Charles Pisot

Une famille normale de fractions rationnelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. nº 7, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A6_0>

UNE FAMILLE NORMALE DE FRACTIONS RATIONNELLES

par Charles PISOT

Il est bien connu que l'ensemble des fonctions holomorphes et bornées par 1 dans $|z| < 1$ est une famille normale au sens de Paul MONTEL, c'est-à-dire c'est un ensemble compact pour la convergence uniforme dans tout compact situé dans $|z| < 1$.

Nous nous proposons de montrer qu'il y a des sous-ensembles de l'ensemble précédent, formés uniquement de fractions rationnelles à coefficients entiers, qui constituent déjà une famille normale.

Nous poserons

$$Q(z) = q_0 + q_1 z + \dots + q_s z^s$$

où $q_0, \dots, q_s$ sont des entiers rationnels, q_0 étant fixe et $Q(z)$ n'ayant aucun zéro dans $|z| \leqslant 1$.

Soit $A(z)$ un polynôme à coefficients entiers, premier à Q, tel que $|A(z)| \leqslant |Q(z)|$ sur $|z| = 1$. La fraction rationnelle $f(z) = A(z)/Q(z)$ est alors holomorphe et vérifie $|f(z)| \leqslant 1$ dans $|z| \leqslant 1$. Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

le développement de $f(z)$ en série de Taylor ; cette série converge pour $|z| \leqslant 1$ et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \leqslant 1 .$$

En considérant le développement en série de Taylor de

$$q_0 f(q_0 z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n ,$$

on voit que les coefficients w_n sont des entiers rationnels donc les coefficients u_n sont des nombres rationnels tels que $q_0^{n+1} u_n = w_n$ soient des entiers.

Considérons alors un ensemble infini de telles fractions rationnelles ; d'après le résultat rappelé plus haut, c'est une famille normale de fonctions holomorphes dans $|z| < 1$, on peut donc en extraire une suite partielle

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{k,n} z^n$$

convergeant dans tout compact situé dans $|z| < 1$ vers une fonction limite

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

qui est holomorphe et bornée par 1 dans $|z| < 1$. Nous allons chercher sous quelles conditions on peut affirmer que $\varphi(z)$ est une fraction rationnelle de la famille considérée. On a d'abord, pour tout n fixé, $\lim_{k\to\infty} u_{n,k} = u_n$; mais $q_0^{n+1} u_{n,k}$ est entier, donc $u_{n,k} = u_n$ pour $k \geqslant K(n)$. D'autre part $|\varphi(z)| \leqslant 1$ dans $|z| < 1$ entraîne

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \leqslant 1 .$$

Pour démontrer que $\varphi(z)$ est une fraction rationnelle, nous considérons le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n+1} \\ \cdots & & & \\ u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix}$$

KRONECKER a montré que $D_n = 0$ pour $n \geqslant N$ était une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi(z)$ soit une fraction rationnelle.

L'inégalité de Hadamard pour les déterminants donne

$$|D_n|^2 \leqslant \prod_{j=0}^{n} (u_j^2 + u_{j+1}^2 + \cdots + u_{j+n}^2) .$$

Posons $r_j^2 = u_j^2 + u_{j+1}^2 + \cdots$, alors $\lim_{j\to\infty} r_j = 0$ et l'on a

$$|D_n| \leqslant r_0\, r_1 \cdots r_n .$$

Quelque petit que soit ε, on peut trouver m tel que $r_j \leqslant \varepsilon$ pour $n > m$, alors

$$|D_n| \leqslant r_0 \cdots r_m\, \varepsilon^{n-m} = C_\varepsilon\, \varepsilon^n$$

avec $C_\varepsilon = r_0 \cdots r_m\, \varepsilon^{-m}$ indépendant de n.

Toutefois cette majoration est insuffisante pour conclure, car la seule chose que l'on puisse affirmer a priori est le fait que $q_0^{(n+1)^2} D_n$ est un entier. Cependant si $|q_0| = 1$, tous les u_n seraient entiers, mais $|\varphi(z)| \leqslant 1$ montre alors que ou bien $\varphi(z) = 0$, ou bien $\varphi(z) = \pm z^m$ pour un certain m.

Nous supposerons donc dans la suite que $|q_0| \geq 2$. Pour majorer $|D_n|$, nous allons utiliser l'analyse p-adique. Nous désignons par $|u|_p$ la valeur absolue p-adique, définie par $|p|_p = p^{-1}$ et $|p'|_p = 1$ si p' est un nombre premier distinct du nombre premier p . Nous désignons par Q_p la complétion du corps des rationnels par cette valeur absolue et par $\hat{\Omega}_p$ la complétion de la clôture algébrique Ω_p de Q_p .

Soit alors p un nombre premier divisant q_0 ; supposons que

$$\max_{0 \leq j \leq s} |q_j|_p = |q_1|_p$$

c'est-à-dire que tout q_j est divisible par une puissance de p au moins égale à celle qui divise q_1 , et que ceci ait lieu pour tout p divisant q_0 .

Revenons à la fraction rationnelle $f(z)$. Le polygone de Newton de $Q(z)$ montre que $Q(z)$ a, dans Ω_p , au plus un zéro, soit $1/\alpha$ dans $|z|_p < 1$; si ce zéro existe, comme il est unique dans $|z|_p < 1$, il appartient à Q_p .

Posons

$$f^*(z) = (1 - \alpha z)\, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^* z^n \quad \text{si } \alpha \text{ existe}$$

et

$$f^*(z) = f(z) \qquad \text{si } \alpha \text{ n'existe pas.}$$

Dans le premier cas $u_n^* = u_n - \alpha u_{n-1}$ pour $n \geq 1$, $u_0^* = u_0$ et dans le deuxième $u_n^* = u_n$ quel que soit n .

Dans $\hat{\Omega}_p$, $f^*(z)$ converge pour tout z avec $|z|_p = r < 1$; on a dans le premier cas $\left|\frac{Q(z)}{1 - \alpha z}\right|_p = |q_0|_p$ et dans le deuxième $|Q(z)|_p = |q_0|_p$ pour $|z|_p = r < 1$. Enfin pour $|z|_p = r < 1$, on a

$$|A(z)|_p \leq 1 .$$

On a donc

$$|f^*(z)|_p \leq |q_0|_p^{-1} \quad \text{pour} \quad |z|_p = r < 1 .$$

Les inégalités de Cauchy donnent alors

$$|u_n^*|_p \leq |q_0|_p^{-1}\, r^{-n}$$

valable pour tout $r < 1$. Mais les valeurs absolues p-adiques sont partout denses dans $\hat{\Omega}_p$, on peut donc faire tendre r vers 1 dans les inégalités précédentes, d'où

$$|u_n^*|_p \leq |q_0|_p^{-1} .$$

Mais on a

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 - \alpha u_0 & \cdots & u_n - \alpha u_{n-1} \\ u_1 & u_2 - \alpha u_1 & \cdots & u_{n+1} - \alpha u_n \\ \cdots & & & \\ u_n & u_{n+1} - \alpha u_n & \cdots & u_{2n} - \alpha u_{2n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0^* & u_1^* & \cdots & u_n^* \\ u_1^* & u_2^* - \alpha u_1^* & \cdots & u_{n+1}^* - \alpha u_n^* \\ \cdots & & & \\ u_n^* & u_{n+1}^* - \alpha u_n^* & \cdots & u_{2n}^* - \alpha u_{2n-1}^* \end{vmatrix}$$

D'où

$$|D_n|_p \leqslant |q_0|_p^{-(2n+1)}$$

car, si α existe,

$$|\alpha|_p = |q_1|_p / |q_0|_p \leqslant |q_0|_p^{-1} \quad \text{donc} \quad |u_n^* - \alpha u_{n-1}^*|_p \leqslant |q_0|_p^{-2}$$

et si α n'existe pas

$$|u_n|_p = |u_n^*|_p \leqslant |q_0|_p^{-1} \quad \text{donc} \quad |D_n|_p \leqslant |q_0|_p^{-(n+1)} \leqslant |q_0|_p^{-(2n+1)} .$$

Or D_n est un nombre rationnel dont le dénominateur est une puissance de q_0, et d'autre part $\prod_{p \mid q_0} |q_0|_p^{-1} = |q_0|$, on a donc

$$\prod_{p \mid q_0} |D_n|_p \leqslant |q_0|^{2n+1} .$$

On a d'autre part, si α existe, $1 < |\alpha|_p \leqslant |q_0|_p^{-1}$. Mais Q_p est localement compact, On peut donc extraire de la suite des $f_k(z)$ une suite partielle pour laquelle les α ont des limites et cela pour chaque p pour lequel les α existent dans une infinité de $f_k(z)$. Nous noterons encore $f_k(z)$ la suite extraite et α_k, les α tendant dans Q_p vers une limite notée α. Nous désignerons par $D_{k,n}$ les déterminants de Kronecker des $f_k(z)$ et par D_n ceux de la fonction limite $\varphi(z)$.

Comme $u_{k,n} = u_n$ pour $k \geqslant K(n)$, on aura $D_n = D_{k,n}$ pour $k \geqslant \max_{0 \leqslant j \leqslant 2n} K(j)$, donc on a

$$\prod_{p \mid q_0} |D_n|_p \leqslant |q_0|^{2n+1}$$

et par suite

$$|D_n| \prod_{p \mid q_0} |D_n|_p \leqslant C_\varepsilon \, \varepsilon^n \, |q_0|^{2n+1} .$$

En choisissant $\varepsilon < |q_0|^{-2}$, le membre de droite tend vers zéro pour n augmentant indéfiniment ; donc

$$D_n = 0 \qquad \text{pour} \quad n \geqslant N$$

et $\varphi(z)$ est une <u>fraction rationnelle</u>, $\varphi(z) = A(z)/Q(z)$ bornée par 1 dans $|z| < 1$, donc $|A(z)| \leq |Q(z)|$ pour $|z| = 1$ et $Q(z)$ n'a pas de zéro dans $|z| \leq 1$.

Enfin $|f_k^*(z)|_p \leq |q_0|_p^{-2}$ dans $|z|_p < 1$, et $\lim_{k\to\infty} |u_{k,n}^* - u_n^*|_p = 0$, car $u_{k,n} = u_n$ pour $k \geq K(n)$ et $|\alpha_k - \alpha|_p \to 0$. Par suite, dans $\hat{\Omega}_p$ et dans $|z|_p \leq r < 1$, les $f_k^*(z)$ convergent uniformément vers une fonction limite [2]. Il en résulte que dans Ω_p, le polynôme $Q(z)$ a au plus un zéro dans $|z|_p < 1$, c'est-à-dire $\max_{0\leq j\leq s} |q_j|_p = |q_1|_p$. Ainsi $\varphi(z)$ appartient à la famille de fractions rationnelles $f(z)$ considérée. Nous avons donc l'énoncé suivant :

THÉORÈME. - <u>Soit</u> $Q(z) = q_0 + q_1 z + \dots + q_s z^s$ <u>un polynôme à coefficients entiers rationnels, n'ayant aucun zéro dans</u> $|z| \leq 1$. <u>Soit</u> $A(z)$ <u>un polynôme à coefficients entiers rationnels, premier à</u> $Q(z)$ <u>et tel que</u> $|A(z)| \leq |Q(z)|$ <u>pour</u> $|z| = 1$. <u>Posons</u> $f(z) = A(z)/Q(z)$.

<u>L'ensemble des</u> $f(z)$ <u>forme une famille normale dans</u> $|z| < 1$ <u>lorsque</u> q_0 <u>est un entier fixe avec</u> $|q_0| \geq 2$, <u>et que, pour tout nombre premier</u> p <u>divisant</u> q_0, <u>on a</u> $|q_1|_p = \max_{0\leq j\leq s} |q_j|_p$.

<u>Remarques</u>.

1° Si $Q(z)$ est donné, il existe toujours des polynômes $A(z)$ avec les propriétés indiquées ; en effet $A(z) = z^s Q(1/z)$ est un tel polynôme, ses zéros sont dans $|z| < 1$, donc il est bien premier à Q.

2° L'ensemble des $f(z)$ contient a priori des constantes de la forme a_0/q_0, avec $|a_0| \leq |q_0|$ et éventuellement des polynômes.

La dernière remarque suggère la question de savoir s'il est possible d'obtenir une famille normale formée uniquement de véritables fractions rationnelles. La réponse est fournie par le lemme suivant :

LEMME : <u>Si pour toutes les fonctions de la famille, on a</u> $|u_0|_p > 1$, <u>alors toutes ces fonctions ont dans</u> Ω_p <u>effectivement au moins un pôle</u> $1/\alpha$ <u>avec</u> $|\alpha|_p > 1$.

D'après le polygone de Newton, on voit que, si $1/|\alpha|_p < |z|_p = r < 1$, on a $|Q(z)|_p = r^{-1}$ et $|A(z)|_p \leq 1$, donc $|f(z)|_p \leq r^{-1}$.

D'autre part, on peut écrire

$$f(z) = \frac{\lambda}{1 - \alpha z} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n$$

$$f(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\alpha z)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n$$

est donc le développement en série de Laurent de $f(z)$ dans $1/|\alpha|_p < |z|_p < 1$. On déduit des inégalités de Cauchy que $|\varepsilon_0|_p \leqslant r^{-1}$ et, si $r \to 1$, $|\varepsilon_0|_p \leqslant 1$. Or $u_0 = \lambda + \varepsilon_0$; par suite, si $|u_0|_p > 1$, on a $|\lambda|_p = |u_0|_p > 1$. Comme par ailleurs, on a aussi $|\lambda/\alpha|_p \leqslant r^{-1} . r = 1$, on a $1 < |\lambda|_p \leqslant |\alpha|_p$.

<u>Conséquence</u>. - Les fonctions limites d'une telle famille vérifient elles aussi $|u_0|_p > 1$, car $|u_0|_p > 1$ signifie en réalité $|u_0|_p \geqslant p$, donc le nombre λ limite ne peut être nul, et le pôle limite $1/\alpha$ existe effectivement.

Or, si $|u_0| < 1$, on a $|A(0)| < |q_0|$, donc il existe au moins un nombre premier p divisant q_0 avec une puissance strictement inférieure à celle qui divise q_0, donc pour lequel $|u_0|_p > 1$, le lemme s'applique alors.

Si $|u_0| = 1$, comme $|f(z)| \leqslant 1$ et que $f(z)$ est holomorphe dans $|z| < 1$, le principe du maximum montre que $f(z) = u_0$, c'est donc le seul cas où $f(z)$ n'est pas une véritable fraction rationnelle. On peut donc énoncer :

COMPLÉMENT AU THÉORÈME. - <u>En écartant les constantes</u> ± 1 <u>pour</u> $f(z)$, <u>la famille normale des fonctions</u> $f(z)$ <u>ne contient que de véritables fractions rationnelles</u>.

Le cas particulier du théorème où $q_0 = p^m$, $m \geqslant 1$ entier, q_1 premier à q_0 est une forme équivalente d'un résultat énoncé par C. CHABAUTY [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHABAUTY (Claude). - Sur la répartition modulo un de certaines suites p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.

[2] DWORK (Bernard). - On the zeta function of a hypersurface. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 12 ; p. 5-68).