

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN CHAUVINEAU

Équirépartition dans R et dans Z et équirépartition sur Z_p

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 5 (1963-1964), exp. n° 10, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1963-1964__5__A7_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉQUIRÉPARTITION DANS $\underline{\mathbb{R}}$ ET DANS $\underline{\mathbb{Z}}$
 ET ÉQUIRÉPARTITION SUR $\underline{\mathbb{Z}}_p$

par Jean CHAUVINEAU

I. Définitions et critères.

1. Notations.

$\underline{\mathbb{N}}$, $\underline{\mathbb{Z}}$, $\underline{\mathbb{Q}}$, $\underline{\mathbb{R}}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels ou nul, l'anneau des entiers rationnels, le corps des rationnels, le corps des réels. $\underline{\mathbb{Z}}^+$, $\underline{\mathbb{Q}}^+$, $\underline{\mathbb{R}}^+$ désignent respectivement l'ensemble des éléments > 0 de $\underline{\mathbb{Z}}$, $\underline{\mathbb{Q}}$, $\underline{\mathbb{R}}$. I désigne l'intervalle fermé $(0, 1]$. p dénote un nombre premier; $\underline{\mathbb{Z}}_p$ désigne l'anneau des entiers p -adiques.

Si x est un réel, $[x]$ désigne sa partie entière, $\{x\}$ sa partie fractionnaire et $[x]^*$ le plus petit entier rationnel $\geq x$, de sorte que

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad [x]^* - 1 < x \leq [x]^*, \quad [x] + \{x\} = x.$$

Si de plus ω est un réel > 0 , $r_\omega(x)$ désigne le reste (mod ω) de x , défini par

$$x \equiv r_\omega(x) \pmod{\omega} \quad \text{et} \quad 0 \leq r_\omega(x) < \omega$$

de sorte que $\{x\} = r_1(x)$. On pose selon l'usage

$$e(x) = e^{2i\pi x}.$$

Les suites étudiées sont toutes des suites numériques réelles $(u_n)_{n \in \underline{\mathbb{Z}}^+}$ ou des suites numériques entières rationnelles $(a_n)_{n \in \underline{\mathbb{Z}}^+}$; elles seront appelées, par abus de langage, la suite u_n ou la suite entière \tilde{a}_n . Les suites numériques entières p -adiques $(\alpha_n)_{n \in \underline{\mathbb{Z}}^+}$ seront seulement mentionnées.

2. Définition 1.

Etant donné une suite u_n , un entier naturel N , un réel $\omega > 0$ et un ensemble $E \subset (0, \omega)$, le nombre des termes u_n , tels que $r_\omega(u_n) \in E$ et $1 \leq n \leq N$, est noté $(N, E)_\omega$. Si α, β sont deux réels, tels que $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega$, on pose

$$\{N, \{\alpha, \beta\}_u^{(\omega)} = \{N, \alpha, \beta\}_u^{(\omega)}.$$

L'indice supérieur (ω) est sous-entendu lorsque $\omega = 1$.

La suite u_n est dite équirépartie $(\text{mod } \omega)$ [e. r. $(\text{mod } \omega)$] dans $\underline{\mathbb{R}}$ si, et seulement si, pour tout couple (α, β) de réels tels que $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega$, on a

$$(1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\{N, \alpha, \beta\}_u^{(\omega)}}{N} = \frac{\beta - \alpha}{\omega}.$$

Lorsque, de plus, la suite u_n est répartie sur $(0, \omega)$, on dit qu'elle est équirépartie sur $(0, \omega)$. Pour que la suite u_n soit e. r. $(\text{mod } \omega)$, il faut et il suffit que la suite $u_n + c$, où $c \in \underline{\mathbb{R}}$, le soit.

3. Critère d'équirépartition $(\text{mod } \omega)$ dans $\underline{\mathbb{R}}$, où ω réel > 0 .

3.1. - Soient a, b deux réels tels que $0 \leq a < b \leq 1$, d'où $0 \leq \omega a < \omega b \leq \omega$. Pour que l'on ait $\omega a \leq r_\omega(u_n) < \omega b$, il faut et il suffit que l'on ait

$$a \leq \frac{r_\omega(u_n)}{\omega} = \left\{ \frac{u_n}{\omega} \right\} < b,$$

de sorte que

$$\{N, \omega a, \omega b\}_u^{(\omega)} = \{N, a, b\}_{u/\omega}$$

Il en résulte que, pour que la suite u_n soit e. r. $(\text{mod } \omega)$, il faut et il suffit que la suite $\frac{u_n}{\omega}$ soit e. r. $(\text{mod } 1)$. Dès lors, l'application du 2e critère de Weyl donne le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soit ω réel > 0 ; pour que la suite u_n soit e. r. $(\text{mod } \omega)$, il faut et il suffit que, pour tout entier $h \in \underline{\mathbb{Z}}^+$, on ait

$$(2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e\left(\frac{h u_n}{\omega}\right) = 0.$$

3.2. - Le critère (2) montre aussitôt que si la suite u_n est e. r. $(\text{mod } \omega)$, elle est aussi e. r. $(\text{mod } \frac{\omega}{k})$ pour tout $k \in \underline{\mathbb{Z}}^+$.

4. Définition 2.

Soit $E \subset \underline{\mathbb{R}}^+$. La suite u_n est dite équirépartie $(\text{mod } E)$ [e. r. $(\text{mod } E)$] dans $\underline{\mathbb{R}}$ si, et seulement si, elle est e. r. $(\text{mod } \omega)$ pour tout $\omega \in E$.

Si la suite u_n est e. r. (mod E), elle est aussi e. r. (mod E/k) pour tout $k \in \underline{\mathbb{Z}}^+$. En particulier, si la suite u_n est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$), elle est aussi e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+/k$) pour tout $k \in \underline{\mathbb{Z}}^+$, donc elle est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Q}}^+$). On voit ainsi que les notions d'équirépartition (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$) et d'équirépartition (mod $\underline{\mathbb{Q}}^+$) sont équivalentes.

A. AMMANN [1] introduit les suites e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$) sous le nom de suites totallement équiréparties.

5. Critères d'équirépartition (mod $\underline{\mathbb{R}}^+$), (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$) dans $\underline{\mathbb{R}}$.

5.1. - h étant fixé, quand ω parcourt $\underline{\mathbb{R}}^+$ [resp. $\underline{\mathbb{Q}}^+$], $\frac{h}{\omega}$ parcourt aussi $\underline{\mathbb{R}}^+$ [resp. $\underline{\mathbb{Q}}^+$]; dès lors, le critère (2) donne :

THÉORÈME 2. - Pour que la suite u_n soit e. r. (mod $\underline{\mathbb{R}}^+$) [resp. : (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$)], il faut et il suffit que, pour tout $\rho \in \underline{\mathbb{R}}^+$ [resp. : $\rho \in \underline{\mathbb{Q}}^+$], on ait

$$(3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e(\rho u_n) = 0 .$$

5.2. - Le critère (3) montre, par exemple, que la suite λ_n , où λ réel irrationnel, est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$); mais cette suite n'est pas e. r. (mod $\underline{\mathbb{R}}^+$), car le critère est évidemment en défaut pour $\rho = \frac{1}{|\lambda|}$. Dans les mêmes conditions, si $k \in \underline{\mathbb{Z}} - \{0\}$, la suite $k\{\lambda n\}$ est e. r. (mod $|k|$), mais n'est évidemment pas e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$).

On verra plus loin (cf. III - 1) qu'il existe des suites e. r. (mod $\underline{\mathbb{R}}^+$).

6. Définition 3.

Etant donné une suite entière a_n , deux entiers naturels N , m , et un entier k tel que $0 \leq k \leq m - 1$, le nombre des termes a_n , tels que $a_n \equiv k \pmod{m}$ et $1 \leq n \leq N$, est noté $(N, k)_a^{(m)}$.

La suite entière a_n est dite équirépartie (mod m) [e. r. (mod m)] dans $\underline{\mathbb{Z}}$ si, et seulement si, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq m - 1$, on a

$$(4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N, k)_a^{(m)}}{N} = \frac{1}{m} \quad (\text{I. NIVEN [6]}).$$

Lorsque, de plus, la suite a_n est répartie sur $\{0, 1, \dots, m - 1\}$, on dit qu'elle est équirépartie sur $\{0, 1, \dots, m - 1\}$.

Toute suite entière a_n est e. r. (mod 1), car $(N, 0)_a^{(1)} = N$. Pour que la suite entière a_n soit e. r. (mod m), il faut et il suffit que la suite entière $a_n + h$, où $h \in \mathbb{Z}$, le soit.

7. Critère d'équirépartition (mod m) dans \mathbb{Z} , où m entier ≥ 2 .

7.1. THÉORÈME 3. - Soit m entier ≥ 2 ; pour que la suite entière a_n soit e. r. (mod m), il faut et il suffit que, pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq m-1$, on ait

$$(5) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e\left(\frac{h a_n}{m}\right) = 0 \quad (\text{H. DELANGE [4], S. UCHIYAMA [8]})$$

Une formulation équivalente de cette condition nécessaire et suffisante est immédiatement : pour tout entier h non multiple de m , on a (5).

Formons, pour tout $h \in \mathbb{Z}$:

$$(6) \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e\left(\frac{h a_n}{m}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(N, k)^{(m)}}{N} e\left(\frac{hk}{m}\right)$$

La condition annoncée est nécessaire car, si la suite entière a_n est e. r. (mod m) et si $1 \leq h \leq m-1$, le 2e membre de (6), quand $N \rightarrow \infty$, tend vers

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} e\left(\frac{hk}{m}\right) = \frac{1}{m} \frac{e(h) - 1}{e\left(\frac{h}{m}\right) - 1} = 0.$$

Réciproquement, supposons la condition satisfaite; alors, pour $1 \leq h \leq m-1$, le 2e membre de (6) est $o(1)$ quand $N \rightarrow \infty$.

Pour tout couple (k, ℓ) d'entiers tels que $0 \leq k \leq m-1$ et $0 \leq \ell \leq m-1$, on a

$$\sum_{h=0}^{m-1} e\left(\frac{(k-\ell)h}{m}\right) = \begin{cases} \frac{e(k-\ell) - 1}{e\left(\frac{k-\ell}{m}\right) - 1} = 0 & \text{si } k \neq \ell \\ m & \text{si } k = \ell \end{cases}$$

Multipliant par $(N, k)^{(m)}$, pour $k = 0, 1, \dots, m-1$, et ajoutant membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned} m(N, \ell)^{(m)} &= \sum_{k=0}^{m-1} (N, k)^{(m)} \sum_{h=0}^{m-1} e\left(\frac{(k-\ell)h}{m}\right) \\ &= \sum_{h=0}^{m-1} e\left(-\frac{\ell h}{m}\right) \sum_{k=0}^{m-1} (N, k)^{(m)} e\left(\frac{kh}{m}\right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$m(N, \ell)^{(m)} = N + \sum_{h=1}^{m-1} e\left(-\frac{\ell h}{m}\right) o(N) = N + o(N)$$

quand $N \rightarrow \infty$. Il en résulte que $\frac{(N, \ell)^{(m)}}{N} \rightarrow \frac{1}{m}$ quand $N \rightarrow \infty$, et cela pour tout ℓ tel que $0 \leq \ell \leq m-1$; donc, la suite entière a_n est e. r. (mod m), et la condition (5) est suffisante.

D'ailleurs, la théorie de l'équirépartition sur les groupes compacts (cf. P. EYMARD [5]), appliquée au groupe additif abélien discret $\mathbb{Z}/(m)$ des entiers (mod m), dont les caractères sont $\chi_h(k) = e\left(\frac{hk}{m}\right)$, où $h, k = 0, 1, \dots, m-1$, fournit immédiatement le critère (5).

7.2. - I. NIVEN [6] a remarqué que la condition nécessaire d'équirépartition (mod m)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e\left(\frac{a_n}{m}\right) = 0$$

qui, d'après le théorème 3, est suffisante lorsque $m = 2$, est encore suffisante lorsque $m = 3$, mais n'est plus suffisante lorsque $m \geq 4$.

7.3. - Le critère (5) montre aussitôt que si la suite entière a_n est e. r. (mod m), elle est aussi e. r. (mod m') pour tout entier naturel m' diviseur de m .

Mais I. NIVEN [6] établit que, étant donnés deux entiers naturels m, m' tels que m' ne soit pas diviseur de m , il existe une suite entière a_n qui est e. r. (mod m) sans être e. r. (mod m').

7.4. - Le critère (5) montre, par exemple, que la suite entière kn , où $|k|$ est un entier naturel tel que $(|k|, m) = 1$, est e. r. (mod m). Pour $|k| = 1$, il en résulte que la suite entière εn , où $\varepsilon = \pm 1$, est e. r. (mod m) pour tout $m \in \mathbb{Z}^+$.

8. Définition 4.

Soit $E \subset \mathbb{Z}^+$. La suite entière a_n est dite équirépartie (mod E) [e. r. (mod E)] dans \mathbb{Z} si, et seulement si, elle est e. r. (mod m) pour tout $m \in E$.

Si la suite entière a_n est e. r. (mod E), elle est aussi

$$\text{e. r. (mod } \{m' \mid (\exists m) (m' \mid m \in E)\} \text{)} .$$

9. Critère d'équirépartition (mod $\underline{\mathbb{Z}^+}$) dans $\underline{\mathbb{Z}}$.

9.1. - Quand h parcourt $\{1, 2, \dots, m-1\}$ et m parcourt $\{2, 3, \dots\}$, $\frac{h}{m}$ parcourt l'ensemble des rationnels ρ tels que $0 < \rho < 1$; dès lors, le critère (5) donne le théorème suivant :

THÉORÈME 4. - Pour que la suite entière a_n soit e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}^+}$), il faut et il suffit que, pour tout rationnel $\rho \in]0, 1[$, on ait

$$(7) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e(\rho a_n) = 0.$$

Une formulation équivalente de cette condition nécessaire et suffisante est immédiatement : pour tout rationnel ρ non entier, on a (7) (S. UCHIYAMA [8]).

9.2. - Le critère (7) montre, par exemple, que la suite entière $\left[\frac{n}{q}\right]$, où $q \in \underline{\mathbb{Z}} = \{0\}$, est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}^+}$); en effet, supposant pour fixer les idées $q > 0$, on a pour tout $\rho \in \underline{\mathbb{R}}$, quand $N \rightarrow \infty$:

$$\sum_{k=1}^N e(\rho \left[\frac{k}{q}\right]) = O(1) + q \sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{q}\right]} e(\rho k)$$

et pour tout $\rho \in]0, 1[$, d'où $e(\rho) \neq 1$, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{q}\right]} e(\rho k) \right| = \left| \frac{e(\rho \left[\frac{N}{q}\right]) - 1}{e(\rho) - 1} e(\rho) \right| \leq \frac{2}{|e(\rho) - 1|}$$

de sorte que, pour tout $\rho \in]0, 1[$, on a

$$\sum_{k=1}^N e(\rho \left[\frac{k}{q}\right]) = O(1)$$

quand $N \rightarrow \infty$, et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e(\rho \left[\frac{k}{q}\right]) = 0.$$

9.3. - Les suites entières $\varepsilon n + h$, ou $\varepsilon = \pm 1$, $h \in \underline{\mathbb{Z}}$, sont e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}^+}$), et I. NIVEN [6] montre que ce sont là les seules suites polynômes en n à coefficients entiers rationnels qui le soient.

10. Définition 5.

Etant donnés une suite entière p -adique α_n , deux entiers $N \in \mathbb{Z}^+$ et $k \in \mathbb{N}$ et un entier p -adique γ , $(N, \gamma, k)_\alpha$ désigne le nombre des termes α_n tels que $|\alpha_n - \gamma|_p \leq \frac{1}{p^k}$ et $1 \leq n \leq N$.

La suite entière p -adique α_n est dite équirépartie sur \mathbb{Z}_p [e. r. sur \mathbb{Z}_p] si, et seulement si, pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$(8) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N, \gamma, k)_\alpha}{N} = \frac{1}{p^k}$$

(condition d'ailleurs toujours vérifiée pour $k = 0$).

Cette définition s'applique en particulier aux suites entières a_n , puisque $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$. On sait d'ailleurs que \mathbb{Z} est partout dense sur \mathbb{Z}_p .

11. Critère d'équirépartition sur \mathbb{Z}_p pour une suite entière a_n .

11.1. - Soit $\gamma \in \mathbb{Z}_p$, de développement de Hensel

$$\gamma = \sum_0^\infty c_j p^j, \text{ où } 0 \leq c_j \leq p-1 \text{ pour tout } j \in \mathbb{N};$$

soit $k \in \mathbb{N}$, et posons

$$c'_k = \sum_0^{k-1} c_j p^j \quad \text{si } k \geq 1, \quad c'_0 = 0,$$

de sorte que

$$\gamma \equiv c'_k \pmod{p^k} \quad \text{et } 0 \leq c'_k \leq p^k - 1.$$

Soit une suite entière a_n . $(N, \gamma, k)_a$ est le nombre des termes a_n tels que $a_n \equiv c'_k \pmod{p^k}$ et $1 \leq n \leq N$; c'est donc aussi $(N, c'_k)_a^{(p^k)}$. k étant fixé, quand γ parcourt \mathbb{Z}_p , c'_k parcourt $\{0, 1, \dots, p^k - 1\}$; dès lors, quand $N \rightarrow \infty$, pour que

$$\frac{(N, \gamma, k)_a}{N} \rightarrow \frac{1}{p^k}$$

pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il faut et il suffit que

$$\frac{(N, h)_a^{(p^k)}}{N} \rightarrow \frac{1}{p^k}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout entier h tel que $0 \leq h \leq p^k - 1$; autrement dit :

THÉOREME 5. - Pour que la suite entière a_n soit e. r. sur \mathbb{Z}_p , il faut et il suffit qu'elle soit e. r. (mod p^n).

11.2. - Il en résulte que : pour que la suite entière a_n soit e. r. sur \mathbb{Z}_p quel que soit p premier, il suffit qu'elle soit e. r. (mod \mathbb{Z}^+) . Mais cette condition suffisante n'est pas nécessaire ; I. NIVEN [6] le montre en construisant un contre-exemple.

II. Relations entre équirépartition dans \mathbb{R} et équirépartition dans \mathbb{Z} .

1. Propriétés préliminaires.

LEMME 1. - Soient m, k deux entiers naturels ; si la suite u_n est e. r. (mod m), alors la suite entière $[k u_n]$ est e. r. (mod km).

Soit h un entier tel que $0 \leq h \leq km - 1$. Pour que $[k u_n] \equiv h \pmod{km}$, il faut et il suffit que $h \leq k u_n < h + 1 \pmod{km}$, ou encore $\frac{h}{k} \leq u_n < \frac{h+1}{k} \pmod{m}$, c'est-à-dire $\frac{h}{k} \leq r_m(u_n) < \frac{h+1}{k}$. Il en résulte que

$$\frac{1}{N} (N, h)_{[ku]}^{(km)} = \frac{1}{N} (N, \frac{h}{k})_{\frac{h+1}{k}}^{(m)} \rightarrow \frac{1}{km} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

et cela pour tout $h \in \{0, 1, \dots, km - 1\}$; donc la suite entière $[k u_n]$ est e. r. (mod km) .

Il s'ensuit que la suite entière $[k u_n]$ est alors e. r. (mod m) et e. r. (mod k) .

1.2. - En particulier, pour $k = 1$, on obtient : si la suite u_n est e. r. (mod m) , alors la suite entière $[u_n]$ est e. r. (mod m) .

Il en résulte que si la suite u_n est e. r. (mod \mathbb{Z}^+) , alors la suite entière $[u_n]$ est e. r. (mod \mathbb{Z}^+) . Mais la réciproque est fautive ; par exemple, la suite entière $[\frac{n}{q}]$, où $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, est e. r. (mod \mathbb{Z}^+) (cf. I - 9.2), alors que la

suite $\frac{n}{q}$ n'est e. r. (mod m) pour aucun $m \in \underline{\mathbb{Z}}^+$.

1.3. - On vient de rappeler que la suite entière $[\lambda n]$ est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$) lorsque $\lambda^{-1} \in \underline{\mathbb{Z}} - \{0\}$; elle est aussi e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$) lorsque $\lambda \in \underline{\mathbb{R}} - \underline{\mathbb{Q}}$, car alors (cf. I - 5.2) la suite λn est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$). De façon plus précise, I. NIVEN [6] montre, à l'aide d'une étude directe du cas où $\lambda \in \underline{\mathbb{Q}}$, que :

THÉORÈME 6. - Pour que la suite entière $[\lambda n]$, où $\lambda \in \underline{\mathbb{R}}$, soit e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$), il faut et il suffit que $\lambda \in \underline{\mathbb{R}} - \underline{\mathbb{Q}}$ ou que $\lambda^{-1} \in \underline{\mathbb{Z}} - \{0\}$.

Par ailleurs, Th. SKOLEM [7] a démontré que tout entier naturel est de l'une, et de l'une seulement, des deux formes $[\frac{1+\sqrt{5}}{2}k]$, $[\frac{3+\sqrt{5}}{2}k]$, où $k \in \underline{\mathbb{Z}}^+$, et ce résultat curieux a conduit Th. BANG [2] à étudier les propriétés spéciales des suites entières $[\lambda n]$, où $\lambda \in \underline{\mathbb{R}}$.

LEMME 2. - Soit k un entier naturel ; pour que la suite entière $[k u_n]$ soit e. r. (mod k), il faut et il suffit que les fonctions inférieure et supérieure de répartition (mod 1) de la suite u_n , soient $\underline{\chi}_u$ et $\bar{\chi}_u$, vérifient, pour tout $h \in \{0, 1, \dots, k\}$:

$$(9) \quad \underline{\chi}_u\left(\frac{h}{k}\right) = \bar{\chi}_u\left(\frac{h}{k}\right) = \frac{h}{k}.$$

Puisque $\underline{\chi}_u$ et $\bar{\chi}_u$ sont croissantes sur I , une formulation équivalente de cette condition est

$$\frac{1}{k} [kx] \leq \underline{\chi}_u(x) \leq \bar{\chi}_u(x) \leq \frac{1}{k} [kx]^* \quad \text{sur } I.$$

Pour que la suite entière $[k u_n]$ soit e. r. (mod k), il faut et il suffit que la suite $v_n = \frac{1}{k} [k u_n]$ admette la fonction de répartition (mod 1)

$$\underline{\chi}_v(x) = \frac{1}{k} [kx]^*$$

qui présente un saut égal à $\frac{1}{k}$ en chacun des points $0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}$; de façon équivalente, puisque $v_n \in \underline{\mathbb{Z}}/k$, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout $h \in \{0, 1, \dots, k\}$:

$$(10) \quad \underline{\chi}_v\left(\frac{h}{k}\right) = \bar{\chi}_v\left(\frac{h}{k}\right) = \frac{h}{k}.$$

Or, $v_n = u_n - \frac{1}{k} \{k u_n\}$, d'où

$$u_n \equiv \{v_n\} + \frac{1}{k} \{k u_n\} \pmod{1};$$

puisque $0 \leq \{v_n\} \leq 1 - \frac{1}{k}$ et $0 \leq \frac{1}{k} \{k u_n\} < \frac{1}{k}$, cette congruence entraîne

$$\{u_n\} = \{v_n\} + \frac{1}{k} \{k u_n\}.$$

Soit h un entier tel que $1 \leq h \leq k$. Pour que l'on ait $0 \leq \{u_n\} < \frac{h}{k}$, il faut et il suffit que l'on ait $-\frac{1}{k} \{k u_n\} \leq \{v_n\} < \frac{h}{k} - \frac{1}{k} \{k u_n\}$, ou encore, de façon équivalente, puisque $v_n \in \mathbb{Z}/k$, que l'on ait $0 \leq \{v_n\} < \frac{h}{k}$. Il en résulte que, pour $h = 0, 1, \dots, k$, on a

$$\langle N, 0, \frac{h}{k} \rangle_u = \langle N, 0, \frac{h}{k} \rangle_v$$

et

$$\chi_u\left(\frac{h}{k}\right) = \chi_v\left(\frac{h}{k}\right) \quad \text{et} \quad \bar{\chi}_u\left(\frac{h}{k}\right) = \bar{\chi}_v\left(\frac{h}{k}\right).$$

Ces dernières relations montrent que (9) et (10) sont équivalentes, ce qui établit la proposition (qui ne présente d'intérêt que pour $k \geq 2$).

2. Condition nécessaire et suffisante d'équirépartition (mod 1), (mod \mathbb{Z}^+) dans \mathbb{R} .

2.1. **THÉORÈME 7.** - Pour que la suite u_n soit e. r. (mod 1), il faut et il suffit qu'il existe une application strictement croissante φ de \mathbb{Z}^+ dans \mathbb{Z}^+ telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^+$, la suite entière $[\varphi(k) u_n]$ soit e. r. (mod $\varphi(k)$).

L'application du lemme 1 dans le cas particulier $m = 1$ montre que la condition est nécessaire.

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, on a d'après le lemme 2, pour tout $x \in I$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$\frac{1}{\varphi(k)} [\varphi(k) x] \leq \chi_u(x) \leq \bar{\chi}_u(x) \leq \frac{1}{\varphi(k)} [\varphi(k) x]^* \leq \frac{1}{\varphi(k)} ([\varphi(k) x] + 1).$$

Quand $k \rightarrow \infty$, alors $\varphi(k) \rightarrow \infty$ et les inégalités précédentes montrent que $\chi_u(x)$ et $\bar{\chi}_u(x)$ tendent l'un et l'autre vers x ; ainsi, la suite u_n admet la fonction de répartition (mod 1) $\chi_u(x) = x$, autrement dit elle est e. r. (mod 1), et la condition est suffisante.

2.2. - On a de même :

Pour que la suite u_n soit e. r. (mod \mathbb{Z}^+) , il faut et il suffit qu'il existe une application strictement croissante φ de \mathbb{Z}^+ dans \mathbb{Z}^+ telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^+$, la suite entière $[\varphi(k)u_n]$ soit e. r. (mod \mathbb{Z}^+) .

La nécessité de la condition résulte encore du lemme 1. D'autre part, si cette condition est satisfaite, étant donné $m \in \mathbb{Z}^+$, la suite entière $[\frac{m\varphi(k)u_n}{m}]$ est e. r. (mod $m\varphi(k)$) pour tout $k \in \mathbb{Z}^+$, donc (théorème 7) la suite $\frac{u_n}{m}$ est e. r. (mod 1) ; puisqu'il en est ainsi pour tout $m \in \mathbb{Z}^+$, la suite u_n est e. r. (mod \mathbb{Z}^+) , et la condition est suffisante.

3. Condition nécessaire et suffisante d'équirépartition (mod \mathbb{R}^+) dans \mathbb{R} .

THÉORÈME 8. - Pour que la suite u_n soit e. r. (mod \mathbb{R}^+) , il faut et il suffit que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la suite entière $[t u_n]$ soit e. r. (mod \mathbb{Z}^+) .

Si la suite u_n est e. r. (mod \mathbb{R}^+) , le critère (3) montre que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la suite tu_n l'est aussi, donc la suite entière $[t u_n]$ est e. r. (mod \mathbb{Z}^+) , et la condition annoncée est nécessaire.

Montrons maintenant que cette condition est suffisante. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et tout rationnel $r \in]0, 1[$:

$$A_N(r, t) = \sum_1^N e(r[t u_n]) = \sum_1^N e(rt u_n) e(-r\{t u_n\})$$

et

$$B_N(r, t) = \sum_1^N e(rt u_n) (1 - e(-r\{t u_n\}))$$

de sorte que

$$\sum_1^N e(rt u_n) = A_N(r, t) + B_N(r, t) .$$

On a

$$|B_N(r, t)| \leq \sum_1^N |1 - e(-r\{t u_n\})| \leq 2\pi r\{t u_n\}^N < 2\pi rN$$

et dès lors

$$|\frac{1}{N} \sum_1^N e(rt u_n)| \leq |\frac{1}{N} A_N(r, t)| + |\frac{1}{N} B_N(r, t)| < |\frac{1}{N} A_N(r, t)| + 2\pi r .$$

La suite entière $[t u_n]$ étant e. r. $(\text{mod } \underline{\mathbb{Z}}^+)$, le critère (7) montre que $\frac{1}{N} A_N(r, t) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$; donc, pour tout $t \in \underline{\mathbb{R}}^+$ et tout rationnel $r \in]0, 1[$, on a

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e(r t u_n) \right| \leq 2\pi r .$$

Soit $\rho \in \underline{\mathbb{R}}^+$ et prenons $t = \frac{\rho}{r}$ avec $0 < r < 1$; on a alors, pour tout $t > \rho$:

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e(\rho u_n) \right| \leq \frac{2\pi\rho}{t}$$

ce qui exige, puisque t est arbitrairement grand, qu'on ait

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e(\rho u_n) = 0 .$$

Comme il en est ainsi pour tout $\rho \in \underline{\mathbb{R}}^+$, le critère (3) montre que la suite u_n est e. r. $(\text{mod } \underline{\mathbb{R}}^+)$.

III. Conditions suffisantes d'équirépartition dans $\underline{\mathbb{R}}$ et applications.

1. Condition suffisante d'équirépartition $(\text{mod } \underline{\mathbb{R}}^+)$ dans $\underline{\mathbb{R}}$ de Fejér.

1.1. - Un théorème classique de Fejér conclut à l'équirépartition $(\text{mod } 1)$ d'une suite $f(n)$ sous des hypothèses sur f qui sont invariantes par homothétie positive sur f ; d'après I - 3.1, il assure donc du même coup l'équirépartition $(\text{mod } \underline{\mathbb{R}}^+)$ de cette suite $f(n)$. Ainsi :

THÉORÈME 9. - Si f est une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de ∞ et sur $\underline{\mathbb{Z}}^+$, dérivable au voisinage de ∞ , si $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ et si $\lim_{x \rightarrow \infty} x |f'(x)| = \infty$, alors la suite $f(n)$ est e. r. $(\text{mod } \underline{\mathbb{R}}^+)$.

Il suffit d'ailleurs, pour l'établir directement, de reprendre une démonstration classique du théorème de Fejér à partir de la formule sommatoire d'Euler (cf. [3], III - 1.2, p. 16-17, avec ici $F(t) = e(\rho f(t))$, où $\rho \in \underline{\mathbb{R}}^+$) et d'appliquer le critère (3).

1.2. - Il en résulte que : sous les hypothèses de Fejér sur f , la suite entière $[f(n)]$ est e. r. $(\text{mod } \underline{\mathbb{Z}}^+)$, donc aussi e. r. sur $\underline{\mathbb{Z}}_p$ pour tout premier p .

1.3. - Application. - Prenant $f(x) = \lambda x^\alpha \log^\beta x$, on trouve que la suite
 $\lambda n^\alpha \log^\beta n$, où α, β, λ réels et $\lambda \neq 0$, est e. r. (mod \mathbb{R}^+) si

$0 < \alpha < 1$ ou $(\alpha = 0 \text{ et } \beta > 1)$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta < 0)$.

Dans les mêmes cas, la suite entière $[\lambda n^\alpha \log^\beta n]$ est e. r. (mod \mathbb{Z}^+), donc
aussi e. r. sur \mathbb{Z}_p pour tout premier p .

2. Condition suffisante d'équirépartition (mod \mathbb{R}^+), (mod \mathbb{Z}^+) dans \mathbb{R} de Van der Corput.

2.1. - En appliquant le théorème classique de Van der Corput concernant l'équi-
 répartition (mod 1) d'une suite u_n à la famille de suites $\frac{u_n}{w}$, où w parcourt
 \mathbb{R}^+ [resp. \mathbb{Z}^+], on obtient un théorème analogue concernant l'équirépartition
 (mod \mathbb{R}^+) [resp. (mod \mathbb{Z}^+)] de cette suite u_n . Ainsi :

THÉORÈME 10. - Si, pour tout $h \in \mathbb{Z}^+$, la suite $u_{n+h} - u_n$ est e. r. (mod \mathbb{R}^+)
 [resp. (mod \mathbb{Z}^+)], alors la suite u_n est e. r. (mod \mathbb{R}^+) [resp. (mod \mathbb{Z}^+)].

Les généralisations bien connues du théorème classique s'étendent de la même
 manière.

2.2. - Il en résulte que : si, pour tout $h \in \mathbb{Z}^+$, la suite $u_{n+h} - u_n$ est
e. r. (mod \mathbb{Z}^+), alors la suite entière $[u_n]$ est e. r. (mod \mathbb{Z}^+), donc aussi
e. r. sur \mathbb{Z}_p pour tout premier p .

2.3. - Applications.

a. L'argument classique permet d'établir, à l'aide du théorème 10, que :

Si P est une fonction polynôme à coefficients réels de degré ≥ 1 dont l'un
au moins des coefficients, autre que le terme constant, est irrationnel, alors la
suite $P(n)$ est e. r. (mod \mathbb{Z}^+).

On le montre d'abord dans le cas où le coefficient, soit a_r , du monôme de plus
 haut degré dans $P(n)$ est irrationnel, en remarquant que la propriété est alors
 vraie pour $r = 1$ (cf. I - 5.2) et en achevant par récurrence sur r ; puis on
 traite le cas où a_r est rationnel en distinguant le premier coefficient irration-
nel, soit a_s , figurant dans $P(n)$.

L'énoncé précédent se déduit d'ailleurs aussitôt de l'énoncé correspondant rela-
 tif à l'équirépartition (mod 1) de la suite $P(n)$ en notant que les hypothèses

sur P qui y figurent sont invariantes par homothétie positive rationnelle sur P .

Dans les mêmes conditions, la suite entière $[P(n)]$ est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$), donc aussi e. r. sur $\underline{\mathbb{Z}}_p$ pour tout premier p .

b. En combinant l'application III - 1.3 précédente pour $\beta = 0$ avec le théorème 10, on obtient :

La suite λn^α , où $\lambda \in \underline{\mathbb{R}} - \{0\}$ et $\alpha \in \underline{\mathbb{R}}^+ - \underline{\mathbb{Z}}^+$, est e. r. (mod $\underline{\mathbb{R}}^+$). Dans les mêmes conditions, la suite entière $[\lambda n^\alpha]$ est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$), donc aussi e. r. sur $\underline{\mathbb{Z}}_p$ pour tout premier p .

3. Condition suffisante d'équirépartition (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$) dans $\underline{\mathbb{R}}$ presque partout de Koksma.

3.1. - Un théorème général classique de Koksma conclut à l'équirépartition (mod 1) d'une suite paramétrée $f_n(t)$ pour presque tous les $t \in (\alpha, \beta)$ sous des hypothèses sur f_n qui sont invariantes par homothétie positive sur f_n ; en l'appliquant à la famille de suites $\frac{f_n(t)}{k}$, où k parcourt $\underline{\mathbb{Z}}^+$, on voit, puisqu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure - \mathcal{E} nulle est elle-même de mesure - \mathcal{E} nulle, qu'il assure du même coup l'équirépartition (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$) de cette suite $f_n(t)$ pour presque tous les $t \in (\alpha, \beta)$. D'autre part, les hypothèses faites sur f_n sont également invariantes si l'on effectue sur l'indice n une permutation de $\underline{\mathbb{Z}}^+$; une telle permutation g étant choisie, le théorème classique assure donc finalement l'équirépartition (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$) de la suite $f_{g(n)}(t)$ pour presque tous les $t \in (\alpha, \beta)$. Ainsi :

THÉORÈME 11. - Soient α, β, c trois nombres réels tels que $\alpha < \beta$ et $c > 0$, soit g une permutation de $\underline{\mathbb{Z}}^+$, et soit une suite f_n de fonctions à valeurs réelles définies sur (α, β) . Si la fonction $\varphi_{q,r} = f_q - f_r$, où $q \neq r$, est dérivable sur (α, β) , si sa fonction dérivée $\varphi'_{q,r}$ est monotone et de signe constant sur (α, β) et si $|\varphi'_{q,r}(t)| \geq c$ sur (α, β) , alors la suite $f_{g(n)}(t)$ est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}}^+$) pour presque tous les $t \in (\alpha, \beta)$.

Il suffit d'ailleurs, pour l'établir directement, de reprendre la démonstration habituelle du théorème de Koksma (cf. [3], IV - 1.1, p. 21-24, avec ici

$\sigma_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e(\rho f_n(t))$, où $\rho \in \underline{\mathbb{Q}}^+$) et d'appliquer le critère (3); l'ensemble des $t \in (\alpha, \beta)$ pour lesquels ce critère se trouve éventuellement en défaut est

une réunion dénombrable d'ensembles de mesure - \mathcal{L} nulle, donc est lui-même de mesure - \mathcal{L} nulle.

3.2. - Il en résulte que : sous les hypothèses de Koksma sur la suite de fonctions f_n , la suite entière $[f_{g(n)}(t)]$ est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}^+}$) pour presque tous les $t \in (\alpha, \beta)$, donc aussi e. r. sur tous les $\underline{\mathbb{Z}_p}$ pour presque tous les $t \in (\alpha, \beta)$.

3.3. - Applications. - Indiquons seulement les extensions suivantes de deux résultats métriques simples :

a. Soit λ réel tel que $|\lambda| > 1$; pour presque tous les t réels, on a à la fois :

1° La suite $t\lambda^n$ est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}^+}$) ;

2° La suite entière $[t\lambda^n]$ est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}^+}$) et e. r. sur tous les $\underline{\mathbb{Z}_p}$.

b. Soit λ réel non nul ; pour presque tous les t réels tels que $|t| \geq 1$, on a à la fois :

1° La suite λt^n est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}^+}$) ;

2° La suite entière $[\lambda t^n]$ est e. r. (mod $\underline{\mathbb{Z}^+}$) et e. r. sur tous les $\underline{\mathbb{Z}_p}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMMANN (André). - Quelques propriétés concernant la répartition des suites de nombres module un (Thèse Sc. math. Univ. Genova, 1947, 39 p. multigr.).
- [2] BANG (Thøger). - On the sequence $[n\alpha]$, $n = 1, 2, \dots$, Math. Scand., t. 5, 1957, p. 69-76.
- [3] CHAUVINEAU (Jean). - Equirépartition et équirépartition uniforme modulo 1, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 3, 1961/62, n° 7, 35 p.
- [4] DELANGE (Hubert). - Distribution des valeurs de certaines fonctions arithmétiques, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 2, 1960/61, n° 2, 25 p.
- [5] EYMARD (Pierre). - Suites équiréparties dans un groupe compact, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 14, 1960/61, n° 3, 11 p.
- [6] NIVEN (Ivan). - Uniform distribution of sequences of integers, Trans. Amer. math. Soc., t. 98, 1961, p. 52-61.
- [7] SKOLEM (Thoralf). - On certain distributions of integers in pairs with given differences, Math. Scand., t. 5, 1957, p. 57-68.
- [8] UCHIYAMA (Saburô). - On the uniform distribution of sequences of integers, Proc. Jap. Acad., t. 37, 1961, p. 605-609.