Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

JEAN CHAUVINEAU

Équirépartition dans R et dans Z et équirépartition sur Z_p

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 5 (1963-1964), exp. nº 10, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1963-1964__5__A7_0>

ÉQUIRÉPARTITION DANS $\mathbb{R}$ ET DANS $\mathbb{Z}$ ET ÉQUIRÉPARTITION SUR $\mathbb{Z}_p$

par Jean CHAUVINEAU

I. Définitions et critères.

1. Notations.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels ou nul, l'anneau des entiers rationnels, le corps des rationnels, le corps des réels. $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$ désignent respectivement l'ensemble des éléments > 0 de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. I désigne l'intervalle fermé $[0 , 1]$. p dénote un nombre premier ; $\mathbb{Z}_p$ désigne l'anneau des entiers p-adiques.

Si x est un réel, $[x]$ désigne sa partie entière, $\{x\}$ sa partie fractionnaire et $[x]^*$ le plus petit entier rationnel $\geqslant x$, de sorte que

$$[x] \leqslant x < [x] + 1 , \qquad [x]^* - 1 < x \leqslant [x]^* , \qquad [x] + \{x\} = x .$$

Si de plus ω est un réel > 0 , $r_\omega(x)$ désigne le reste (mod ω) de x , défini par

$$x \equiv r_\omega(x) \pmod{\omega} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r_\omega(x) < \omega$$

de sorte que $\{x\} = r_1(x)$. On pose selon l'usage

$$e(x) = e^{2i\pi x} .$$

Les suites étudiées sont toutes des suites numériques réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ ou des suites numériques entières rationnelles $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$; elles seront appelées, par abus de langage, la suite u_n ou la suite entière $\hat{a}_n$. Les suites numériques entières p-adiques $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ seront seulement mentionnées.

2. Définition 1.

Etant donnés une suite u_n , un entier naturel N , un réel $\omega > 0$ et un ensemble $E \subset [0 , \omega)$, le nombre des termes u_n , tels que $r_\omega(u_n) \in E$ et $1 \leqslant n \leqslant N$, est noté $(N , E)_u^{(\omega)}$. Si α , β sont deux réels, tels que $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \omega$, on pose

$$(N\ ,\ (\alpha\ ,\ \beta()_u^{(\omega)} = (N\ ,\ \alpha\ ,\ \beta(_u^{(\omega)}\ .$$

L'indice supérieur (ω) est sous-entendu lorsque $\omega = 1$.

La suite u_n est dite <u>équirépartie</u> (mod ω) [e. r. (mod ω)] dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout couple $(\alpha\ ,\ \beta)$ de réels tels que $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \omega$, on a

(1) $$\lim_{N\to\infty} \frac{(N\ ,\ \alpha\ ,\ \beta(_u^{(\omega)}}{N} = \frac{\beta - \alpha}{\omega}\ .$$

Lorsque, de plus, la suite u_n est répartie sur $(0\ ,\ \omega)$, on dit qu'elle est <u>équirépartie sur</u> $(0\ ,\ \omega)$. Pour que la suite u_n soit e. r. (mod ω) , il faut et il suffit que la suite $u_n + c$, où $c \in \mathbb{R}$, le soit.

3. Critère d'équirépartition (mod ω) dans $\mathbb{R}$, où ω réel > 0 .

3.1. - Soient a , b deux réels tels que $0 \leq a < b \leq 1$, d'où $0 \leq \omega a < \omega b \leq \omega$. Pour que l'on ait $\omega a \leq r_\omega(u_n) < \omega b$, il faut et il suffit que l'on ait

$$a \leqslant \frac{r_\omega(u_n)}{\omega} = \{\frac{u_n}{\omega}\} < b\ ,$$

de sorte que

$$(N\ ,\ \omega a\ ,\ \omega b(_u^{(\omega)} = (N\ ,\ a\ ,\ b(_{u/\omega}$$

Il en résulte que, <u>pour que la suite</u> u_n <u>soit e. r.</u> (mod ω) , <u>il faut et il suffit que la suite</u> $\frac{u_n}{\omega}$ <u>soit e. r.</u> (mod 1) . Dès lors, l'application du 2e critère de Weyl donne le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> ω <u>réel</u> > 0 ; <u>pour que la suite</u> u_n <u>soit e. r.</u> (mod ω) , <u>il faut et il suffit que, pour tout entier</u> $h \in \mathbb{Z}^+$, <u>on ait</u>

(2) $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_1^N e(\frac{h\,u_n}{\omega}) = 0\ .$$

3.2. - Le critère (2) montre aussitôt que si la suite u_n est e. r. (mod ω) , elle est aussi e. r. (mod $\frac{\omega}{k}$) pour tout $k \in \mathbb{Z}^+$.

4. Définition 2.

Soit $E \subset \mathbb{R}^+$. La suite u_n est dite <u>équirépartie</u> (mod E) [e. r. (mod E)] dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, elle est e. r. (mod ω) pour tout $\omega \in E$.

Si la suite u_n est e. r. (mod E) , elle est aussi e. r. (mod E/k) pour tout $k \in \underset{\sim}{Z}^+$. En particulier, si la suite u_n est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) , elle est aussi e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+/k$) pour tout $k \in \underset{\sim}{Z}^+$, donc elle est e. r. (mod $\underset{\sim}{Q}^+$) . On voit ainsi que les notions d'équirépartition (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) et d'équirépartition (mod $\underset{\sim}{Q}^+$) sont équivalentes.

A. AMMANN [1] introduit les suites e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) sous le nom de suites totalement équiréparties.

5. Critères d'équirépartition (mod $\underset{\sim}{R}^+$) , (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) dans $\underset{\sim}{R}$.

5.1. - h étant fixé, quand ω parcourt $\underset{\sim}{R}^+$ [resp. $\underset{\sim}{Q}^+$], $\frac{h}{\omega}$ parcourt aussi $\underset{\sim}{R}^+$ [resp. $\underset{\sim}{Q}^+$] ; dès lors, le critère (2) donne :

THÉORÈME 2. - Pour que la suite u_n soit e. r. (mod $\underset{\sim}{R}^+$) [resp. : (mod $\underset{\sim}{Z}^+$)], il faut et il suffit que, pour tout $\rho \in \underset{\sim}{R}^+$ [resp. : $\rho \in \underset{\sim}{Q}^+$], on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} e(\rho\, u_n) = 0 . \tag{3}$$

5.2. - Le critère (3) montre, par exemple, que la suite λ_n , où λ réel irrationnel, est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) ; mais cette suite n'est pas e. r. (mod $\underset{\sim}{R}^+$) , car le critère est évidemment en défaut pour $\rho = \frac{1}{|\lambda|}$. Dans les mêmes conditions, si $k \in \underset{\sim}{Z} - \{0\}$, la suite $k\{\lambda n\}$ est e. r. (mod $|k|$) , mais n'est évidemment pas e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) .

On verra plus loin (cf. III - 1) qu'il existe des suites e. r. (mod $\underset{\sim}{R}^+$) .

6. Définition 3.

Etant donnés une suite entière a_n , deux entiers naturels N , m , et un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant m - 1$, le nombre des termes a_n , tels que $a_n \equiv k \pmod m$ et $1 \leqslant n \leqslant N$, est noté $(N , k)_a^{(m)}$.

La suite entière a_n est dite équirépartie (mod m) [e. r. (mod m)] dans $\underset{\sim}{Z}$ si, et seulement si, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant m - 1$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(N , k)_a^{(m)}}{N} = \frac{1}{m} \qquad \text{(I. NIVEN [6])} . \tag{4}$$

Lorsque, de plus, la suite a_n est répartie sur $\{0 , 1 , \dots , m - 1\}$, on dit qu'elle est équirépartie sur $\{0 , 1 , \dots , m - 1\}$.

Toute suite entière a_n est e. r. (mod 1), car $(N, 0)_a^{(1)} = N$. Pour que la suite entière a_n soit e. r. (mod m), il faut et il suffit que la suite entière $a_n + h$, où $h \in \mathbb{Z}$, le soit.

7. Critère d'équirépartition (mod m) dans $\mathbb{Z}$, où m entier ≥ 2.

7.1. THÉORÈME 3. - Soit m entier ≥ 2 ; pour que la suite entière a_n soit e. r. (mod m), il faut et il suffit que, pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq m-1$, on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} e\left(\frac{h\,a_n}{m}\right) = 0 \tag{5}$$

(H. DELANGE [4], S. UCHIYAMA [8])

Une formulation équivalente de cette condition nécessaire et suffisante est immédiatement : pour tout entier h non multiple de m, on a (5).

Formons, pour tout $h \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e\left(\frac{h\,a_n}{m}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(N, k)^{(m)}}{N}\, e\left(\frac{hk}{m}\right) \tag{6}$$

La condition annoncée est nécessaire car, si la suite entière a_n est e. r. (mod m) et si $1 \leq h \leq m-1$, le 2e membre de (6), quand $N \to \infty$, tend vers

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m}\, e\left(\frac{hk}{m}\right) = \frac{1}{m}\, \frac{e(h) - 1}{e\left(\frac{h}{m}\right) - 1} = 0 .$$

Réciproquement, supposons la condition satisfaite ; alors, pour $1 \leq h \leq m-1$, le 2e membre de (6) est $o(1)$ quand $N \to \infty$.

Pour tout couple (k, ℓ) d'entiers tels que $0 \leq k \leq m-1$ et $0 \leq \ell \leq m-1$, on a

$$\sum_{h=0}^{m-1} e\left(\frac{(k-\ell)h}{m}\right) = \begin{cases} \dfrac{e(k-\ell) - 1}{e\left(\frac{k-\ell}{m}\right) - 1} = 0 & \text{si } k \neq \ell \\ m & \text{si } k = \ell \end{cases}$$

Multipliant par $(N, k)^{(m)}$, pour $k = 0, 1, \ldots, m-1$, et ajoutant membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned} m(N, \ell)^{(m)} &= \sum_{k=0}^{m-1} (N, k)^{(m)} \sum_{h=0}^{m-1} e\left(\frac{(k-\ell)h}{m}\right) \\ &= \sum_{h=0}^{m-1} e\left(-\frac{\ell h}{m}\right) \sum_{k=0}^{m-1} (N, k)^{(m)}\, e\left(\frac{kh}{m}\right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$m(N\ ,\ \ell)^{(m)} = N + \sum_{h=1}^{m-1} e(-\frac{\ell h}{m})\ o(N) = N + o(N)$$

quand $N \to \infty$. Il en résulte que $\frac{(N\ ,\ \ell)^{(m)}}{N} \to \frac{1}{m}$ quand $N \to \infty$, et cela pour tout ℓ tel que $0 \leqslant \ell \leqslant m-1$; donc, la suite entière a_n est e. r. (mod m), et la condition (5) est suffisante.

D'ailleurs, la théorie de l'équirépartition sur les groupes compacts (cf. P. EYMARD [5]), appliquée au groupe additif abélien discret $\underset{\sim}{Z}/(m)$ des entiers (mod m), dont les caractères sont $\chi_h(k) = e(\frac{hk}{m})$, où $h\ ,\ k = 0\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ m-1$, fournit immédiatement le critère (5).

7.2. - I. NIVEN [6] a remarqué que la condition nécessaire d'équirépartition (mod m)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} e(\frac{a_n}{m}) = 0$$

qui, d'après le théorème 3, est suffisante lorsque $m = 2$, est encore suffisante lorsque $m = 3$, mais n'est plus suffisante lorsque $m \geqslant 4$.

7.3. - Le critère (5) montre aussitôt que si la suite entière a_n est e. r. (mod m), elle est aussi e. r. (mod m') pour tout entier naturel m' diviseur de m.

Mais I. NIVEN [6] établit que, étant donnés deux entiers naturels m, m' tels que m' ne soit pas diviseur de m, il existe une suite entière a_n qui est e. r. (mod m) sans être e. r. (mod m').

7.4. - Le critère (5) montre, par exemple, que la suite entière kn, où $|k|$ est un entier naturel tel que $(|k|\ ,\ m) = 1$, est e. r. (mod m). Pour $|k| = 1$, il en résulte que la suite entière εn, où $\varepsilon = \pm 1$, est e. r. (mod m) pour tout $m \in \underset{\sim}{Z}^+$.

8. Définition 4.

Soit $E \subset \underset{\sim}{Z}^+$. La suite entière a_n est dite équirépartie (mod E) [e. r. (mod E)] dans $\underset{\sim}{Z}$ si, et seulement si, elle est e. r. (mod m) pour tout $m \in E$.

Si la suite entière a_n est e. r. (mod E), elle est aussi

e. r. (mod $\{m' \mid (\exists\ m)(m' \mid m \in E)\}$).

9. Critère d'équirépartition (mod $\mathbb{Z}^+$) dans $\mathbb{Z}$.

9.1. - Quand h parcourt $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ et m parcourt $\{2, 3, \ldots\}$, $\frac{h}{m}$ parcourt l'ensemble des rationnels ρ tels que $0 < \rho < 1$; dès lors, le critère (5) donne le théorème suivant :

THÉORÈME 4. - Pour que la suite entière a_n soit e. r. (mod $\mathbb{Z}^+$), il faut et il suffit que, pour tout rationnel $\rho \in \,]0, 1[$, on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} e(\rho\, a_n) = 0 . \tag{7}$$

Une formulation équivalente de cette condition nécessaire et suffisante est immédiatement : pour tout rationnel ρ non entier, on a (7) (S. UCHIYAMA [8]).

9.2. - Le critère (7) montre, par exemple, que la suite entière $[\frac{n}{q}]$, où $q \in \mathbb{Z} = \{0\}$, est e. r. (mod $\mathbb{Z}^+$) ; en effet, supposant pour fixer les idées $q > 0$, on a pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, quand $N \to \infty$:

$$\sum_{1}^{N} e(\rho[\tfrac{n}{q}]) = O(1) + q \sum_{1}^{[\frac{N}{q}]} e(\rho k)$$

et pour tout $\rho \in \,]0, 1[$, d'où $e(\rho) \neq 1$, on a :

$$\Big|\sum_{1}^{[\frac{N}{q}]} e(\rho k)\Big| = \Big|\frac{e(\rho[\frac{N}{q}]) - 1}{e(\rho) - 1}\, e(\rho)\Big| \leq \frac{2}{|e(\rho) - 1|}$$

de sorte que, pour tout $\rho \in \,]0, 1[$, on a

$$\sum_{1}^{N} e(\rho[\tfrac{n}{q}]) = O(1)$$

quand $N \to \infty$, et

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} e(\rho[\tfrac{n}{q}]) = 0 .$$

9.3. - Les suites entières $\varepsilon n + h$, où $\varepsilon = \pm 1$, $h \in \mathbb{Z}$, sont e. r. (mod $\mathbb{Z}^+$), et I. NIVEN [6] montre que ce sont là les seules suites polynômes en n à coefficients entiers rationnels qui le soient.

10. Définition 5.

Etant donnés une suite entière p-adique α_n, deux entiers $N \in \underset{\sim}{Z}^+$ et $k \in \underset{\sim}{N}$ et un entier p-adique γ, $(N, \gamma, k)_\alpha$ désigne le nombre des termes α_n tels que $|\alpha_n - \gamma|_p \leqslant \frac{1}{p^k}$ et $1 \leqslant n \leqslant N$.

La suite entière p-adique α_n est dite équirépartie sur $\underset{\sim}{Z}_p$ [e. r. sur $\underset{\sim}{Z}_p$] si, et seulement si, pour tout $\gamma \in \underset{\sim}{Z}_p$ et pour tout $k \in \underset{\sim}{N}$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(N, \gamma, k)_\alpha}{N} = \frac{1}{p^k} \tag{8}$$

(condition d'ailleurs toujours vérifiée pour $k = 0$).

Cette définition s'applique en particulier aux suites entières a_n, puisque $\underset{\sim}{Z} \subset \underset{\sim}{Z}_p$. On sait d'ailleurs que $\underset{\sim}{Z}$ est partout dense sur $\underset{\sim}{Z}_p$.

11. Critère d'équirépartition sur $\underset{\sim}{Z}_p$ pour une suite entière a_n.

11.1. - Soit $\gamma \in \underset{\sim}{Z}_p$, de développement de Hensel

$$\gamma = \sum_0^\infty c_j\, p^j \text{ , où } 0 \leqslant c_j \leqslant p - 1 \text{ pour tout } j \in \underset{\sim}{N} \text{ ;}$$

soit $k \in \underset{\sim}{N}$, et posons

$$c'_k = \sum_0^{k-1} c_j\, p^j \quad \text{si } k \geqslant 1 \text{ , } \quad c'_0 = 0 \text{ ,}$$

de sorte que

$$\gamma \equiv c'_k \pmod{p^k} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c'_k \leqslant p^k - 1 \text{ .}$$

Soit une suite entière a_n. $(N, \gamma, k)_a$ est le nombre des termes a_n tels que $a_n \equiv c'_k \pmod{p^k}$ et $1 \leqslant n \leqslant N$; c'est donc aussi $(N, c'_k)_a^{(p^k)}$. k étant fixé, quand γ parcourt $\underset{\sim}{Z}_p$, c'_k parcourt $\{0, 1, \ldots, p^k - 1\}$; dès lors, quand $N \to \infty$, pour que

$$\frac{(N, \gamma, k)_a}{N} \to \frac{1}{p^k}$$

pour tout $\gamma \in \underset{\sim}{Z}_p$ et pour tout $k \in \underset{\sim}{N}$, il faut et il suffit que

$$\frac{(N , h)_a^{(p^k)}}{N} \to \frac{1}{p^k}$$

pour tout $k \in \Gamma$ et pour tout entier h tel que $0 \leqslant h \leqslant p^k - 1$; autrement dit :

THÉORÈME 5. - Pour que la suite entière a_n soit e. r. sur $\underset{\sim}{Z}_p$, il faut et il suffit qu'elle soit e. r. (mod p^{Γ}).

11.2. - Il en résulte que : pour que la suite entière a_n soit e. r. sur $\underset{\sim}{Z}_p$ quel que soit p premier, il suffit qu'elle soit e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) . Mais cette condition suffisante n'est pas nécessaire ; I. NIVEN [6] le montre en construisant un contre-exemple.

II. Relations entre équirépartition dans $\underset{\sim}{R}$ et équirépartition dans $\underset{\sim}{Z}$.

1. Propriétés préliminaires.

LEMME 1. - Soient m , k deux entiers naturels ; si la suite u_n est e. r. (mod m) , alors la suite entière $[k\, u_n]$ est e. r. (mod km) .

Soit h un entier tel que $0 \leqslant h \leqslant km - 1$. Pour que $[k\, u_n] \equiv h$ (mod km) , il faut et il suffit que $h \leqslant k\, u_n < h + 1$ (mod km) , ou encore $\frac{h}{k} \leqslant u_n < \frac{h+1}{k}$ (mod m), c'est-à-dire $\frac{h}{k} \leqslant r_m(u_n) < \frac{h+1}{k}$. Il en résulte que

$$\frac{1}{N} (N , h)_{[ku]}^{(km)} = \frac{1}{N} \left(N , \frac{h}{k} , \frac{h+1}{k}\right)_u^{(m)} \to \frac{1}{km} \qquad \text{quand } N \to \infty$$

et cela pour tout $h \in \{0 , 1 , \ldots , km - 1\}$; donc la suite entière $[k\, u_n]$ est e. r. (mod km) .

Il s'ensuit que la suite entière $[k\, u_n]$ est alors e. r. (mod m) et e. r. (mod k) .

1.2. - En particulier, pour $k = 1$, on obtient : si la suite u_n est e. r. (mod m) , alors la suite entière $[u_n]$ est e. r. (mod m) .

Il en résulte que si la suite u_n est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) , alors la suite entière $[u_n]$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) . Mais la réciproque est fausse ; par exemple, la suite entière $[\frac{n}{q}]$, où $q \in \underset{\sim}{Z} - \{0\}$, est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) (cf. I - 9.2), alors que la suite $\frac{n}{q}$ n'est e. r. (mod m) pour aucun $m \in \underset{\sim}{Z}^+$.

1.3. - On vient de rappeler que la suite entière $[\lambda n]$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) lorsque $\lambda^{-1} \in \underset{\sim}{Z} - \{0\}$; elle est aussi e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) lorsque $\lambda \in \underset{\sim}{R} - \underset{\sim}{Q}$, car alors (cf. I - 5.2) la suite λn est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) . De façon plus précise, I. NIVEN [6] montre, à l'aide d'une étude directe du cas où $\lambda \in \underset{\sim}{Q}$, que :

THÉORÈME 6. - Pour que la suite entière $[\lambda n]$, où $\lambda \in \underset{\sim}{R}$, soit e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$), il faut et il suffit que $\lambda \in \underset{\sim}{R} - \underset{\sim}{Q}$ ou que $\lambda^{-1} \in \underset{\sim}{Z} - \{0\}$.

Par ailleurs, Th. SKOLEM [7] a démontré que tout entier naturel est de l'une, et de l'une seulement, des deux formes $[\frac{1+\sqrt{5}}{2} k]$, $[\frac{3+\sqrt{5}}{2} k]$, où $k \in \underset{\sim}{Z}^+$, et ce résultat curieux a conduit Th. BANG [2] à étudier les propriétés spéciales des suites entières $[\lambda n]$, où $\lambda \in \underset{\sim}{R}$.

LEMME 2. - Soit k un entier naturel ; pour que la suite entière $[k\, u_n]$ soit e. r. (mod k) , il faut et il suffit que les fonctions inférieure et supérieure de répartition (mod 1) de la suite u_n , soient $\underline{\chi}_u$ et $\overline{\chi}_u$, vérifient, pour tout $h \in \{0 , 1 , \dots , k\}$:

(9) $$\underline{\chi}_u(\frac{h}{k}) = \overline{\chi}_u(\frac{h}{k}) = \frac{h}{k} .$$

Puisque $\underline{\chi}_u$ et $\overline{\chi}_u$ sont croissantes sur I , une formulation équivalente de cette condition est

$$\frac{1}{k}[kx] \leqslant \underline{\chi}_u(x) \leqslant \overline{\chi}_u(x) \leqslant \frac{1}{k}[kx]^* \qquad \text{sur } I .$$

Pour que la suite entière $[k\, u_n]$ soit e. r. (mod k) , il faut et il suffit que la suite $v_n = \frac{1}{k}[k\, u_n]$ admette la fonction de répartition (mod 1)

$$\underline{\chi}_v(x) = \frac{1}{k}[kx]^*$$

qui présente un saut égal à $\frac{1}{k}$ en chacun des points $0 , \frac{1}{k} , \dots , \frac{k-1}{k}$; de façon équivalente, puisque $v_n \in \underset{\sim}{Z}/k$, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout $h \in \{0 , 1 , \dots , k\}$:

(10) $$\underline{\chi}_v(\frac{h}{k}) = \overline{\chi}_v(\frac{h}{k}) = \frac{h}{k} .$$

Or, $v_n = u_n - \frac{1}{k}\{k\, u_n\}$, d'où

$$u_n \equiv \{v_n\} + \frac{1}{k}\{k\, u_n\} \pmod 1 ;$$

puisque $0 \leqslant \{v_n\} \leqslant 1 - \frac{1}{k}$ et $0 \leqslant \frac{1}{k}\{k\, u_n\} < \frac{1}{k}$, cette congruence entraîne

$$\{u_n\} = \{v_n\} + \frac{1}{k}\{k\, u_n\} .$$

Soit h un entier tel que $1 \leqslant h \leqslant k$. Pour que l'on ait $0 \leqslant \{u_n\} < \frac{h}{k}$, il faut et il suffit que l'on ait $-\frac{1}{k}\{k\, u_n\} \leqslant \{v_n\} < \frac{h}{k} - \frac{1}{k}\{k\, u_n\}$, ou encore, de façon équivalente, puisque $v_n \in \underset{\sim}{Z}/k$, que l'on ait $0 \leqslant \{v_n\} < \frac{h}{k}$. Il en résulte que, pour $h = 0 , 1 , \ldots , k$, on a

$$\left(N , 0 , \frac{h}{k}\right(_u = \left(N , 0 , \frac{h}{k}\right(_v$$

et

$$\underline{\chi}_u\left(\frac{h}{k}\right) = \underline{\chi}_v\left(\frac{h}{k}\right) \qquad \text{et} \qquad \overline{\chi}_u\left(\frac{h}{k}\right) = \overline{\chi}_v\left(\frac{h}{k}\right) .$$

Ces dernières relations montrent que (9) et (10) sont équivalentes, ce qui établit la proposition (qui ne présente d'intérêt que pour $k \geqslant 2$).

2. Condition nécessaire et suffisante d'équirépartition (mod 1), (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) dans R.

2.1. THÉORÈME 7. - Pour que la suite u_n soit e. r. (mod 1), il faut et il suffit qu'il existe une application strictement croissante φ de $\underset{\sim}{Z}^+$ dans $\underset{\sim}{Z}^+$ telle que, pour tout $k \in \underset{\sim}{Z}^+$, la suite entière $[\varphi(k) u_n]$ soit e. r. (mod $\varphi(k)$).

L'application du lemme 1 dans le cas particulier $m = 1$ montre que la condition est nécessaire.

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, on a d'après le lemme 2, pour tout $x \in I$ et pour tout $k \in \underset{\sim}{Z}^+$:

$$\frac{1}{\varphi(k)}[\varphi(k)x] \leqslant \underline{\chi}_u(x) \leqslant \overline{\chi}_u(x) \leqslant \frac{1}{\varphi(k)}[\varphi(k)x]^* \leqslant \frac{1}{\varphi(k)}([\varphi(k)x] + 1) .$$

Quand $k \to \infty$, alors $\varphi(k) \to \infty$ et les inégalités précédentes montrent que $\underline{\chi}_u(x)$ et $\overline{\chi}_u(x)$ tendent l'un et l'autre vers x ; ainsi, la suite u_n admet la fonction de répartition (mod 1) $\chi_u(x) = x$, autrement dit elle est e. r. (mod 1), et la condition est suffisante.

2.2. - On a de même :

Pour que la suite u_n *soit e. r.* $(\bmod\ \underset{\sim}{Z}^+)$, *il faut et il suffit qu'il existe une application strictement croissante* φ *de* $\underset{\sim}{Z}^+$ *dans* $\underset{\sim}{Z}^+$ *telle que, pour tout* $k \in \underset{\sim}{Z}^+$, *la suite entière* $[\varphi(k)u_n]$ *soit e. r.* $(\bmod\ \underset{\sim}{Z}^+)$.

La nécessité de la condition résulte encore du lemme 1. D'autre part, si cette condition est satisfaite, étant donné $m \in \underset{\sim}{Z}^+$, la suite entière $[m\varphi(k)\frac{u_n}{m}]$ est e. r. $(\bmod\ m\varphi(k))$ pour tout $k \in \underset{\sim}{Z}^+$, donc (théorème 7) la suite $\frac{u_n}{m}$ est e. r. (mod 1) ; puisqu'il en est ainsi pour tout $m \in \underset{\sim}{Z}^+$, la suite u_n est e. r. $(\bmod\ \underset{\sim}{Z}^+)$, et la condition est suffisante.

3. Condition nécessaire et suffisante d'équirépartition $(\bmod\ \underset{\sim}{R}^+)$ dans $\underset{\sim}{R}$.

THÉORÈME 8. - *Pour que la suite* u_n *soit e. r.* $(\bmod\ \underset{\sim}{R}^+)$, *il faut et il suffit que, pour tout* $t \in \underset{\sim}{R}^+$, *la suite entière* $[t\ u_n]$ *soit e. r.* $(\bmod\ \underset{\sim}{Z}^+)$.

Si la suite u_n est e. r. $(\bmod\ \underset{\sim}{R}^+)$, le critère (3) montre que, pour tout $t \in \underset{\sim}{R}^+$, la suite tu_n l'est aussi, donc la suite entière $[t\ u_n]$ est e. r. $(\bmod\ \underset{\sim}{Z}^+)$, et la condition annoncée est nécessaire.

Montrons maintenant que cette condition est suffisante. Posons, pour tout $t \in R^+$ et tout rationnel $r \in]0\ ,\ 1[$:

$$A_N(r\ ,\ t) = \sum_1^N e(r[t\ u_n]) = \sum_1^N e(rt\ u_n)\ e(-\ r\{t\ u_n\})$$

et

$$B_N(r\ ,\ t) = \sum_1^N e(rt\ u_n)\,(1 - e(-\ r\{t\ u_n\}))$$

de sorte que

$$\sum_1^N e(rt\ u_n) = A_N(r\ ,\ t) + B_N(r\ ,\ t)\ .$$

On a

$$|B_N(r\ ,\ t)| \leqslant \sum_1^N |1 - e(-\ r\{t\ u_n\})| \leqslant 2\pi r\{t\ u_n\}N < 2\pi rN$$

et dès lors

$$\left|\frac{1}{N}\sum_1^N e(rt\ u_n)\right| \leqslant \left|\frac{1}{N} A_N(r\ ,\ t)\right| + \left|\frac{1}{N} B_N(r\ ,\ t)\right| < \left|\frac{1}{N} A_N(r\ ,\ t)\right| + 2\pi r\ .$$

La suite entière $[t\, u_n]$ étant e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) , le critère (7) montre que $\frac{1}{N} A_N(r\,,\,t) \to 0$ quand $N \to \infty$; donc, pour tout $t \in \underset{\sim}{R}^+$ et tout rationnel $r \in]0,1[$, on a

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \left|\frac{1}{N}\sum_1^N e(rt\,u_n)\right| \leqslant 2\pi r\ .$$

Soit $\rho \in \underset{\sim}{R}^+$ et prenons $t = \frac{\rho}{r}$ avec $0 < r < 1$; on a alors, pour tout $t > \rho$:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \left|\frac{1}{N}\sum_1^N e(\rho\,u_n)\right| \leqslant \frac{2\pi\rho}{t}$$

ce qui exige, puisque t est arbitrairement grand, qu'on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_1^N e(\rho\,u_n) = 0\ .$$

Comme il en est ainsi pour tout $\rho \in \underset{\sim}{R}^+$, le critère (3) montre que la suite u_n est e. r. (mod $\underset{\sim}{R}^+$) .

III. Conditions suffisantes d'équirépartition dans $\underset{\sim}{R}$ et applications.

1. Condition suffisante d'équirépartition (mod $\underset{\sim}{R}^+$) dans $\underset{\sim}{R}$ de Fejér.

1.1. – Un théorème classique de Fejér conclut à l'équirépartition (mod 1) d'une suite $f(n)$ sous des hypothèses sur f qui sont invariantes par homothétie positive sur f ; d'après I – 3.1, il assure donc du même coup l'équirépartition (mod $\underset{\sim}{R}^+$) de cette suite $f(n)$. Ainsi :

THÉORÈME 9. – Si f est une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de ∞ et sur $\underset{\sim}{Z}^+$, dérivable au voisinage de ∞ , si $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ et si $\lim\limits_{x\to\infty} x|f'(x)| = \infty$, alors la suite $f(n)$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{R}^+$) .

Il suffit d'ailleurs, pour l'établir directement, de reprendre une démonstration classique du théorème de Fejér à partir de la formule sommatoire d'Euler (cf. [3], III – 1.2, p. 16-17, avec ici $F(t) = e(\rho f(t))$, où $\rho \in \underset{\sim}{R}^+$) et d'appliquer le critère (3).

1.2. – Il en résulte que : sous les hypothèses de Fejér sur f , la suite entière $[f(n)]$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) , donc aussi e. r. sur $\underset{\sim}{Z}_p$ pour tout premier p.

1.3. - Application. - Prenant $f(x) = \lambda x^{\alpha} \log^{\beta} x$, on trouve que la suite $\lambda n^{\alpha} \log^{\beta} n$, où α, β, λ réels et $\lambda \neq 0$, est e. r. (mod $\underset{\sim}{R}^+$) si

$$0 < \alpha < 1 \quad \text{ou} \quad (\alpha = 0 \text{ et } \beta > 1) \quad \text{ou} \quad (\alpha = 1 \text{ et } \beta < 0) .$$

Dans les mêmes cas, la suite entière $[\lambda n^{\alpha} \log^{\beta} n]$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$), donc aussi e. r. sur $\underset{\sim}{Z}_p$ pour tout premier p.

2. Condition suffisante d'équirépartition (mod $\underset{\sim}{R}^+$), (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) dans $\underset{\sim}{R}$ de Van der Corput.

2.1. - En appliquant le théorème classique de Van der Corput concernant l'équirépartition (mod 1) d'une suite u_n à la famille de suites $\frac{u_n}{\omega}$, où ω parcourt $\underset{\sim}{R}^+$ [resp. $\underset{\sim}{Z}^+$], on obtient un théorème analogue concernant l'équirépartition (mod $\underset{\sim}{R}^+$) [resp. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$)] de cette suite u_n. Ainsi :

THÉORÈME 10. - Si, pour tout $h \in \underset{\sim}{Z}^+$, la suite $u_{n+h} - u_n$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{R}^+$) [resp. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$)], alors la suite u_n est e. r. (mod $\underset{\sim}{R}^+$) [resp. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$)].

Les généralisations bien connues du théorème classique s'étendent de la même manière.

2.2. - Il en résulte que : si, pour tout $h \in \underset{\sim}{Z}^+$, la suite $u_{n+h} - u_n$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$), alors la suite entière $[u_n]$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$), donc aussi e. r. sur $\underset{\sim}{Z}_p$ pour tout premier p.

2.3. - Applications.

a. L'argument classique permet d'établir, à l'aide du théorème 10, que :

Si P est une fonction polynôme à coefficients réels de degré $\geqslant 1$ dont l'un au moins des coefficients, autre que le terme constant, est irrationnel, alors la suite $P(n)$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$).

On le montre d'abord dans le cas où le coefficient, soit a_r, du monôme de plus haut degré dans $P(n)$ est irrationnel, en remarquant que la propriété est alors vraie pour $r = 1$ (cf. I - 5.2) et en achevant par récurrence sur r ; puis on traite le cas où a_r est rationnel en distinguant le premier coefficient irrationnel, soit a_s, figurant dans $P(n)$.

L'énoncé précédent se déduit d'ailleurs aussitôt de l'énoncé correspondant relatif à l'équirépartition (mod 1) de la suite $P(n)$ en notant que les hypothèses sur P qui y figurent sont invariantes par homothétie positive rationnelle sur P.

Dans les mêmes conditions, la suite entière $[P(n)]$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$), donc aussi e. r. sur $\underset{\sim}{Z}_p$ pour tout premier p.

b. En combinant l'application III - 1.3 précédente pour $\beta = 0$ avec le théorème 10, on obtient :

La suite λn^α, où $\lambda \in \underset{\sim}{R} - \{0\}$ et $\alpha \in \underset{\sim}{R}^+ - \underset{\sim}{Z}^+$, est e. r. (mod $\underset{\sim}{R}^+$). Dans les mêmes conditions, la suite entière $[\lambda n^\alpha]$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$), donc aussi e. r. sur $\underset{\sim}{Z}_p$ pour tout premier p.

3. Condition suffisante d'équirépartition (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) dans $\underset{\sim}{R}$ presque partout de Koksma.

3.1. - Un théorème général classique de Koksma conclut à l'équirépartition (mod 1) d'une suite paramétrée $f_n(t)$ pour presque tous les $t \in (\alpha, \beta)$ sous des hypothèses sur f_n qui sont invariantes par homothétie positive sur f_n ; en l'appliquant à la famille de suites $\frac{f_n(t)}{k}$, où k parcourt $\underset{\sim}{Z}^+$, on voit, puisqu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure - $\mathfrak{L}$ nulle est elle-même de mesure - $\mathfrak{L}$ nulle, qu'il assure du même coup l'équirépartition (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) de cette suite $f_n(t)$ pour presque tous les $t \in (\alpha, \beta)$. D'autre part, les hypothèses faites sur f_n sont également invariantes si l'on effectue sur l'indice n une permutation de $\underset{\sim}{Z}^+$; une telle permutation g étant choisie, le théorème classique assure donc finalement l'équirépartition (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) de la suite $f_{g(n)}(t)$ pour presque tous les $t \in (\alpha, \beta)$. Ainsi :

THÉORÈME 11. - Soient α, β, c trois nombres réels tels que $\alpha < \beta$ et $c > 0$, soit g une permutation de $\underset{\sim}{Z}^+$, et soit une suite f_n de fonctions à valeurs réelles définies sur (α, β). Si la fonction $\varphi_{q,r} = f_q - f_r$, où $q \neq r$, est dérivable sur (α, β), si sa fonction dérivée $\varphi'_{q,r}$ est monotone et de signe constant sur (α, β) et si $|\varphi'_{q,r}(t)| \geqslant c$ sur (α, β), alors la suite $f_{g(n)}(t)$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) pour presque tous les $t \in (\alpha, \beta)$.

Il suffit d'ailleurs, pour l'établir directement, de reprendre la démonstration habituelle du théorème de Koksma (cf. [3], IV - 1.1, p. 21-24, avec ici $\sigma_N(t) = \frac{1}{N}\sum_1^N e(\rho f_n(t))$, où $\rho \in \underset{\sim}{Q}^+$) et d'appliquer le critère (3) ; l'ensemble des $t \in (\alpha, \beta)$ pour lesquels ce critère se trouve éventuellement en défaut est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure - $\mathcal{L}$ nulle, donc est lui-même de mesure - $\mathcal{L}$ nulle.

3.2. - Il en résulte que : sous les hypothèses de Koksma sur la suite de fonctions f_n, la suite entière $[f_{g(n)}(t)]$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) pour presque tous les $t \in [\alpha , \beta)$, donc aussi e. r. sur tous les $\underset{\sim}{Z}_p$ pour presque tous les $t \in [\alpha , \beta)$.

3.3. - Applications. - Indiquons seulement les extensions suivantes de deux résultats métriques simples :

a. Soit λ réel tel que $|\lambda| > 1$; pour presque tous les t réels, on a à la fois :

1° La suite $t\lambda^n$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) ;

2° La suite entière $[t\lambda^n]$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) et e. r. sur tous les $\underset{\sim}{Z}_p$.

b. Soit λ réel non nul ; pour presque tous les t réels tels que $|t| \geqslant 1$, on a à la fois :

1° La suite λt^n est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) ;

2° La suite entière $[\lambda t^n]$ est e. r. (mod $\underset{\sim}{Z}^+$) et e. r. sur tous les $\underset{\sim}{Z}_p$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMMANN (André). - Quelques propriétés concernant la répartition des suites de nombres module un (Thèse Sc. math. Univ. Geneva, 1947, 39 p. multigr.).

[2] BANG (Thøger). - On the sequence $[n\alpha]$, $n = 1 , 2 , \ldots$, Math. Scand., t. 5, 1957, p. 69-76.

[3] CHAUVINEAU (Jean). - Equirépartition et équirépartition uniforme modulo 1, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 3, 1961/62, n° 7, 35 p.

[4] DELANGE (Hubert). - Distribution des valeurs de certaines fonctions arithmétiques, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 2, 1960/61, n° 2, 25 p.

[5] EYMARD (Pierre). - Suites équiréparties dans un groupe compact, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 14, 1960/61, n° 3, 11 p.

[6] NIVEN (Ivan). - Uniform distribution of sequences of integers, Trans. Amer. math. Soc., t. 98, 1961, p. 52-61.

[7] SKOLEM (Thoralf). - On certain distributions of integers in pairs with given differences, Math. Scand., t. 5, 1957, p. 57-68.

[8] UCHIYAMA (Saburô). - On the uniform distribution of sequences of integers, Proc. Jap. Acad., t. 37, 1961, p. 605-609.