Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Charles Pisot

Généralisation à deux variables, par Max Schiffer, d'un théorème de Pólya-Carlson

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. nº 5, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A4_0>

GÉNÉRALISATION À DEUX VARIABLES, PAR MAX SCHIFFER, D'UN THÉORÈME DE PÓLYA-CARLSON

[D'après une conférence de G. PÓLYA, à Philadelphia, le 7 février 1962]

par Charles PISOT

Diamètre transfini d'un ensemble compact de $\underset{\sim}{C}$.

La notion de diamètre transfini est due à FEKETE [2]. Soit A un ensemble compact de $\underset{\sim}{C}$, on définit le diamètre $d(A)$ de A par $d(A) = \max |z_1 - z_2|$ pour $z_1 \in A$, $z_2 \in A$. Plus généralement, posons

$$d_n(A) = d_n = \max \prod_{j \neq k} |z_j - z_k|$$

pour $j , k = 1 , \ldots , n$ et $z_j \in A$, $z_k \in A$.

On a donc

$$d_n = \max |V(z_1 , \ldots , z_n)|^2 \quad \text{où} \quad V(z_1 , \ldots , z_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ \ldots & & & \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Or

$$d_n = |z_1 - z_2|^2 \ldots |z_1 - z_n|^2 \, |V(z_2 , \ldots , z_n)|^2$$

$$\leqslant |z_1 - z_2|^2 \ldots |z_1 - z_n|^2 \, d_{n-1} .$$

En multipliant les inégalités analogues obtenues en remplaçant z_1 par $z_2 , \ldots , z_n$, on obtient

$$d_n^n \leqslant d_n^2 (d_{n-1})^n \ ; \text{ ou encore } \quad (d_n)^{1/(n(n-1))} \leqslant (d_{n-1})^{1/((n-1)(n-2))} \ .$$

La suite des nombres positifs $(d_n)^{1/(n(n-1))}$ est décroissante ; elle a donc une limite et nous poserons :

DÉFINITION. - On appelle diamètre transfini d'un ensemble compact A de $\mathbb{C}$ le nombre $\tau(A) = \lim_{n\to\infty} (d_n(A))^{1/(n(n-1))}$ où

$$d_n(A) = \max |V(z_1 , \ldots , z_n)|^2 \quad \text{pour} \quad z_j \in A \ , \quad j = 1 , \ldots , n \ .$$

THÉORÈME de Max Schiffer. - Soit

$$F(x , y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{x^{m+1} \, y^{n+1}}$$

une série à deux variables complexes : $x \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C}$ et $a_{m,n} \in \mathbb{C}$. Supposons que F soit holomorphe et uniforme lorsque, à la fois, $x \notin A$ et $y \notin B$, où A et B sont deux ensembles compacts. Alors on a

$$\limsup_{n\to\infty} |D_n|^{2/n^2} \leqslant \tau(A) \ \tau(B)$$

où

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{0,0} & \cdots & a_{0,n-1} \\ \cdots & & \\ a_{n-1,0} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

A et B étant compacts, on peut entourer A et B de courbes analytiques Γ_A , Γ_B de longueurs finies, telles que $\tau(\Gamma_A) \leqslant \tau(A) + \varepsilon$, $\tau(\Gamma_B) \leqslant \tau(B) + \varepsilon$ [2], [4]. Alors il vient :

$$a_{n,m} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_A} \int_{\Gamma_B} F(x , y) \, x^m \, y^n \, dx \, dy \ .$$

Etablissons d'abord un lemme préliminaire.

LEMME. - Soient $\varphi_1 , \dots , \varphi_n , \psi_1 , \dots , \psi_n$ des fonctions d'une variable complexe ; soit Γ un chemin d'intégration. Alors on a l'identité :

$$\begin{vmatrix} \int_\Gamma \varphi_1(z)\, \psi_1(z)\, dz & \dots & \int_\Gamma \varphi_1(z)\, \psi_n(z)\, dz \\ & \dots & \\ \int_\Gamma \varphi_n(z)\, \psi_1(z)\, dz & \dots & \int_\Gamma \varphi_n(z)\, \psi_n(z)\, dz \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{n!} \int_\Gamma \dots \int_\Gamma \begin{vmatrix} \varphi_1(z_1) & \dots & \varphi_1(z_n) \\ & \dots & \\ \varphi_n(z_1) & \dots & \varphi_n(z_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1(z_1) & \dots & \psi_1(z_n) \\ & \dots & \\ \psi_n(z_1) & \dots & \psi_n(z_n) \end{vmatrix} dz_1 \dots dz_n .$$

Démonstration. - En développant les déterminants qui figurent dans le second membre de l'identité, celle-ci s'écrit :

$$\frac{1}{n!} \int_\Gamma \dots \int_\Gamma \left\{ \sum (-1)^I \varphi_{i_1}(z_1) \dots \varphi_{i_n}(z_n) \right\} \left\{ \sum (-1)^J \psi_{j_1}(z_1) \dots \psi_{j_n}(z_n) \right\} dz_1 \dots dz_n$$

où $(i_1 , \dots , i_n)$ est une permutation de $(1 , \dots , n)$ de parité $(-1)^I$ et $(j_1 , \dots , j_n)$ une permutation de parité $(-1)^J$. En effectuant le produit et en séparant les variables, on obtient

$$\frac{1}{n!} \sum (-1)^{I+J} \left(\int_\Gamma \varphi_{i_1}(z)\, \psi_{j_1}(z)\, dz \right) \dots \left(\int_\Gamma \varphi_{i_n}(z)\, \psi_{j_n}(z)\, dz \right) .$$

On voit que l'on retrouve dans cette somme le produit des mêmes facteurs à l'ordre près $n!$ fois, nombre des permutations de $i_1 , \dots , i_n$ par exemple. En réunissant facteurs égaux, il reste le développement du déterminant de gauche de l'énoncé du lemme.

Suite de la démonstration du théorème de Max Schiffer.

Nous remplaçons $a_{n,m}$ dans D_n par son expression par une intégrale et, en considérant y fixe, nous appliquons le lemme avec la courbe Γ_A ,

$$\varphi_j(x) = \int_{\Gamma_B} F(x , y)\, y^{j-1}\, dy , \qquad \psi_j(x) = x^{j-1}$$

$$D_n = \frac{1}{(2\pi i)^{2n}\, n!} \int_{\Gamma_A} \cdots \int_{\Gamma_A} U\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$\text{où} \quad U = \begin{vmatrix} \int_{\Gamma_B} F(x_1,y)dy & \ldots & \int_{\Gamma_B} F(x_n,y)dy \\ & \ldots & \\ \int_{\Gamma_B} F(x_1,y)y^{n-1}dy & \ldots & \int_{\Gamma_B} F(x_n,y)\, y^{n-1}dy \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ & \ldots & \\ x^{n-1} & \ldots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

Une nouvelle application du lemme au premier déterminant de cette intégrale, avec y variable, Γ_B courbe d'intégration et $\varphi_j(y) = y^{j-1}$, $\psi_j(y) = F(x_j , y)$ donne

$$D_n = \frac{1}{(2\pi i\; n!)^2} \int_{\Gamma_A} \cdots \int_{\Gamma_A} \int_{\Gamma_B} \cdots \int_{\Gamma_B} W\, dx_1 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_n$$

$$\text{où} \quad W = \begin{vmatrix} F(x_1,y_1) & \ldots & F(x_1,y_n) \\ & \ldots & \\ F(x_n,y_1) & \ldots & F(x_n,y_n) \end{vmatrix} V(x_1,\ldots,x_n)\, V(y_1,\ldots,y_n) .$$

Soit $M = M(\varepsilon)$ le maximum de $|F(x , y)|$ pour $x \in \Gamma_A$, $y \in \Gamma_B$ alors

$$\left| \begin{vmatrix} F(x_1,y_1) & \ldots & F(x_1,y_n) \\ & \ldots & \\ F(x_n,y_1) & \ldots & F(x_n,y_n) \end{vmatrix} \right| \leqslant n!\, M^n \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma_A , \quad y \in \Gamma_B .$$

Désignons par L_A la longueur de Γ_A , par L_B celle de Γ_B . On a alors

$$|D_n| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \frac{1}{(n!)^2} (L_A L_B)^n n! M^n [\tau(A) + \varepsilon]^{(n(n-1))/2} [\tau(B) + \varepsilon]^{(n(n-1))/2} .$$

Il vient donc

$$\limsup_{n\to\infty} |D_n|^{2/n^2} \leqslant [\tau(A) + \varepsilon][\tau(B) + \varepsilon] ,$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{n\to\infty} |D_n|^{2/n^2} \leqslant \tau(A)\ \tau(B) .$$

Applications.

1° THÉORÈME de Pólya-Carlson. - Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^{n+1}} ,$$

où $u_n \in \mathbb{Z}$, une fonction holomorphe et uniforme à l'extérieur d'un compact A tel que $\tau(A) < 1$, alors $f(z)$ est une fraction rationnelle [1], [5].

Démonstration. - Posons

$$F(x , y) = \frac{f(x) - f(y)}{y - x} , .$$

alors

$$F(x , y) = \frac{1}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{y^{n+1}}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = \frac{1}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \left(\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}\, y} + \dots + \frac{1}{y^n}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{x^{m+1}\, y^{n+1}} \quad \text{avec} \quad a_{m,n} = u_{m+n} .$$

On a donc ici :

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{n-1} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \dots & & & \\ u_{n-1} & u_n & \dots & u_{2n-2} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} |D_n|^{2/n^2} \leqslant [\tau(A)]^2 < 1 .$$

Or $D_n \in \underset{\sim}{Z}$, donc cette inégalité montre que $D_n = 0$ pour $n \geqslant n_0$. Il est bien connu que cette condition est nécessaire et suffisante pour que f soit une fraction rationnelle [3].

2° THÉORÈME de Bieberbach. - BIEBERBACH a démontré : Si A est un compact avec $\tau(A) < 1$, alors le complémentaire $\complement A$ contient au moins deux points x et y tels que $xy = 1$.

Démonstration. - Considérons la fonction

$$F(x , y) = \frac{1}{xy - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1} \; y^{n+1}} .$$

On a ici

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{quel que soit } n .$$

Soient A et B deux compacts tels que, quels que soient $x \notin A$, $y \notin B$, on ait $xy \neq 1$, alors

$$\tau(A) \; \tau(B) \geqslant \limsup_{n\to\infty} D_n = 1 ,$$

donc l'un au moins des nombres $\tau(A)$ ou $\tau(B)$ est au moins égal à 1.

Nous pouvons ainsi énoncer la généralisation suivante du théorème de Bieberbach :

Généralisation. - Soient A et B deux compacts, A^* l'ensemble inverse de A (c'est-à-dire l'ensemble des x tels que $\frac{1}{x} \in A$). Si $\tau(A)\,\tau(B) < 1$, alors le complémentaire $C(A^* \cup B)$ n'est pas vide.

Remarques. - Pour avoir des applications arithmétiques analogues à celles du théorème de Pólya-Carlson, il semble souhaitable de savoir ce que signifie pour une fonction $F(x\,,\,y)$ le fait que $D_n = 0$ pour $n \geqslant n_0$. Il est facile de voir que le fait que $F(x\,,\,y)$ soit de la forme

$$\sum_{j=1}^{k} f_j(x)\, g_j(y) \ ,$$

où f_j et g_j sont holomorphes à l'infini, entraîne $D_n = 0$ pour $n > k$. Mais une telle condition n'est pas nécessaire, comme le montre le contre-exemple

$$F(x\,,\,y) = \frac{1}{x^2\,y^2 - xy}$$

où $D_n = 0$ pour tout n . Voir aussi [4].

On peut encore remarquer que D_n ne change pas si on remplace x par $X + b_0 + \frac{b_1}{X} + \dots + \frac{b_n}{X^n} + \dots$ (représentation conforme égale à une translation à l'infini) ; de même pour y . En particulier D_n est invariant par translation sur $(x\,,\,y)$.

Enfin, on peut caractériser les fonctions $F(x\,,\,y)$ pour lesquelles $D_n \neq 0$ pour tout n . Nous allons montrer que : La condition $D_n \neq 0$ est nécessaire et suffisante pour que

$$F(x\,,\,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\psi_n(y)}{(xy)^{n+1}} \ ,$$

où $\varphi_n(x)$, $\psi_n(y)$ sont holomorphes à l'infini avec $\varphi_n(\infty) \neq 0$, $\psi_n(\infty) \neq 0$.

Au lieu de séries en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ nous allons raisonner sur des séries

$$G(x\,,\,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\, x^m\, y^n \ .$$

Remarquons d'abord que si

$$B(x\ ,\ y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{m,n}\ x^m\ y^n$$

et que

$$B(0\ ,\ 0) = b_{0,0} \neq 0\ ,$$

alors

$$C(x\ ,\ y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\ x^m\ y^n = B(x\ ,\ y) - \frac{1}{b_{0,0}} B(x\ ,\ 0)\ B(0\ ,\ y)$$

vérifie $c_{m,0} = c_{0,n} = 0$ quels que soient m et n, donc $C(x\ ,\ y) = xy\ C_1(x\ ,\ y)$ où $C_1(x\ ,\ y)$ est holomorphe en $(0\ ,\ 0)$.

Posons

$$D_{m,n}^{(k)} = \begin{vmatrix} a_{m+k,n+k} & a_{m+k,k-1} & \cdots & a_{m+k,0} \\ a_{k-1,n+k} & a_{k-1,k-1} & \cdots & a_{k-1,0} \\ \cdots & & & \\ a_{0,n+k} & a_{0,k-1} & \cdots & a_{0,0} \end{vmatrix}$$

On a alors $D_k = D_{0,0}^{(k)}$.

Supposons d'abord $D_k = D_{0,0}^{(k)} \neq 0$ pour tout k.

Désignons par $A_{i,j}$ le coefficient de l'élément a_{ij} dans le développement de $D_{m,n}^{(k)}$. Formons le produit ligne par ligne

$$D_{m,n}^{(k)} \begin{vmatrix} A_{m+k,n+k} & A_{m+k,k-1} & A_{m+k,k-2} & \cdots & A_{m+k,0} \\ A_{k-1,n+k} & A_{k-1,k-1} & A_{k-1,k-2} & \cdots & A_{k-1,0} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

On obtient

$$\begin{vmatrix} D_{m,n}^{(k)} & 0 & a_{m+k,k-2} & \cdots & a_{m+k,0} \\ 0 & D_{m,n}^{(k)} & a_{k-1,k-2} & \cdots & a_{k-1,0} \\ 0 & 0 & a_{k-2,k-2} & \cdots & a_{k-2,0} \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & a_{0,k-2} & \cdots & a_{0,0} \end{vmatrix} = (D_{m,n}^{(k)})^2 \, D_{0,0}^{(k-2)} \ .$$

D'où, après division par $D_{m,n}^{(k)}$ (d'abord supposé non nul, ensuite par continuité), il vient l'identité suivante :

Relation de Sylvester.

$$D_{0,0}^{(k-1)} \, D_{m+1,n+1}^{(k-1)} - D_{m+1,0}^{(k-1)} \, D_{0,n+1}^{(k-1)} = D_{m,n}^{(k)} \, D_{0,0}^{(k-2)} \ .$$

Cette relation joue déjà un rôle important dans la démonstration de KRONECKER ([3], p. 566-567).

Posons

$$G_k(x\ ,\ y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{m,n}^{(k)}}{D_{0,0}^{(k-1)}} \, x^m \, y^n \ .$$

On a

$$xy \; G_1(x\ ,\ y) = G(x\ ,\ y) - \frac{1}{G(0\ ,\ 0)} \, G(x\ ,\ 0) \, G(0\ ,\ y) \ .$$

En effet, le coefficient de $x^m \, y^n$ dans G_1 est

$$a_{m+1,n+1} - \frac{a_{m+1,0} \, a_{0,n+1}}{a_{0,0}} = \frac{D_{m,n}^{(1)}}{D_{0,0}^{(0)}} \ .$$

Montrons que pour tout k , on a

$$xy \; G_k(x\ ,\ y) = G_{k-1}(x\ ,\ y) - \frac{1}{G_{k-1}(0\ ,\ 0)} \, G_{k-1}(x\ ,\ 0) \, G_{k-1}(0\ ,\ y) \ .$$

Le coefficient de $x^m y^n$ de $G_k(x , y)$ calculé à partir de l'expression de droite est

$$\frac{D^{(k-1)}_{m+1,n+1}}{D^{(k-2)}_{0,0}} - \frac{D^{(k-1)}_{m+1,0}}{D^{(k-1)}_{0,0}} \frac{D^{(k-1)}_{0,n+1}}{D^{(k-2)}_{0,0}} .$$

La relation de Sylvester montre que cette expression est égale à $\frac{D^{(k)}_{m,n}}{D^{(k-1)}_{0,0}}$, donc notre récurrence est établie.

Par suite

$$G(x , y) = \frac{1}{G(0 , 0)} G(x , 0) G(0 , y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{k-1}}{D_k} (xy)^k G_k(x , 0) G_k(0 , y) .$$

La condition $D_n \neq 0$ est donc suffisante.

Il est clair qu'elle est nécessaire, car si

$$F(x , y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \psi_n(y)}{(xy)^{n+1}} ,$$

on a

$$D_n = \prod_{k=0}^{n-1} \varphi_k(\infty) \psi_k(\infty) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARLSON (Fritz). – Über ganzwertige Funktionen, Math. Z., t. 11, 1921, p. 1-23.

[2] FEKETE (M.). – Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Z., t. 17, 1923, p. 228-249.

[3] KRONECKER (L.). – Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen, Berl. Monatsber., 1881, p. 535-600.

[4] LELONG (Pierre). – Sur les séries de Taylor à deux variables, à coefficients entiers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 226, 1948, p. 210-212.

[5] PÓLYA (G.). – Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Forsetzbarkeit einer Potenzreihe, Math. Annalen, t. 99, 1928, p. 687-706.