

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARC KRASNER

Travaux de P. Le Lidec sur une nouvelle forme des congruences de Kummer-Mirimanoff pour le premier cas du théorème de Fermat

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 1 (1964-1965), exp. n° 5, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_1_A4_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE P. LE LIDEC
SUR UNE NOUVELLE FORME DES CONGRUENCES DE KUMMER-MIRIMANOFF
POUR LE PREMIER CAS DU THÉORÈME DE FERMAT

par Marc KRASNER

1. Soient p un nombre premier impair, et (a, b, c) une solution de l'équation de Fermat

$$(F) \quad x^p + y^p + z^p = 0 \quad ,$$

telle que $abc \not\equiv 0 \pmod{p}$. MIRIMANOFF a déduit des congruences de Kummer les congruences suivantes :

$$(M) \quad \begin{aligned} f_i(t) f_{p-i}(t) &\equiv 0 \pmod{p} & (i = 3, 5, \dots, p-2) \\ f_{p-1}(t) &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

où

$$f_i(x) = \sum_{s=1}^{p-1} s^{i-1} x^{p-s} \quad \text{et} \quad t \equiv -\frac{b}{a} \pmod{p} \quad .$$

P. LE LIDEC a déduit de ces congruences d'autres congruences, équivalentes pour de tels t , et ayant une forme remarquable. Comme il s'agit, au fond, d'un calcul de polynômes dans le corps Ω_p de p éléments, nous n'écrirons, sauf à la fin, aucune congruence \pmod{p} , et les polynômes qu'on considèrera seront supposés appartenant à $\Omega_p[x]$. Mais, pour les besoins de la cause, nous munirons Ω_p de certaines autres structures et adopterons certains abus d'écriture. Premièrement, Ω_p sera considéré de la manière habituelle comme un \mathbb{Z} -module, où \mathbb{Z} est l'anneau des entiers rationnels. Quand on écrira un entier rationnel n , ce signe, par abus d'écriture, signifiera le produit par n de l'unité I de Ω_p , $n.I = I + I + \dots + I$ (n fois), tandis que, dans de rares cas où on en a besoin, l'entier rationnel n sera noté n^* . D'autre part, Ω_p sera considéré comme l'anneau quotient $\mathbb{Z}/(p)$ de \mathbb{Z} par son idéal (p) , et n désignera également la classe \pmod{p} de l'entier qu'il note normalement, ce second abus d'écriture n'entrant pas en conflit avec le premier. Enfin, Ω_p sera totalement ordonné par l'ordre des plus petits restes non-négatifs de ses éléments, considérés comme classes \pmod{p} dans \mathbb{Z} .

2. On a, visiblement, la formule de récurrence $f_{i+1}(x) = xf'_i(x)$ où $f'(x)$ désigne la dérivée de $f(x)$, et d'autre part, si $1 < i < p$,

$$f_i(1) = \sum_{s=1}^{p-1} s^{i-1} = \sum_{s=0}^{p-1} s^{i-1} = 0,$$

tandis que

$$f_p(1) = \sum_{s=1}^{p-1} s^{p-1} = p-1 \neq 0.$$

Par suite, si $2 \leq i \leq p-1$ et si $f_{i+1}(x)$ est d'ordre j par rapport à $x-1$ dans $\Omega_p[x]$, $f_i(x)$ est d'ordre $j+1$. Il en résulte que l'ordre de $f_i(x)$ ($2 \leq i \leq p-1$) en $x-1$ dans $\Omega_p[x]$ est $p-i$. Posons

$$g_i(x) = f_i(x)/(x-1)^{p-i} = \sum_{q=1}^{i-1} a_q^{(i)} x^{i-q}.$$

3. Calculons d'abord $g_{p-1}(x)$. Pour simplifier l'écriture, notons \bar{q} l'inverse (dans Ω_p) d'un $q \in \Omega_p$ non nul. On a

$$f_{p-1}(x) = \sum_{q=1}^{p-1} \bar{q} x^{p-q},$$

donc

$$g_{p-1}(x)(x-1) = \left(\sum_{s=1}^{p-2} a_s^{(p-1)} x^{p-1-s} \right) (x-1) = \sum_{q=1}^{p-1} \bar{q} x^{p-q},$$

ce qui donne $a_1^{(p-1)} = \bar{1} = 1$ et $a_q^{(p-1)} - a_{q-1}^{(p-1)} = \bar{q}$ ($2 \leq q \leq p-1$), d'où résulte $a_s^{(p-1)} = \sum_{q=1}^s \bar{q}$, et, en particulier,

$$a_{p-2}^{(p-1)} = \sum_{q=1}^{p-2} \bar{q} = -(\overline{p-1}) = -(\overline{-1}) = 1.$$

Donc, on a

$$g_{p-1}(x) = \sum_{s=1}^{p-2} \left(\sum_{q=1}^s \bar{q} \right) x^{p-1-s}.$$

4. Calculons maintenant, pour $i = 2, 3, \dots, p-2$,

$$g_i(x) g_{p-i}(x) = f_i(x) f_{p-i}(x)/(x-1)^p = f_i(x) f_{p-i}(x)/(x^p - 1).$$

On a, puisque $q^{(p-i)-1} = (q^{p-1})(q^{-i}) = \bar{q}^i$,

$$\begin{aligned} (x^p - 1) g_i(x) g_{p-i}(x) &= f_i(x) f_{p-i}(x) = \left(\sum_{q=1}^{p-1} q^{i-1} x^{p-q} \right) \left(\sum_{q'=1}^{p-1} \bar{q}'^i x^{p-q'} \right) \\ &= \sum_{s=2}^{2p-2} \left(\sum_{q+q'=s} q^{i-1} \bar{q}'^i \right) x^{2p-s}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$g_i(x) g_{p-i}(x) = \sum_{s=2}^{p-2} \left(\sum_{q=1}^{s-1} \bar{q}^i (s-q)^{i-1} \right) x^{p-s}.$$

5. n étant un entier tel que $1 \leq n \leq p-2$, posons

$$Q_n(x) = \sum_{s=2}^{p-2} u_s x^{p-s} = \sum_{i=2}^{p-2} n^i g_i(x) g_{p-i}(x),$$

d'où

$$u_s = \sum_{i=2}^{p-2} n^i \left(\sum_{q=1}^{s-1} \bar{q}^i (s-q)^{i-1} \right) = \sum_{q=1}^{s-1} \left(\sum_{i=2}^{p-2} n^i \bar{q}^i (s-q)^{i-1} \right) = \sum_{q=1}^{s-1} r_{s,q},$$

où

$$r_{s,q} = \frac{1}{s-q} \sum_{i=2}^{p-2} [n\bar{q}(s-q)]^i = \frac{1}{s-q} \left[\frac{[n\bar{q}(s-q)]^{p-1} - 1}{n\bar{q}(s-q) - 1} - n\bar{q}(s-q) - 1 \right]$$

ou $(p-3) \frac{1}{s-q} = \frac{-3}{s-q}$ selon que $n\bar{q}(s-q) \neq 1$ ou $= 1$.

Or, $[n\bar{q}(s-q)]^{p-1} = 1$, donc, si $n\bar{q}(s-q) \neq 1$, on a

$$r_{s,q} = \frac{-1}{s-q} [n\bar{q}(s-q) + 1] = -(\overline{s-q} + n\bar{q}),$$

et si $n\bar{q}(s-q) = 1$, on a $\overline{s-q} = n\bar{q}$, d'où résulte

$$r_{s,q} = \frac{-3}{s-q} = -(\overline{s-q} + n\bar{q} + n\bar{q}).$$

Posons

$$u'_s = - \sum_{q=1}^{s-1} (\overline{s-q} + n\bar{q}) \quad \text{et} \quad u''_s = \sum_{\substack{1 \leq q \leq s-1 \\ n\bar{q}(s-q)=1}} n\bar{q}.$$

6. On a $\sum_{q=1}^{s-1} \bar{q} = \sum_{q=1}^{s-1} \frac{1}{s-q} = a_{s-1}^{(p-1)}$, donc

$$u'_s = - \sum_{q=1}^{s-1} (\overline{s-q} + n\bar{q}) = - (n+1) a_{s-1}^{(p-1)} .$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^{p-2} u'_s x^{p-s} &= - (n+1) \sum_{s=2}^{p-2} a_{s-1}^{(p-1)} x^{p-s} = - (n+1) \sum_{s=1}^{p-3} a_s^{(p-1)} x^{p-1-s} \\ &= - (n+1) [g_{p-1}(x) - a_{p-2}^{(p-1)} x] = - (n+1) [g_{p-1}(x) - x] \\ &= - (n+1) g_{p-1}(x) + (n+1)x . \end{aligned}$$

7. L'égalité $n\bar{q}(s-q) = 1$ équivaut à $n(s-q) = q$, donc à $ns = (n+1)q$. Si, pour un n tel que $1 \leq n \leq p-2$, s et q sont liés par cette égalité, $s=0$ équivaut à $q=0$, et $s=q=0$ est le seul cas quand $s=q$. On a

$$\sum_{s=2}^{p-2} u''_s x^{p-s} = - \sum_{s=2}^{p-2} \left(\sum_{\substack{1 \leq q \leq s \\ ns=(n+1)q}} n\bar{q} \right) x^{p-s} = - \sum_{\substack{2 \leq s \leq p-2 \\ q=(n+1)ns < s}} n\bar{q} x^{p-s} .$$

Or supposons que $n\bar{q}(s-q) = 1$, et regardons ce qui se passe pour les valeurs $s=1$ et $s=p-1$. Si $s=1$, donc $s \neq 0$, on a $q \neq 0$, donc $q \geq 1 = s$; et si $s=p-1$, on a sûrement $q \leq p-1 = s$, et puisque $s \neq 0$, on a $s \neq q$.

D'autre part, pour $s=p-1$, on a $q = \overline{(n+1)ns} = -n\overline{(n+1)}$, d'où

$$n\bar{q} = n[-\bar{n}(n+1)] = - (n+1) .$$

Donc on a

$$\sum_{s=2}^{p-2} u''_s x^{p-s} + (n+1)x = - \sum_{\substack{1 \leq q \leq s \leq p-1 \\ ns=(n+1)q}} n\bar{q} x^{p-s} .$$

8. En réunissant les résultats des paragraphes 6 et 7, on obtient

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \sum_{s=2}^{p-2} u'_s x^{p-s} + \sum_{s=2}^{p-2} u''_s x^{p-s} = - (n+1) g_{p-1}(x) + (n+1)x + \sum_{s=2}^{p-2} u''_s x^{p-s} \\ &= - (n+1) g_{p-1}(x) - \sum_{\substack{1 \leq q \leq s \leq p-1 \\ ns=(n+1)q}} n\bar{q} x^{p-s} \\ &= - (n+1) [g_{p-1}(x) - \sum_{\substack{1 \leq q \leq s \leq p-1 \\ ns=(n+1)q}} \bar{s} x^{p-s}] , \end{aligned}$$

car $n\bar{q} = (n+1)\bar{s}$ si $n\bar{q}(s-q) = 1$. Donc, si l'on pose

$$P_n(x) = \sum_{\substack{1 \leq s \leq p-1 \\ (n+1)ns < s}} \bar{s}x^{p-1-s},$$

on a

$$Q_n(x) = -(n+1)[g_{p-1}(x) + xP_n(x)] \quad \text{et} \quad xP_n(x) = -\overline{(n+1)} Q_n(x) - g_{p-1}(x).$$

9. Les polynômes $P_n(x)$ sont les sommes de certains termes du polynôme fixe $f_{p-1}(x)$, d'une manière plus précise, d'une certaine moitié de ses termes, qui dépend de l'indice n . Ceci est très curieux, et ouvre peut-être la possibilité d'appliquer à la théorie des congruences de Kummer les méthodes du type combinatoire.

Soit S_n l'ensemble des exposants s tels que $\bar{s}x^{p-s}$ soit un terme de $P_n(x)$, et soit T_n le complémentaire de S_n dans $\{1, 2, \dots, p-1\}$. Montrons que $T_n = -S_n$, ce qui montrera que S_n a $(p-1)/2$ éléments. En effet, soit $s' = -s$. Alors on a $q' = \overline{(n+1)}ns' = -\overline{(n+1)}ns = -q$ et $s < q$ équivaut à $s' > q'$, autrement dit, $s \in S_n \iff s' \in T_n$ et $T_n = -S_n$.

10. Les $P_n(x)$ ne sont pas tous distincts, car $P_{\bar{n}}(x) = P_n(x)$. En effet, considérons un $s \neq 0$, et soient

$$q = \overline{(n+1)}ns \quad \text{et} \quad q' = \overline{(\bar{n}+1)}ns = \overline{(\bar{n}\bar{n}+n)}(\bar{n}\bar{n})s = \overline{(n+1)}s = \bar{n}q.$$

On a $s = (n+1)\bar{n}q = q + q'$. Soient s^* , q^* , q'^* les plus petits restes positifs (mod p) des s , q , q' considérés comme éléments de $\mathbb{Z}/(p)$. On a

$$s^* = q^* + q'^* \quad \text{ou} \quad s^* = q^* + q'^* - p \quad \text{selon que} \quad q < s \quad \text{ou} \quad q > s.$$

Or, dans le premier cas, $q'^* = s - q^* < s$, d'où $q' < s$; et dans le second cas, on a $q'^* - s^* = p^* - q^* > 0$ et $q' > s$. Ainsi, $q < s$ équivaut à $q' < s$ et $\bar{s}x^{p-1-s}$ est un terme de $P_n(x)$ et de $P_{\bar{n}}(x)$ en même temps, d'où résulte $P_{\bar{n}}(x) = P_n(x)$.

11. Nous avons vu que tout $P_n(x)$ est une combinaison linéaire des

$$g_{p-1}(x)/x = f_{p-1}(x)/x(x-1) \quad \text{et des} \quad Q_n(x)/x,$$

lesquels sont des combinaisons linéaires des

$$g_i(x) g_{p-i}(x) = f_i(x) f_{p-i}(x)/x(x-1)^p.$$

Vice versa, les $Q_n(x)$ sont des combinaisons linéaires des

$$g_{p-1}(x) = f_{p-1}(x)/(x-1) \quad \text{et des} \quad xP_n(x) ,$$

tandis que, puisque le vandermondien $|n^i|$ ($n = 2, 3, \dots, p-2$; $i = 2, 3, \dots, p-2$) n'est pas nul, les $g_i(x) g_{p-i}(x) = f_i(x) f_{p-i}(x)/(x-1)^p$ sont des combinaisons linéaires des $Q_n(x)x$. Par suite, tout élément t (distinct de 0 et de 1) de Ω_p ou d'une extension arbitraire de ce corps est en même temps un zéro commun des $f_{p-1}(x)$ et $f_i(x) f_{p-i}(x)$ ($i = 2, 3, \dots, p-2$; on peut se limiter aux indices impairs) et zéro commun des $f_{p-1}(x)$ et $P_n(x)$ ($n = 2, 3, \dots, p-2$; on peut se limiter à un seul indice parmi deux indices inverses dans Ω_p).

12. Donc, si $t \equiv -a/b \pmod{p}$, où (a, b, c) est une solution de l'équation (F) telle que $abc \not\equiv 0 \pmod{p}$, t doit satisfaire aux congruences de Le Lidec

$$(LL) \quad \begin{aligned} P_n(t) &\equiv 0 \pmod{p} & (n = 2, 3, \dots, p-2) \\ f_{p-1}(t) &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned} ,$$

et si t satisfait à ces congruences, il satisfait automatiquement à celles de Mirimanoff.
