynôme minimal de θ_J soit irréductible, et que l'on ait

$$\prod_{p \in J} |\theta|_p > 2 ,$$

alors $\hat{\mu}^\sim(\gamma) \not\to 0$ quand $\gamma \to \infty$ dans $\hat{F}_I^+$.

Cette propriété ne permet évidemment pas de conclure que $E_\xi^\sim$ est ensemble U quand les hypothèses de ce corollaire sont vérifiées. On montrera cependant (paragraphe 4) qu'il en est bien ainsi.

4. Ensembles $E_\xi^\sim$ et ensembles U .

4.1. - La méthode employée pour trouver les ensembles $E_\xi^\sim$ qui sont des ensembles U consiste à montrer que, pour ξ bien choisi, $E_\xi^\sim$ est un ensemble de Pjateckij-Šapiro du groupe F_I^+ , et à utiliser le théorème 1 (1.5).

De manière précise, on a :

PROPOSITION 4. - Soient $\xi \in V_I(Q)$ défini comme dans 1.1, $E_\xi^\sim$ défini comme dans 2.4. On note $\frac{1}{\xi} = \theta$.

Supposons qu'il existe un sous-ensemble non vide J de I tel que θ_J appartienne à S_J^0, que le polynôme minimal de θ_J soit irréductible et de degré s, et que l'on ait

$$\prod_{p \in J} |\theta|_p > 2 .$$

Alors, $E_{\xi}^{\sim}$ est un ensemble de type $H^{(s)}$ du groupe abélien compact F_I^+.

La démonstration de ce résultat sera donnée dans le paragraphe suivant.

Comme conséquence du théorème 1 et de la proposition 4, on a :

THÉORÈME 3. - ξ est un élément de $V_I(Q)$ défini comme dans 1.1, $E_{\xi}^{\sim}$ est défini comme dans 2.4. On note $\frac{1}{\xi} = \theta$.

S'il existe un sous-ensemble non vide J de I tel que $\theta_J \in S_J^0$, ait un polynôme minimal irréductible, et vérifie $\prod_{p \in J} |\theta|_p > 2$, alors $E_{\xi}^{\sim}$ est ensemble d'unicité du groupe F_I^+.

On a donc aussi la réponse à la question posée à la suite du corollaire du paragraphe 3.3. Les théorèmes 2 et 3 montrent que tout ensemble $E_{\xi}^{\sim}$ est de "nature" connue, ce qu'on peut exprimer par le théorème suivant, qui généralise le théorème classique rappelé au début de (c).

THÉORÈME 4. - ξ, $E_{\xi}^{\sim}$ sont définis comme dans 1.1 et 2.4. On note $\frac{1}{\xi} = \theta$.

$E_{\xi}^{\sim}$ est ensemble d'unicité du groupe F_I^+ si, et seulement si, il existe un sous-ensemble non vide J de I tel que $\theta_J \in S_J^0$, ait un polynôme minimal irréductible, et vérifie $\prod_{p \in J} |\theta|_p > 2$.

4.2. Démonstration de la proposition 4.

Dans une première partie (5.2.1), on cherchera une suite $\{(y_k^{(i)})_{i=1,..,s}\}$ $(k \in N')$ de $V_I(Q)^s$, tendant vers l'infini, telle que, quel que soit $k \in N'$, l'ensemble des éléments de T^s,

$$((\exp(2i\pi\varepsilon_0(xy_k^{(i)})))_{i=1,..,s}) \qquad \text{avec} \quad x \in E_{\xi} ,$$

soit disjoint d'un ouvert Δ non vide.

Ceci équivaut à la condition : $((\varepsilon_0(xy_k^{(i)}))_{i=1,..,s})$ n'appartient pas à un ouvert Ω non vide de $(R/Z)^s$ quels que soient $k \in N'$ et $x \in E_{\xi}$, l'ouvert Ω se déduisant de l'ouvert Δ.

On montrera qu'il est possible de trouver une suite vérifiant ces conditions, et de la forme

$$y_k^{(1)} = \lambda\theta_J^k \ , \ \dots \ , \ y_k^{(s)} = \lambda\theta_J^{k+s-1} \ ,$$

où λ appartient, dans $V_J(Q)$, à l'anneau d'éléments algébriques $Q_J[\theta_J]$.

Dans la deuxième partie de la démonstration (5.2.2), on déduira de la suite $\{(y_k^{(i)})_{i=1,2,..,s}\}$ une suite $\{(\gamma_k^{(i)})_{i=1,2,..,s}\}$ formant une suite normale dans $\hat{F}_I^+$ et telle que, quel que soit $k \in N'$, l'ensemble des éléments de T^s,

$$((x \ , \ \gamma_k^{(i)})_{i=1,..,s}) \qquad \text{avec} \quad x \in E_{\xi}^{\sim} \ ,$$

soit disjoint d'un ouvert non vide Δ' de T^s.

4.2.1. - Soit λ un élément de $Q_J[\theta_J]$; $Pm(\theta_J ; x)$ étant irréductible, $Q_J[\theta_J]$ est un corps ([2]), donc $Pm(\lambda ; x)$ est irréductible.

On pose :

$$|\theta|_p = p^{t_p} \qquad (p \in I^- \ , \ t_p \geq 1) \ .$$

On s'impose, pour tout $p \in J^-$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\lambda|_p \leq p^{ht_p} \quad (h \geq 1) \qquad |\lambda_p^{(i)}|_p \leq 1 \quad (i = 2 \ , \ \dots \ , \ s) \\ \text{et} \\ (\prod_{p \in J^-} p^{ht_p})\lambda \ , \ \text{élément entier algébrique} \ . \end{array} \right.$$

Soit $x \in E_{\xi}$. On a

$$\varepsilon_0(\lambda\theta_J^k \, x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_0(\delta_n \, \lambda\theta_J^k(e_J - \xi_J)\xi_J^n) \mod 1 \ ,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(\delta_n \lambda(e_J - \xi_J)\theta_J^{k-n}) &\equiv \delta_n \lambda_0(1 - \xi_0)\theta_0^{k-n} - \delta_n E(\lambda(e_J - \xi_J)\theta_J^{k-n}) \mod 1 \quad \text{si} \quad 0 \in J \\ &\equiv - \delta_n E(\lambda(e_J - \xi_J)\theta_J^{k-n}) \qquad \text{si} \quad 0 \notin J \ ; \end{aligned}$$

comme $|\lambda(e_J - \xi_J)\theta_J^{k-n}|_p \leq p^{(h+k-n)t_p}$, $(p \in J^-)$; d'où, si $n \geq h + k$,

$$E(\lambda(e_J - \xi_J) \, \theta_J^{k-n}) \equiv 0 \mod 1 \ .$$

On a donc

$$(2) \qquad \varepsilon_0(\lambda\theta_J^k \, x) \equiv P_k + Q_k + R_k \mod 1 \ ,$$

avec

$$P_k(x) = \varepsilon_0(\lambda(e_J - \xi_J)(\delta_0\ \theta_J^k + \dots + \delta_{k-1}\ \theta_J))\ ,$$

$$Q_k(x) = \varepsilon_0(\lambda(e_J - \xi_J)(\delta_k + \delta_{k+1}\ \xi_J + \dots + \delta_{k+h-1}\ \xi_J^{h-1}))\ ,$$

$$R_k(x) = 0 \qquad (\text{si} \quad 0 \notin J)\ ,$$

$$R_k(x) = \lambda_0(1 - \xi_0)\xi_0^h(\delta_{k+h} + \dots + \delta_{k+h+j}\ \xi_0^j + \dots) \qquad (\text{si} \quad 0 \in J)\ .$$

Si h est fixé, quel que soit k, $Q_k(x)$ n'a que 2^h valeurs possibles. $R_k(x)$ est majoré en valeur absolue par

$$(3) \qquad |R_k(x)| \leqslant |\lambda_0^{(1)}|\,\rho^h \qquad \text{où} \quad 0 \leqslant \rho < 1$$

($\rho = 0$ si $0 \notin J$, et $\rho = \xi_0$ si $0 \in J$).

Pour évaluer P_k, on fait intervenir les racines $\theta_p^{(i)}$ de $Pm(\theta_J\ ;\ x)$ dans Ω_p et $\lambda_p^{(i)}$ de $Pm(\lambda\ ;\ x)$ dans Ω_p. La remarque essentielle est la suivante :

$$u_m = \sum_{i=1}^{s} (1 - \xi_p^{(i)})\ \lambda_p^{(i)}\ {\theta_p^{(i)}}^m$$

est un rationnel indépendant de p ; il appartient à l'anneau $Z[J^-]$. Si $p \in J^-$,

$$|u_n - \lambda(e_J - \xi_J)\ \theta_J^m|_p = \Big|\sum_{i=2}^{s} (1 - \xi_p^{(i)})\ \lambda_p^{(i)}\ {\theta_p^{(i)}}^m\Big|_p \leqslant 1\ ;$$

on en déduit

$$u_m \equiv E(\lambda(e_J - \xi_J)\ \theta_J^m) \mod 1\ ,$$

d'où

$$\varepsilon_0(\lambda(e_J - \xi_J)\ \theta_J^m) \equiv -\sum_{i=2}^{s} \lambda_0^{(i)}(1 - \xi_0^{(i)})\ {\theta_0^{(i)}}^m \mod 1 \qquad \text{si} \quad 0 \in J\ ,$$

$$\equiv -\sum_{i=1}^{s} \lambda_0^{(i)}(1 - \xi_0^{(i)})\ {\theta_0^{(i)}}^m \mod 1 \qquad \text{si} \quad 0 \notin J\ ;$$

on en déduit

$$P_k(x) \equiv -\sum_{i=2}^{s} \lambda_0^{(i)}(1 - \xi_0^{(i)})(\delta_0\ {\theta_0^{(i)}}^k + \dots + \delta_{k-1}\ \theta_0^{(i)}) \mod 1 \qquad \text{si} \quad 0 \in J\ ,$$

$$\equiv -\sum_{i=1}^{s} \lambda_0^{(i)}(1 - \xi_0^{(i)})(\delta_0\ {\theta_0^{(i)}}^k + \dots + \delta_{k-1}\ \theta_0^{(i)}) \mod 1 \qquad \text{si} \quad 0 \notin J\ ,$$

d'où, comme $|\theta_0^{(i)}|_0 < 1$ par hypothèse ($\theta_J \in S_J^0$),

$$|((P_k))| \leqslant \sum_{i=2}^{s} |\lambda_0^{(i)}|_0 \frac{1 + |\theta_0^{(i)}|_0}{1 - |\theta_0^{(i)}|_0} \qquad \text{si} \quad 0 \in J \ ,$$

$$|((P_k))| \leqslant \sum_{i=1}^{s} |\lambda_0^{(i)}|_0 \frac{1 + |\theta_0^{(i)}|_0}{1 - |\theta_0^{(i)}|_0} \qquad \text{si} \quad 0 \notin J \ .$$

Supposons que λ et θ vérifient la condition

(4) $$|\lambda_0^{(i)}|_0 < \frac{1 - |\theta_0^{(i)}|_0}{1 + |\theta_0^{(i)}|_0} \frac{\sigma}{s.2^{h/s}} \qquad (\sigma \text{ réel} > 0) \ ;$$

cela entraîne

$$|((P_k))| < \frac{s-1}{s} \frac{\sigma}{2^{h/s}} \qquad \text{si} \quad 0 \in J \ ,$$

$$|((P_k))| < \frac{\sigma}{2^{h/s}} \qquad \text{si} \quad 0 \notin J \ .$$

Supposons d'autre part que h vérifie

(5) $$|\lambda_0^{(1)}| \ |\xi_0|^h < \frac{1}{s} \frac{\sigma}{2^{h/s}} \qquad \text{si} \quad 0 \in J \ ;$$

cela entraîne

$$|R_k| < \frac{1}{s} \frac{\sigma}{2^{h/s}} \qquad \text{(d'après (3))} \ .$$

Si (4) et (5) sont vérifiées, on aura

(6) $$|((P_k + R_k))| < \frac{\sigma}{2^{h/s}} \ .$$

Désignons par $M_k(x)$ et par $O_k(x)$ les éléments suivants de $(R/Z)^s$:

$$M_k(x) = (\varepsilon_0(\lambda\theta_J^k \, x) \ , \ \dots \ , \ \varepsilon_0(\lambda\theta_J^{k+s-1} \, x)) \ ,$$

$$O_k(x) = (Q_k(x) \ , \ \dots \ , \ Q_{k+s-1}(x)) \ .$$

En revenant à la définition de $Q_k(x)$, on voit que $O_k(x)$ a exactement 2^{h+s-1} valeurs possibles pour $x \in E_\xi$. Comme $M_k(x)$ appartient au "cube" de $(R/Z)^s$ de centre $O_k(x)$ et de côté $2 \sup_{0\leqslant i\leqslant s-1} |((P_{k+i} + Q_{k+i}))|$, qui est majoré par $\frac{2\sigma}{2^{h/s}}$ (d'après (6)), tout $M_k(x)$ $(x \in E_\xi)$ appartient donc à la réunion de ces 2^{h+s-1} "cubes" dont le volume total est majoré par

$$2^{h+s-1} \frac{2^s \sigma^s}{2^h} = \frac{1}{2}(4\sigma)^s .$$

Si l'on peut choisir $\sigma = \frac{1}{4}$ par exemple, ce volume sera $\leqslant \frac{1}{2}$: $(R/Z)^s$ contiendra donc un ouvert Ω sans point $M_k(x)$.

Il faut donc démontrer qu'il existe un entier $h \geqslant 1$ et un élément λ du corps $Q_J[\theta_J]$ tel que les conditions (1) , (4) , et (5) soient vérifiées avec $\sigma = \frac{1}{4}$.

On pose

$$\alpha = (\prod_{p\in J^-} p^{ht_p})\lambda .$$

Soit ω un entier algébrique de $Q_J[\theta_J]$ engendrant le corps. On est ramené à la recherche d'un élément entier algébrique α de $Q_J[\theta_J]$, c'est-à-dire donné par

$$\alpha = x_0 e_J + x_1 \omega + \dots + x_s \omega^{s-1} ,$$

où $(x_0 , \dots , x_s) \neq (0 , \dots , 0)$ dans Z^s , vérifiant les conditions suivantes:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} |\alpha|_p \leqslant 1 & (p \in J^-) , \\ |\alpha_p^{(i)}|_p \leqslant p^{-ht_p} & (p \in J^- , \ 2 \leqslant i \leqslant s) , \\ |\alpha_0^{(i)}|_0 \leqslant \dfrac{1 - |\theta_0^{(i)}|_0}{1 + |\theta_0^{(i)}|_0} (\prod_{p\in J} p^{ht_p}) \dfrac{1}{s.2^{(h/s)+2}} & \\ \qquad (2 \leqslant i \leqslant s \ \text{si} \ 0 \notin J , \ 1 \leqslant i \leqslant s \ \text{si} \ 0 \in J) , & \\ |\alpha|_0 \leqslant (\prod_{p\in J} p^{ht_p}) \, \theta_0^h \dfrac{1}{s.2^{(h/s)+2}} & \text{si} \ 0 \in J . \end{array} \right.$$

Le système (7) est un système d'inéquations portant sur des valeurs absolues p-adiques de formes linéaires en $x_0 , \dots , x_{s-1}$, à coefficients dans Ω_p . A tout $p \in J$ correspondent s formes linéaires. Soit Δ_p leur déterminant (Δ_p ne dépend que de ω et de p).

D'après un "théorème de Minkowski" (voir [2], lemme 3), il existe un élément

$(x_0 , \dots , x_{s-1})$ de $Z^s \neq (0 , \dots , 0)$ et satisfaisant aux conditions (7), si l'on a la relation :

$$(\prod_{p\in J^-} p^{-t_p})^{(s-1)h} \prod_{i=1} \Big(\frac{1-|\theta_0^{(i)}|_0}{1+|\theta_0^{(i)}|_0} (\prod_{p\in J^-} p^{t_p})^h \frac{1}{s.2^{(h/s)+2}}\Big) \geqslant \prod_{p\in J} \Delta_p \quad \text{si } 0\notin J$$

$$(\prod_{p\in J^-} p^{-t_p})^{(s-1)h} \prod_{i=2}^{s} \Big(\frac{1-|\theta_0^{(i)}|_0}{1+|\theta_0^{(i)}|_0} (\prod_{p\in J^-} p^{t_p})^h \frac{1}{s\,2^{(h/s)+2}}\Big) (\prod_{p\in J} p^{t_p})^h \frac{\theta_0^h}{s\,2^{(h/s)+2}}$$

$$\geqslant \prod_{p\in J} \Delta_p \quad \text{si } 0\in J .$$

Comme $|\theta|_p = p^{t_p}$ $(p \in I)$, ceci s'écrit dans les 2 cas :

$$(8) \qquad (\prod_{p\in J} |\theta|_p)^h \, 2^{-h} \geqslant K ,$$

où K est une constante ne dépendant que de ω et de θ . (8) est vérifiée pour h assez grand si $\prod_{p\in J} |\theta|_p > 2$. Ceci achève la première partie de la démonstration.

4.2.2. - On a trouvé une suite

$$((y_k^{(i)})_{i=1,..,s}) \quad \text{de} \quad V_I(Q)^s \qquad (y_k^{(i)} = \lambda\theta_J^{k+i-1}) ,$$

telle qu'il existe un ouvert non vide Ω de $(R/Z)^s$ qui ne contient aucun des éléments

$$M_k(x) = ((\varepsilon_0(y_k^{(i)}\, x))_{i=1,..,s}) \qquad \text{quels que soient } k \in N' \text{ et } x \in E_\xi .$$

On se propose d'en déduire une suite $((\gamma_k^{(i)})_{i=1,..,s})$ normale dans $\hat{F}_I^+$, telle qu'il existe un ouvert non vide Δ' de T^s , qui ne contienne aucun élément $((x , \gamma_k^{(i)})_{i=1,..,s})$ quels que soient $k \in N'$ et $x \in E_{\tilde{\xi}}$. On désigne par Δ l'ouvert non vide de T^s tel que $((\exp(2i\pi\varepsilon_0(y_k^{(i)}\, x)))_{i=1,..,s})$ n'appartienne pas à Δ , quels que soient $k \in N'$ et $x \in E_\xi$ (Δ se déduit de Ω).

Posons

$$\gamma_k^{(i)} = \sigma(e_I.E(y_k^{(i)})) .$$

Comme $e_I.E(y_k^{(i)})$ appartient à $e_J\, Z[I]$, l'application σ est bien définie en $e_I.E(y_k^{(i)})$.

Pour tout $x \in F_I$, on a

$$(x\ ,\ \gamma_k^{(i)}) = \exp(2i\pi\varepsilon_0(xE(y_k^{(i)})))\ ;$$

or, pour tout $y \in V_I(Q)$, et tout $x \in F_I$,

$$\varepsilon_0(xE(y)) = \varepsilon_0(xy - x\varepsilon_I(y)) \equiv \varepsilon_0(xy) - \varepsilon_0(x\varepsilon_I(y)) \mod 1$$

$$\equiv \varepsilon_0(xy) - x_0\ \varepsilon_0(y) \mod 1\ ;$$

on a donc

$$(x\ ,\ \gamma_k^{(i)}) = \exp(2i\pi(\varepsilon_0(xy_k^{(i)}) - x_0\ \varepsilon_0(y_k^{(i)})))\ ,$$

d'où

$$|(x\ ,\ \gamma_k^{(i)}) - \exp(2i\pi\varepsilon_0(xy_k^{(i)}))| \leqslant 2\pi|((x_0\ \varepsilon_0(y_k^{(i)})))| \leqslant 2\pi|((\varepsilon_0(y_k^{(i)})))|\ ;$$

comme $\theta_J \in S_J^0$, et comme λ est élément de $Q_J[\theta_J]$ tel que : $|\lambda_p^{(i)}|_p \leqslant 1$ pour tout $p \in J^-$ $(2 \leqslant i \leqslant s)$ et $(\prod_{p\in J^-} p^{ht_p})\lambda$ entier algébrique, on a

$$((\varepsilon_0(\lambda\theta_J^n))) < \gamma\rho^n \qquad \text{(voir [1])}$$

où γ , ρ réels > 0 et $\rho < 1$. Ceci entraîne

$$|\exp(2i\pi\varepsilon_0(xE(y_k^{(i)}))) - \exp(2i\pi\varepsilon_0(xy_k^{(i)}))| < 2\pi\gamma\rho^k\ ,$$

pour tout $k \in N'$, $x \in E_\xi$. On peut trouver un ouvert non vide Δ' de T^s tel que $\overline{\Delta'} \subset \Delta$. $((\exp(2i\pi\varepsilon_0(xy_k^{(i)})))_{i=1,..,s})$ n'appartient pas à Δ , quels que soient $k \in N'$, $x \in E_\xi$. Par suite, pour $k \geqslant K$ (où K ne dépend que de γ , ρ et Δ'),

$$((\exp(2i\pi\varepsilon_0(xE(y_k^{(i)})))_{i=1,..,s})) = ((x\ ,\ \gamma_k^{(i)})_{i=1,..,s})$$

n'appartient pas à Δ' , quels que soient $k \in N'$, $k \geqslant K$, et $x \in E_{\tilde{\xi}}$. On a donc le résultat cherché, en numérotant la suite $\{k\}$ à partir de K .

Il reste à montrer que la suite $((\gamma_k^{(i)})_{i=1,..,s})$ est normale dans $\hat{F}_I^+$. Soit $(n_1\ ,\ \dots\ ,\ n_s)$ un élément de $Z^s \neq (0\ ,\ \dots\ ,\ 0)$. On a

$$e_J(n_1 E(y_k^{(1)}) + \dots + n_s E(y_k^{(s)})) = e_J(n_1 E(\lambda\theta_J^k) + \dots + n_s E(\lambda\theta_J^{k+s-1}))$$

$$= \lambda\theta_J^k(n_1 e_J + \dots + n_s\ \theta_J^{s-1}) + n_1\,\varepsilon_J(\lambda\theta_J^k) + \dots + n_s\varepsilon_J(\lambda\theta_J^{k+s-1})$$

d'où

$$\|e_J(n_1 E(y_k^{(1)}) + \dots + n_s E(y_k^{(s)})) - (\lambda\theta_J^k(n_1 e_J + \dots + n_s \theta_J^{s-1}))\| \leqslant \|n_1\| + \dots + \|n_s\| .$$

Or, $\lambda(n_1 e_J + \dots + n_s \theta_J^{s-1}) \neq 0$, car le polynôme minimal de θ_J étant irréductible, quel que soit $p \in J$; $n_1 + \dots + n_s \theta_p^{s-1} \neq 0$ et $\lambda_p \neq 0$. Par suite,

$$n_1 E(y_k^{(1)}) + \dots + n_s E(y_k^{(s)}) \to \infty \quad \text{dans } Z[I] \quad \text{quand } k \to \infty ,$$

et donc (2.2.4),

$$n_1 \gamma_k^{(1)} + \dots + n_s \gamma_k^{(s)} \to \infty \quad \text{dans } \hat{F}_I^+ .$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.

4.3. Ensembles E_ξ de Rajchman.

La proposition 4 montre que, si $\theta \in S_J^0$, si $Pm(\theta ; x)$ est irréductible et de degré s , et si $\prod_{p\in J} |\theta|_J > 2$, E_ξ est de type $H^{(s)}$. On peut se demander si E_ξ ne peut être, dans ces conditions, de type $H^{(n)}$ avec $n < s$. La réponse à cette question est affirmative, comme le montrent certains résultats de la théorie classique [5]. D'autres exemples sont donnés par le lemme suivant.

LEMME. - S'il existe un sous-ensemble non vide J de I tel que : $\theta_J \in S_J^0$, ait un polynôme minimal irréductible de degré s , et vérifie $\prod_{p\in J} |\theta|_p > 2^s$, alors $E_\xi^\sim$ est de type H .

La démonstration est analogue à celle de la proposition 4. Dans les inégalités (4) , (5) , (6) , (7), on remplace la quantité $2^{h/s}$ par 2^h . Le "théorème de Minkowski" montre que le système (7) est résoluble dans le cas $\prod_{p\in J} |\theta|_p > 2^s$; on étudie alors la répartition dans R/Z de $M_k(x) = \varepsilon_0(\lambda\theta_J^k x)$ et de $\theta_k(x) = Q_k(x)$, et on montre qu'il existe un ouvert Ω de R/Z libre d'éléments $M_k(x)$ pour tout $k \in N'$, $x \in E_\xi$.

Remarque. - Si $0 \notin J$ et $|N(\theta)|_0^{-1} > 2^s$, on se trouve dans les conditions du lemme, car

$$1 \leqslant |N(\theta)|_0 \prod_{p\in J} |N(\theta)|_p \leqslant |N(\theta)|_0 \prod_{p\in J} |\theta|_p ,$$

donc $E_\xi^\sim$ est de type H .

5. Ensembles E_ξ dans $V_K(Q)$, où K peut être infini.

Dans l'étude ci-dessus (paragraphe 4) concernant les ensembles $E_\xi^\sim$, qui sont ensembles U , l'hypothèse " I est un sous-ensemble fini de P " n'est pas intervenue ; on a seulement utilisé le fait que J , sous-ensemble de I , était fini. D'autre part, on n'a pas utilisé la propriété $|\xi|_p > 0$ pour $p \in I - J$.

Ces remarques, et le théorème 3, amènent aux définitions et au résultat suivants:

Définition. - K est un sous-ensemble non vide, fini ou non, de P . ξ est un élément de $V_K(Q)$ vérifiant

$$0 \leqslant |\xi|_p < 1 \qquad \text{si } p \in K^-$$

et

$$0 \leqslant \xi_0 < 1 \qquad \text{si } 0 \in K .$$

E_ξ est l'ensemble des éléments x de $V_K(Q)$ de la forme :

$$x = (e_K - \xi)(\delta_0\, e_K + \delta_1\, \xi + \dots + \delta_n\, \xi^n + \dots) \qquad (\delta_n = 0 \text{ ou } 1) ,$$

et $E_\xi^\sim$ est l'ensemble du groupe compact F_K^+ qui se déduit de E_ξ par l'application $x \to \varepsilon_K(x)$ de $V_K(Q)$ dans F_K^+ .

THÉORÈME 6. - Supposons qu'il existe un sous-ensemble fini non vide J de K tel que $\xi_p \neq 0$ si $p \in J$, et si l'on pose $\frac{1}{\xi_J} = \theta_J$, θ_J appartient à S_J^0 , le polynôme minimal de θ_J est irréductible, et $\prod_{p\in J} |\theta|_p > 2$. Alors $E_\xi^\sim$ est ensemble U du groupe F_K^+ .

Ce résultat donne des exemples d'ensembles d'unicité du groupe compact F_K^+ , dual du groupe discret $Z[K]$ si $0 \in K$, et du groupe discret $Z[K]/Z$ si $0 \notin K$. En particulier, pour $K = P$, on obtient ainsi des ensembles U du groupe F_P^+ , dual du groupe discret Q .

Par contre, la méthode employée (paragraphe 3) pour l'étude des ensembles E_ξ , qui sont des ensembles M , ne s'applique pas au cas où I serait un ensemble K infini. On peut définir de manière analogue une mesure μ portée par E_ξ , sa transformée de Fourier $\hat{\mu}(y)$ est donnée par la même expression (paragraphe 2.3), mais si l'on a une suite y_k tendant vers l'infini, dans $V_K(Q)$, l'ensemble I' des p tels que $|y_k|_p \to \infty$ n'est pas nécessairement un ensemble fini et non vide de K comme dans 3.1.1.

La question reste donc posée de savoir quels sont les ensembles $E_\xi^\sim$ de F_K^+ qui sont des ensembles M , lorsque K est un sous-ensemble infini de P .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS (Françoise). - Caractérisation des ensembles S_q par la répartition modulo 1 en p-adique, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 17, 1963/64, n° 11, 20 p.

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Eléments algébriques de l'algèbre $V_E(Q)$, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 5, 1963/64, n° 19, 15 p.

[3] BERTRANDIAS (Françoise). - Théorème de Koksma en p-adique, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 6, 1964/65, n° 3, 16 p.

[4] HEWITT (Edwin) and ROSS (Kenneth A.). - Abstract harmonic analysis, vol. 1. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 115).

[5] KAHANE (J. P.) et SALEM (R.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

[6] RUDIN (Walter). - Fourier analysis on groups. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 12).