Jacques Hily

Interpolation *p*-adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. nº 15, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A13_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
4e année, 1962/63, n° 15

11 mars 1963

INTERPOLATION p-ADIQUE

par Jacques HILY

(d'après K. MAHLER [3])

$\mathbb{Z}_p$ désignera l'anneau des entiers du corps p-adique $\mathbb{Q}_p$. Toutes les fonctions dont il sera question seront des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$. $\mathbb{N}$ désignera l'ensemble des entiers naturels positifs.

1. Séries d'interpolation pour les fonctions $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$.

Posons
$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} (x - j)\right)/n! \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{N}$, on a $P_n(x) = C_x^n$ avec la convention $C_x^n = 0$ si $x < n$. Comme $C_x^n \in \mathbb{N}$, on a donc $|P_n(x)|_p \leq 1$ pour $x \in \mathbb{N}$. Or $\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$ et $P_n(x)$ est une fonction continue.

On a donc

$$|P_n(x)|_p \leq 1 \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{Z}_p .$$

Etude des séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$, $a_n \in \mathbb{Q}_p$.

LEMME. - La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ soit convergente, pour tout x, est que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Si cette condition est remplie, la somme est une fonction continue.

Suffisance. - D'après la remarque précédente, on a $|P_n(x)|_p \leq 1$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} a_n P_n(x) = 0 .$$

Cette limite étant d'ailleurs uniforme.

Nécessité. - Si la série est convergente, elle converge en particulier pour $x = -1$. Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ est convergente, ce qui implique $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Comme $a_n P_n(x)$ tend uniformément vers 0, les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} a_n P_n(x)$

convergent uniformément vers la somme de la série. Or ces sommes partielles sont des polynômes, donc des fonctions continues. La limite uniforme de fonctions continues étant continue, le lemme est démontré.

THÉORÈME. - Si f est continue, il existe une suite $a_n(f) \in \mathbb{Q}_p$ telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\, P_n(x)$ ait pour somme $f(x)$.

Si la série est convergente, la somme étant continue, il suffit d'assurer qu'elle coïncide avec f sur un ensemble dense.

Comme d'autre part, pour $x = k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\, P_n(k) = \sum_{n=0}^{k} a_n(f)\, P_n(k) .$$

On voit que les $a_n(f)$ sont déterminés par les valeurs prises par f sur $\mathbb{N}$.

On a nécessairement

$$a_n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, C_n^k\, f(k) .$$

Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} a_n(f) = 0 .$$

La fonction f étant continue est uniformément continue sur $\mathbb{Z}_p$ puisque $\mathbb{Z}_p$ est compact.

Soit $\forall\ s$, $\exists\ t$ tel que

$$|x - y|_p \leq p^{-t} \implies |f(x) - f(y)|_p \leq p^{-s} .$$

Il existe donc une partition de $\mathbb{Z}_p$ en boules de rayon p^{-t} et une fonction $g(x)$ constante sur chacune ce ces boules telle que $|f(x) - g(x)|_p \leq p^{-s}$ pour tout x.

Il suffit de choisir arbitrairement un x dans chaque boule et de poser pour tout y de la même boule $g(y) = f(x)$.

La fonction g est une fonction continue, et on a

$$a_n(f) - a_n(g) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, C_n^k (f(k) - g(k)) .$$

Soit

$$|a_n(f) - a_n(g)|_p \leq \max_{0\leq k\leq n} |C_n^k|_p\, |f(k) - g(k)|_p \leq \max_{0\leq k\leq n} |f(k) - g(k)|_p \leq p^{-s} .$$

De plus on a $g(k) = g(k')$ si $k - k' \equiv 0 \mod p^t$.

Soit

$$a_n(g) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k g(k)$$

$$= \sum_{i=0}^{p^t-1} g(i) \sum_{k\equiv i \bmod p^t} (-1)^{n-k} C_n^k .$$

Or on sait ([2]) que :

$$\sum_{k\equiv i \bmod p^t} (-1)^{n-k} C_n^k \equiv 0 \mod p^{[(n-1)/(p^t-1)]}$$

$[(n-1)/(p^t-1)]$ désignant la valeur entière de $(n-1)/(p^t-1)$.

Soit

$$|a_n(g)|_p \leq \max_{x\in Z_p} |g|_p . p^{-[(n-1)/(p^t-1)]}$$

de second membre tendant vers 0 , le premier aussi, et il existe n_0 tel que $n > n_0$ entraîne $|a_n(g)|_p \leq p^{-s}$.

Soit

$$|a_n(f)|_p = |a_n(f) - a_n(g) + a_n(g)|_p \leq \max(|a_n(f) - a_n(g)|_p , |a_n(g)|_p) \leq p^{-s}$$

n_0 dépend de t et de s , or t dépend de s , donc n_0 ne dépend que de s , c'est-à-dire que nous avons bien montré

$$\lim_{n\to\infty} a_n(f) = 0 ,$$

2. Fonctions $Z_p \times Z_p \to Q_p$.

Soit $f(x , y)$ continue par rapport à chacune des deux variables. La fonction est une fonction continue de x , donc, pour tout y , elle admet un développement

$$f(x , y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y) \; P_n(x)$$

avec $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = 0$.

Les $f_n(y)$ étant des combinaisons linéaires finies de fonctions continues sont elles-mêmes des fonctions continues.

Soit

$$f_n(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} \; P_m(y) .$$

On a donc

$$f(x , y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} \; P_m(y) .$$

LEMME. - $f(x, y)$ étant continue par rapport à chacune des deux variables, il existe un ensemble rare $\mathcal{E}$ tel que, sur tout compact K, $(K \cap \mathcal{E} = \emptyset)$, $f(x, y)$ soit continue.

Soit $\mathcal{E}_{\varepsilon,\eta}$ l'ensemble des (x, y) tel qu'il existe (x', y') avec $|x - x'|_p \leqslant \eta$ et $|y - y'|_p \leqslant \eta$ tels que $|f(x, y) - f(x', y')|_p \geqslant \varepsilon$.
Cet ensemble est évidemment un ensemble fermé par suite de la continuité de f en x et en y.

Donc $\bigcap_\eta \mathcal{E}_{\varepsilon,\eta} = \mathcal{E}_\varepsilon$ est fermé.

$\mathcal{E}_\varepsilon$ est maigre car sinon il contiendrait une boule ouverte de rayon ρ, telle que

$|x - x'|_p < \rho$ et $|y - y'|_p < \rho$ entraînerait $|f(x, y) - f(x', y')|_p \geqslant \varepsilon$

ce qui contredirait le fait que $f(x, y)$ est continue en x.

Or la réunion de tous les $\mathcal{E}_\varepsilon$ est une réunion dénombrable. Il suffit de donner à ε un ensemble dénombrable de valeurs ayant 0 pour point d'accumulation pour avoir la réunion de tous les $\mathcal{E}_\varepsilon$ ce qui vérifie que $\mathcal{E} = \bigcup \mathcal{E}_\varepsilon$ est un ensemble rare.

On en déduit que, pour tout compact K $(K \cap \mathcal{E} = \emptyset)$, la fonction $f(x, y)$ est uniformément continue car, quel que soit ε, on peut trouver un η tel que $K \cap \mathcal{E}_{\varepsilon,\eta} = \emptyset$. S'il n'en était pas ainsi, K étant compact est fermé, et les $K \cap \mathcal{E}_{\varepsilon,\eta}$ formeraient une famille de fermés emboités non vides et leur intersection serait non vide, ce qui contredirait le fait que $K \cap \mathcal{E}$ est vide.

Donc, pour tout $(x, y) \in K$, les séries $\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} P_m(y)$ sont uniformément convergentes, et la famille $a_{m,n} P_m(y).P_n(x)$ est uniformément sommable.

Si $(n, m) \in K$, on a $a_{m,n} P_m(m).P_n(n) = a_{m,n}$. On en déduit que la famille $\{a_{m,n}\}$ $(n, m) \in K$, est sommable.

Soit $\lim\limits_{(n,m)\in K} a_{m,n} = 0$.

Réciproquement, s'il existe un ensemble rare $\mathcal{E}$ tel que la famille $\{a_{m,n} P_n(x) P_m(y)\}$ soit uniformément sommable pour $(x, y) \in K$ $(K \cap \mathcal{E} = \emptyset)$, cela signifie que la fonction

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} P_m(y).P_n(x)$$

est une fonction uniformément continue sur K comme limite uniforme de polynômes qui sont des fonctions continues.

Remarques.

1° On ne peut rien dire pour les points de l'ensemble $\mathcal{E}$, où on peut très bien n'avoir de continuité ni en x ni en y . Il est aussi possible que la fonction ne soit pas définie aux points de l'ensemble $\mathcal{E}$ (voir exemples).

2° Dans le cas particulier où $\mathcal{E} = \emptyset$, la fonction $f(x , y)$ est continue, et on a le résultat.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x , y)$ soit continue est que

(i) $f(x , y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} P_n(x).P_m(y)$.

(ii) La famille $\{a_{m,n}\}$ est sommable.

3° Si $\mathcal{E} \neq \emptyset$, $\mathcal{E}$ peut être enfermé dans une réunion de boules ouvertes, la somme des rayons étant inférieure à tout ε donné à l'avance. Le complémentaire est alors fermé, donc compact, soit K .

Posons $N(\nu , A)$ nombre de couples (m , n) $(m \leqslant \nu , \ n \leqslant \nu)$, tels que $|a_{m,n}|_p \geqslant A$.

Comme

$$\lim_{(m,n)\in K} a_{m,n} = 0$$

il existe ν_0 tel que, si $m > \nu_0$ et $n > \nu_0$ $(m , n) \in K$, on ait

$$|a_{m,n}|_p < A \ .$$

Soit

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{N(\nu , A)}{\nu^2} \leqslant \varepsilon \ .$$

Comme ε est arbitraire on a

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{N(\nu , A)}{\nu^2} = 0 \ .$$

3. Application à l'étude de fonctions à dérivée continue.

Soit $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ dérivable à dérivée continue. Cela veut dire que la fonction

$$g(x , y) = \begin{cases} \dfrac{f(x + y) - f(x)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ f'(x) & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

est une fonction continue en x et en y séparément.

Posons

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) .$$

Nous avons donc

$$f(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x + y) .$$

Or

$$P_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x).P_{n-k}(y) .$$

Ceci se vérifie pour $x \in \underset{\sim}{N}$ et $y \in N$. La relation ayant lieu pour une infinité de couples (x , y) a lieu pour tout x et tout y.

Soit

$$f(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} P_k(y) .$$

On a le droit de permuter les sommations car les séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} P_k(y)$ sont uniformément convergentes. Donc

$$f(x + y) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} P_k(y) .$$

Soit finalement $\dfrac{f(x + t + 1) - f(x)}{t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{a_{n+k+1}}{k + 1} P_k(t)$.

En effet ceci est le résultat de l'opération formelle du changement de y en $t + 1$, puis de la division par $t + 1$. Comme les deux membres coïncident pour x et $t \in \underset{\sim}{N}$ et que le premier membre est continu, il admet un développement de ce type (§ 2) qui ne peut être que celui écrit.

En particulier on a, en faisant $t = - 1$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \sum_{k=0}^{\infty} (- 1)^k \frac{a_{n+k+1}}{k + 1} .$$

Réciproquement s'il existe un ensemble rare $\mathcal{E}$ tel que, pour tout $(x , t) \notin \mathcal{E}$, la famille $\{\frac{a_{n+k+1}}{k + 1} P_n(x).P_k(t)\}$ soit sommable et si l'ensemble des x, tels que $(x , 0) \in \mathcal{E}$, est rare dans $\underset{\sim}{Z}_p$ la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

est dérivable dans le complémentaire d'un ensemble rare et sa dérivée est continue sur ce complémentaire. Ceci est évident, d'après le § 2 . Remarquons qu'on ne peut pas affirmer que la dérivée aux points de l'ensemble rare existe (voir exemple).

Dans le cas particulier où $\mathcal{E} = \emptyset$, la fonction $f(x)$ est strictement dérivable, et on a :

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ soit strictement dérivable est que la famille $\{\frac{a_{n+k}}{k}\}$ soit sommable.

Cette condition peut s'écrire encore :

$$\lim_{n\to\infty} n|a_n|_p = 0 .$$

En effet :

$$\frac{N-1}{p}|a_N|_p \leqslant \sup_{\substack{n+k=N\\ k\neq 0}} \left|\frac{a_{n+k}}{k}\right|_p \leqslant (N-1)\;|a_N|_p .$$

Comme on a

$$\lim_{n+k\to\infty} \left|\frac{a_{n+k}}{k}\right|_p = 0$$

on en déduit bien la proposition. La réciproque est immédiate.

4. Exemples.

1° Soit

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} p^r P_{p^r}(x) .$$

Alors $f(x)$ n'est nulle part dérivable. Pour la démonstration, voir [3].

2° Soit

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} p^r P_{p^r-1}(x) .$$

Alors $f(x)$ est dérivable, sauf pour $x = -1$. Pour la démonstration, voir [3].

3° Soit B_n la boule de centre p^n et de rayon p^{-2n} $(n = 1, 2, \ldots)$. Donc

$$x \in B_n \iff x = p^n + a_{2n}p^{2n} + \ldots + a_{2n+q}p^{2n+q} + \ldots$$

avec $0 \leqslant a_{2n+q} \leqslant p-1$, $q = 0, 1, \ldots$

Soit $f_n(x)$ la fonction qui vaut 0 si $x \notin B_n$ et qui, pour $x \in B_n$, vaut

$$a_{2n}p^{2n} + \ldots + a_{2n+q}p^{2n+2q} + \ldots$$

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) .$$

Les boules B_n sont disjointes, et cette série converge uniformément pour tout x. On a $f'_n(x) = 0$ (voir démonstration dans [1]).

De plus

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = f'(0) = 0 .$$

En effet si $x \notin B_n$, $f(x) = 0$, et si $x \in B_n$ $\left|\frac{f(x)}{x}\right|_p \leqslant p^{-n}$. La fonction $f(x)$ a donc une dérivée nulle et cependant n'est pas strictement dérivable car on peut toujours trouver x_1 et $x_2 \in B_n$ tels que $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 1$.

4° Soit B_n la boule de centre p^n et de rayon p^{-n-1} $(n = 1 , 2 , \dots)$.

Soit

$$x \in B_n \iff x = p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \dots + a_{n+q} p^{n+q} + \dots$$

Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} a_{n+1} p^{n+2} + \dots + a_{n+q} p^{n+2q} + \dots & \text{si } x \in B_n \\ 0 & \text{si } x \notin B_n \end{cases}$$

et soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) .$$

Ici encore si $x \neq 0$, on a $f'(x) = 0$.

Mais $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ n'existe pas, car si $x = p^n + p^{n+1}$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{p^2}{1 + p}$, et est nul si $x \notin B_n$.

Or si $p \neq 2$, on peut trouver une suite infinie de x tendant vers 0 sans appartenir à B_n .

Ici les séries $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{a_{n+k}}{k}$ sont convergentes vers 0 , mais la fonction $f(x)$ n'est cependant pas partout dérivable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIEUDONNÉ (Jean). - Sur les fonctions continues p-adiques, Bull. Sc. math., 2e série, t. 68, 1944, p. 79-95.

[2] KAPFERER (H.). - Über gewisse Summen von Binomialkoeffizienten, Arch. für Math. und Phys., Série 3, t. 23, 1915, p. 117-124.

[3] MAHLER (K.). - An interpolation series for continuous functions of a p-adic variable, J. für reine und angew. Math., t. 199, 1958, p. 23-34.