Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean Chauvineau

Équirépartition et équirépartition uniforme modulo 1

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 3 (1961-1962), exp. n° 7, p. 1-35

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1961-1962__3__A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
3e année, 1961/62, n° 7

12 et 26 février 1962

ÉQUIRÉPARTITION ET ÉQUIRÉPARTITION UNIFORME MODULO 1

par Jean CHAUVINEAU

I. Définitions et propriétés élémentaires.

1. Notations. – $\underset{\sim}{N}^+$, $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{Q}$, $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{C}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des entiers naturels ou nuls, l'anneau des entiers rationnels, le corps des rationnels, le corps des réels, le corps des complexes. I désigne l'intervalle fermé $[0 , 1]$.

Si E est un ensemble de points de $\underset{\sim}{R}^p$, où $p \in \underset{\sim}{N}^+$, ψ_E désigne sa fonction caractéristique. Lorsque E est mesurable au sens de RIEMANN, ou encore au sens de JORDAN, il est dit mesurable-$\mathcal{R}$, et sa mesure-$\mathcal{R}$ est notée $|E|$. Lorsque E est mesurable au sens de LEBESGUE, il est dit merurable-$\mathcal{L}$, et sa mesure-$\mathcal{L}$ est notée $\mu(E)$.

Si x est un nombre réel, $\hat{x}$ désigne sa partie entière et $\check{x}$ sa partie fractionnaire, de sorte que $\hat{x} + \check{x} = x$ et $0 \leq \check{x} < 1$.

Les suites envisagées dans I, II, III, IV sont toutes des suites $\{u_n\}_{n \in \underset{\sim}{N}^+}$ de nombres réels u_n ; une telle suite sera appelée, par abus de langage, la suite u_n ; parfois aussi, nous la désignerons par u .

2. Définition 1. – Étant donnés une suite u_n , un entier naturel N et un ensemble $E \subset I$, le nombre des termes u_n tels que $\check{u}_n \in E$ et $1 \leq n \leq N$ est noté $(N , E)_u$. Si a , b sont deux nombres réels tels que $0 \leq a < b \leq 1$, on pose $(N , [a , b[)_u = (N , a , b[_u$.

La suite u_n est dite équirépartie (mod 1) [é. r. (mod 1)] si et seulement si, pour tout couple a , b de nombres réels tels que $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{(N , a , b[_u}{N} = b - a \tag{1}$$

(WEYL [17]). Lorsque, de plus, la suite u_n est répartie sur I , on dit qu'elle est équirépartie sur I . Pour que la suite u_n soit é. r. (mod 1) , il faut et il suffit que la suite $\check{u}_n$ soit é. r. sur I .

On voit d'ailleurs facilement qu'il suffit, pour assurer l'équirépartition (mod 1) de la suite u_n, que la condition (1) soit satisfaite par tout couple a, b de nombres réels tels que $0 < a < b < 1$, ou même qu'elle le soit, pour $a = 0$, par tout nombre réel b tel que $0 < b < 1$, car

$$[N, a, b[_u = [N, 0, b[_u - [N, 0, a[_u$$

si $0 < a < b < 1$.

3. Définition 2. - Étant donnés une suite u_n et un entier naturel N, le nombre

$$D_N(u) = \sup_{0 \leq a < b \leq 1} \left| \frac{[N, a, b[_u}{N} - (b - a) \right| \tag{2}$$

s'appelle discrépance de l'ensemble des N premiers termes de la suite. Pour toute suite u_n, on a aussitôt $0 < D_N(u) \leq 1$, et Mme VAN AARDENNE-EHRENFEST [15] a montré que $\overline{\lim}_{N\to\infty} N D_N(u) = \infty$. Lorsque la suite u_n n'est pas é. r. (mod 1), on a même $\overline{\lim}_{N\to\infty} N^{\varepsilon} D_N(u) = \infty$ pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$.

4. THÉORÈME 1. - Pour que la suite u_n soit é. r. (mod 1), il faut et il suffit qu'on ait

$$\lim_{N\to\infty} D_N(u) = 0 \tag{3}$$

La condition est évidemment suffisante. Réciproquement, soit m un entier naturel ≥ 2 ; puisque la suite u_n est é. r. (mod 1), il existe un entier naturel N_m tel que, pour $N > N_m$, on ait, quel que soit $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$:

$$\left| \frac{[N, \frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}[_u}{N} - \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{m^2} \tag{4}$$

Soit $0 \leq a < b \leq 1$; il existe des entiers k_1, k_2 compris au sens large entre 0 et m, pour lesquels on a, soit

$$\left[\frac{k_1+1}{m}, \frac{k_2-1}{m}\right[\subset [a, b[\subset \left[\frac{k_1}{m}, \frac{k_2}{m}\right[\qquad \text{avec} \qquad k_2 - k_1 \geq 3$$

soit

$$[a, b[\subset \left[\frac{k_1}{m}, \frac{k_2}{m}\right[\qquad \text{avec} \qquad k_2 - k_1 = 2$$

et, compte tenu de (4), on en conclut aisément que, pour $N > N_m$, on a

$$\left| \frac{[N , a , b[_u}{N} - (b - a) \right| < \frac{3}{m} \quad .$$

Ainsi $N > N_m$ entraîne $0 < D_N(u) \leq \frac{3}{m}$, ce qui exige, puisque m est arbitrairement grand, qu'on ait (3).

De ce théorème résulte qu'il faut même, pour que la suite u_n soit é. r. (mod 1), que la condition (1) soit satisfaite <u>uniformément en</u> a <u>et</u> b.

5. - Le théorème suivant montre que la définition 1 peut être formulée d'une manière plus générale :

THÉORÈME 2. - <u>Pour que la suite</u> u_n <u>soit é. r.</u> (mod 1), <u>il faut et il suffit que, pour tout ensemble</u> E <u>mesurable-</u>$\mathcal{R}$ <u>et inclus dans</u> I, <u>on ait</u>

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(N , E)_u}{N} = |E| \quad . \tag{5}$$

La condition est évidemment suffisante. Réciproquement, soit $E \subset [0 , 1[$; considérons une suite emboitée de partitions P_k de $[0 , 1[$ en intervalles semi-fermés, telle que la longueur de chacun d'eux tende vers 0 quand $k \to \infty$. Soit d'autre part $\varepsilon > 0$. Puisque E est mesurable-$\mathcal{R}$, il existe un entier k_ε pour lequel la partition P_{k_ε} fournit une réunion finie d'intervalles intérieurs à E, soit $\bigcup_1^{\nu'} J'_h$, et une réunion finie d'intervalles intérieurs à E ou mixtes, soit $\bigcup_1^{\nu} J_h$, telles que l'on ait

$$\bigcup_1^{\nu'} J'_h \subset E \subset \bigcup_1^{\nu} J_h$$

avec

$$\sum_1^{\nu} |J_h| - \sum_1^{\nu'} |J'_h| < \varepsilon$$

de sorte que $\sum_1^{\nu} |J_h| < |E| + \varepsilon$ et $\sum_1^{\nu'} |J'_h| > |E| - \varepsilon$. D'autre part, on a

$$\sum_1^{\nu'} \frac{(N , J'_h)_u}{N} \leq \frac{(N , E)_u}{N} \leq \sum_1^{\nu} \frac{(N , J_h)_u}{N} \quad .$$

Puisque la suite u_n est é. r. (mod 1), le premier et le troisième membres, quand $N \to \infty$, tendent respectivement vers $\sum_1^{\nu'} |J'_h|$ et $\sum_1^{\nu} |J_h|$. Il en résulte que les limites inférieure et supérieure de $\frac{(N, E)_u}{N}$ quand $N \to \infty$ sont strictement comprises entre $|E| - \varepsilon$ et $|E| + \varepsilon$, ce qui exige, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, qu'on ait (5).

6. - On peut encore formuler la condition nécessaire et suffisante précédente ainsi : <u>pour tout ensemble</u> E <u>inclus dans</u> I <u>dont la frontière est de mesure-$\mathcal{L}$ nulle, on a</u>

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(N, E)_u}{N} = \mu(E) \quad . \tag{6}$$

En effet, pour tout ensemble E borné, dont $\breve{E}$ désigne la frontière, les conditions $\mu(\breve{E}) = 0$ et $|\breve{E}| = 0$ sont équivalentes, comme on le voit en appliquant à l'ensemble $\breve{E}$, borné lui-même et fermé, le théorème de Borel-Lebesgue sur le recouvrement fini, et la condition $|\breve{E}| = 0$ exprime précisément que E est mesurable-$\mathcal{R}$.

Bien entendu, une telle propriété ne saurait s'étendre à tous les ensembles mesurables-$\mathcal{L}$ inclus dans I. La répartition (mod 1) de toute suite étant dénombrable, donc de mesure-$\mathcal{L}$ nulle, on voit même que, quelle que soit la suite u_n, il existe un ensemble E mesurable-$\mathcal{L}$ inclus dans I tel que $(N, E)_u = 0$ quel que soit N et $\mu(E) = 1$.

7. <u>Définition</u> 3. - Soit $(\nu, N, a, b(_u$ le nombre des termes u_n tels que $a \leq u_n < b$ et $\nu + 1 \leq n \leq \nu + N$, où $\nu \in \underset{\sim}{N}$. La suite u_n est dite <u>uniformément équirépartie</u> (mod 1) [u. é. r. (mod 1)] si et seulement si, pour tout couple a, b de nombres réels tels que $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\underset{\nu \in \underset{\sim}{N}}{\text{unif}} \lim_{N\to\infty} \frac{(\nu, N, a, b(_u}{N} = b - a \tag{7}$$

(PETERSEN [9]).

Toute suite u. é. r. (mod 1) est évidemment é. r. (mod 1), mais la réciproque est fausse. En effet, soit une suite u_n é. r. (mod 1) ; construisons la suite v_n en posant

$$v_n = \begin{cases} 0 \text{ pour } m^3 + 1 \leqslant n \leqslant m^3 + m \text{, où } m = 1, 2, 3, \ldots \\ u_n \text{ pour les autres valeurs de } n \text{ .} \end{cases}$$

On s'assure facilement que les termes ainsi annulés de la suite u_n sont suffisamment rares pour que la suite v_n soit, elle aussi, é. r. (mod 1) . D'autre part, soit $0 < b < 1$ et choisissons ε tel que $0 < \varepsilon < 1 - b$; si la suite v_n était u. é. r. (mod 1) , il existerait N_ε , indépendant de ν , tel que, pour $N \geqslant N_\varepsilon$ et $\nu \in \underset{\sim}{N}$, on eût

$$\left| \frac{[\nu , N , 0 , b[_V}{N} - b \right| < \varepsilon$$

d'où notamment

$$\left| \frac{[N_\varepsilon^3 , N_\varepsilon , 0 , b[_V}{N} - b \right| < \varepsilon \quad .$$

Comme $[N^3 , N , 0 , b[_V = N$ pour tout entier naturel N , on aurait $1 - b < \varepsilon$, en contradiction avec le choix initial de ε . Ainsi la suite v_n fournit un exemple de suite qui, tout en étant é. r. (mod 1) , ne l'est pas uniformément.

On verra plus loin (cf. II-6.1) qu'il existe des suites u. é. r. (mod 1) , de sorte que la définition 3 fournit effectivement un renforcement de la notion d'équirépartition.

8. Quelques propriétés élémentaires des suites é. r. (mod 1) ou u. é. r. (mod 1).

8.1. – Il est immédiat que *la suite* $u_n + \alpha$ *, où* $\alpha \in \underset{\sim}{R}$ *, est é. r.* (mod 1) [resp. : *u. é. r.* (mod 1)] *si et seulement si la suite* u_n *est é. r.* (mod 1) [resp. : *u. é. r.* (mod 1)].

8.2. – *Si la suite* v_n *est é. r.* (mod 1) [resp. : *u. é. r.* (mod 1)] *et si* $\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = \alpha$ *, où* $\alpha \in \underset{\sim}{R}$ *, alors la suite* u_n *est é. r.* (mod 1) [resp. : *u. é. r.* (mod 1)]. (KEOGH-LAWTON-PETERSEN [3].)

Il suffit évidemment d'établir la propriété pour $\alpha = 0$. Posons $u_n = v_n + \varepsilon_n$; soit $0 < a < b < 1$ et choisissons ε tel que $0 < \varepsilon < \min\left(a , 1 - b , \frac{b - a}{2}\right)$. Il existe N_ε tel que, pour $n > N_\varepsilon$, on ait $|\varepsilon_n| < \varepsilon$. Tout point v_n , où $n > N_\varepsilon$, tel que $v_n \in [a + \varepsilon , b - \varepsilon[$ fournit un point u_n tel que $u_n \in [a , b[$, et d'autre part tout point u_n, où $n > N_\varepsilon$, tel que $u_n \in [a, b[$ est fourni par un point v_n tel que $v_n \in [a - \varepsilon, b + \varepsilon[$. Compte tenu du fait que $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, la propriété annoncée en résulte.

8.3. – Pour que la répartition (mod 1) de la suite u_n soit partout dense sur I, il faut et il suffit :

a. qu'on puisse extraire de cette suite une sous-suite $u_{f(n)}$ é. r. (mod 1) [resp. : u. é. r. (mod 1)] ;

b. qu'on puisse réordonner les termes de cette suite de manière à former une nouvelle suite $u_{g(n)}$ é. r. (mod 1) [resp. : u. é. r. (mod 1)]. (KEOGH-LAWTON-PETERSEN [3]).

L'une ou l'autre de ces conditions est évidemment suffisante.

Soit v_n une suite é. r. sur I [resp. : u. é. r. sur I]. Puisque la suite u_n est partout dense sur I, on peut construire une application strictement croissante de $\underset{\sim}{N}^+$ dans $\underset{\sim}{N}^+$, soit f, telle que $\lim_{n\to\infty} (u_{f(n)} - v_n) = 0$, et, d'après 8.2, la sous-suite $u_{f(n)}$ est é. r. (mod 1) [resp. : u. é. r. (mod 1)]. Ainsi la condition (a) est nécessaire.

D'autre part, on peut intercaler les termes non sélectionnés de $\{u_n\}$ entre des paquets de termes de $\{u_{f(n)}\}$ de manière que, dans la suite $u_{g(n)}$ ainsi obtenue (qui est la suite u_n réordonnée), ils se présentent assez rarement pour que cette suite $u_{g(n)}$ soit, elle aussi, é. r. (mod 1) [resp. : u. é. r. (mod 1)]. Ainsi la condition (b) est nécessaire.

9. – Divers auteurs ont recherché, au contraire, des affaiblissements de la notion d'équirépartition en la généralisant.

9.1. Définition 4. – La suite u_n est dite presque équirépartie (mod 1) [p. é. r. (mod 1)] si et seulement s'il existe une application strictement croissante φ de $\underset{\sim}{N}^+$ dans $\underset{\sim}{N}^+$ telle que, pour tout couple a, b de nombres réels vérifiant $0 \leq a < b \leq 1$, on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{[\varphi(N), a, b[_u}{\varphi(N)} = b - a \tag{8}$$

(ŠAPIRO-PJATECKIJ [13]).

Toute suite é. r. (mod 1) est évidemment p. é. r. (mod 1) , mais la réciproque est fausse. Par exemple, la suite $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots\}$ n'est pas é. r. sur I bien qu'elle soit p. é. r. sur I , la condition (8) étant manifestement vérifiée pour $\varphi(N) = 2^N$.

9.2. Définition 5. - Soit $\{\lambda_n\}$ une suite réelle telle que $\lambda_n \geqslant \lambda_{n+1} > 0$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}^+$ et $\sum_1^\infty \lambda_n = \infty$. La suite u_n est dite λ_n-équirépartie (mod 1) [λ_n- é. r. (mod 1)] si et seulement si, pour tout couple a , b de nombres réels tels que $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_1^N \lambda_n\right)^{-1} \sum_1^N \lambda_n\, \psi_{[a,b[}(u_n) = b - a \tag{9}$$

(TSUJI [14]). Si $\lambda_n = 1$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}^+$, on retrouve la définition 1.

TSUJI [14] montre que toute suite é. r. (mod 1) est aussi λ_n-é. r. (mod 1) ; où $\{\lambda_n\}$ est une suite réelle vérifiant les conditions imposées par la définition 5, mais la réciproque est fausse ; par exemple, la suite log n , qui n'est pas é. r. (mod 1) (cf. II-6.2), est $\frac{1}{n}$-é. r. (mod 1) (cf. III-7.2).

II. Critères d'équirépartition et applications.

1. Premier critère de Weyl.

1.1. - Soit $\mathfrak{J}(I)$ la classe des fonctions à valeurs complexes bornées et intégrables-$\mathcal{R}$ sur I .

THÉORÈME 3. - Pour que la suite u_n soit é. r. (mod 1) , il faut et il suffit que, pour toute fonction $f \in \mathfrak{J}(I)$, on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_1^N f(u_n) = \int_0^1 f(x)\, dx \tag{10}$$

(WEYL [17]). Il suffit évidemment d'établir la propriété pour les fonctions à valeurs réelles de $\mathfrak{J}(I)$, qui constituent une sous-classe $\mathfrak{J}^*(I)$.

La condition est suffisante, car pour $f = \psi_{[a,b[}$, où $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, elle exprime précisément la définition 1, puisque $\sum_1^N \psi_{[a,b[}(u_n) = (N, a, b(_u$.

Réciproquement, soit $f \in \mathfrak{J}^*(I)$; il existe deux suites g_k , G_k de fonctions en escalier qui encadrent f sur I et dont les intégrales sur I tendent l'une et l'autre vers $\int_0^1 f(x)\,dx$ quand $k \to \infty$. On a

$$\frac{1}{N}\sum_1^N g_k\,(\underset{\smile}{u_n}) \leq \frac{1}{N}\sum_1^N f(\underset{\smile}{u_n}) \leq \frac{1}{N}\sum_1^N G_k(\underset{\smile}{u_n}) \tag{11}$$

Si la suite u_n est é. r. (mod 1) , la condition (10) est vérifiée par les fonctions caractéristiques de tous les intervalles inclus dans I , donc aussi par les fonctions en escalier définies sur I , qui en sont des combinaisons linéaires à coefficients réels. Dès lors, quand $N \to \infty$, le 1er et le 3e membres de (11) tendent respectivement vers $\int_0^1 g_k(x)\,dx$ et $\int_0^1 G_k(x)\,dx$, intégrales qui, à leur tour, lorsque $k \to \infty$, ont pour limite commune $\int_0^1 f(x)\,dx$. Il en résulte que f vérifie (10), et la condition énoncée est nécessaire.

1.2. - Soit $\mathcal{C}(I)$ la classe des fonctions à valeurs complexes continues sur I. Le 1er critère de Weyl peut encore se formuler ainsi : <u>pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{C}(I)$, <u>on a (10)</u>. Il suffit évidemment d'établir la propriété pour les fonctions à valeurs réelles de $\mathcal{C}(I)$, qui constituent une sous-classe $\mathcal{C}^*(I)$.

La nécessité de la condition s'établit comme précédemment.

Réciproquement, soit $0 < a < b < 1$; il existe deux suites ℓ_k , L_k de fonctions continues qui encadrent $\psi_{[a,b[}$ sur I et dont les intégrales sur I tendent l'une et l'autre vers $\int_0^1 \psi_{[a,b[}(x)\,dx = b - a$ quand $k \to \infty$ (par exemple, deux suites de fonctions signal trapèze isocèle qu'on aperçoit aussitôt). On a

$$\frac{1}{N}\sum_1^N \ell_k(\underset{\smile}{u_n}) \leq \frac{1}{N}\sum_1^N \psi_{[a,b[}(\underset{\smile}{u_n}) = \frac{[N\ ,\ a\ ,\ b[_u}{N} \leq \frac{1}{N}\sum_1^N L_k(\underset{\smile}{u_n}) \quad .$$

Si la condition (10) est remplie par les fonctions de $\mathcal{C}^*(I)$, le 1er et le 4e membres des inégalités précédentes, quand $N \to \infty$, tendent respectivement vers $\int_0^1 \ell_k(x)\,dx$ et $\int_0^1 L_k(x)\,dx$, intégrales qui, à leur tour, lorsque $k \to \infty$, ont pour limite commune $b - a$. Il en résulte que la suite u_n est é. r. (mod 1) , et la condition énoncée est suffisante.

1.3. - T désignant la circonférence unité, soit $\mathcal{C}(T)$ la classe des fonctions à valeurs complexes, périodiques et de période 1 , continues sur $\underset{\sim}{R}$. L'argument précédent reste applicable à la sous-classe des fonctions f de $\mathcal{C}(I)$ pour lesquelles $f(0) = f(1)$ (car les fonctions signal trapèze isocèle envisagées ℓ_k , L_k s'annulent aux points 0 et 1), de sorte que le 1er critère de Weyl peut encore se formuler ainsi : *pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}(T)$, *on a (10), avec* $\underset{\vee}{u_n} = u_n$.

2. Autres critères analogues.

2.1. – *Pour que la suite* u_n *soit u. é. r.* (mod 1) , *il faut et il suffit que, pour toute fonction* $f \in \mathfrak{J}(I)$, *on ait*

$$\text{(12)} \qquad \underset{\nu \in \mathbb{N}}{\text{unif}} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu+1}^{\nu+N} f(\underset{\vee}{u_n}) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

(PETERSEN [9]).

La condition est suffisante, car pour $f = \psi_{[a,b[}$ elle exprime la définition 3, puisque $\sum_{\nu+1}^{\nu+N} \psi_{[a,b[}(\underset{\vee}{u_n}) = [\nu , N , a , b[_u$. Sa nécessité s'établit à partir d'inégalités analogues à (11), où la sommation est faite cette fois de $\nu + 1$ à $\nu + N$.

2.2. – *Pour que la suite* u_n *soit p. é. r.* (mod 1) , *il faut et il suffit qu'il existe une application strictement croissante* φ *de* $\mathbb{N}^+$ *dans* $\mathbb{N}^+$ *telle que, pour toute fonction* $f \in \mathfrak{J}(I)$, *on ait*

$$\text{(13)} \qquad \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{1}^{\varphi(N)} f(\underset{\vee}{u_n}) = \int_0^1 f(x)\, dx \quad .$$

2.3. – *Soit* $\lambda_n \geqslant \lambda_{n+1} > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^+$ *et* $\sum_1^\infty \lambda_n = \infty$. *Pour que la suite* u_n *soit* λ_n*-é. r.* (mod 1) , *il faut et il suffit que, pour toute fonction* $f \in \mathfrak{J}(I)$, *on ait*

$$\text{(14)} \qquad \lim_{N \to \infty} \Big(\sum_1^N \lambda_n\Big)^{-1} \sum_1^N \lambda_n\, f(\underset{\vee}{u_n}) = \int_0^1 f(x)\, dx \quad .$$

3. Deuxième critère de Weyl.

Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$e(x) = e^{2i\pi x} \quad .$$

On a le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 4. - <u>Pour que la suite</u> u_n <u>soit é. r.</u> (mod 1) , <u>il faut et il suffit que, pour tout entier</u> $h \in \underset{\sim}{N}^+$, <u>on ait</u>

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} e(hu_n) = 0 \tag{15}$$

(WEYL [17]).

Une formulation équivalente de cette condition nécessaire et suffisante est immédiatement : <u>pour tout entier non nul</u> $h \in \underset{\sim}{Z}$, <u>on a (15).</u>

La condition est nécessaire car, si la suite u_n est é. r. (mod 1) , (10) donne, en prenant $f(x) = e(hx)$, où $h \in \underset{\sim}{N}^+$, de sorte que $f \in \mathcal{C}(T)$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} e(hu_n) = \int_0^1 e(hx)\ dx = \left[\frac{e(hx)}{2i\pi h}\right]_0^1 = 0 \quad .$$

Nous allons ramener la suffisance de la condition (15) à celle de la condition (10). $\mathcal{C}(T)$ est un espace vectoriel sur le corps $\underset{\sim}{C}$, que nous munissons de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup\limits_{x\in\underset{\sim}{R}} |f(x)|$. Soit $\mathcal{T}(T)$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques, c'est-à-dire des combinaisons linéaires à ceofficients complexes des fonctions $x \to e(hx)$, où $h \in \underset{\sim}{Z}$. On sait que $\mathcal{T}(T)$ est un sous-espace de $\mathcal{C}(T)$ partout dense sur $\mathcal{C}(T)$.

Dès lors, soit $f \in \mathcal{C}(T)$; il existe une suite de fonctions $f_k \in \mathcal{T}(T)$, soit $f_k(x) = \sum\limits_{-H}^{H} \gamma_h\ e(hx)$, qui converge uniformément vers f sur $\underset{\sim}{R}$ quand $k \to \infty$ (par exemple, la suite des moyennes arithmétiques des k premières sommes partielles de la série de Fourier de f , écrite sous forme exponentielle). Si la condition (15) est satisfaite pour tout entier non nul $h \in \underset{\sim}{Z}$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} f_k(u_n) = \sum_{h=-H}^{H} \gamma_h \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e(hu_n) = \gamma_0$$

et d'autre part

$$\int_0^1 f_k(x)\ dx = \sum_{-H}^{H} \gamma_h \int_0^1 e(hx)\ dx = \gamma_0$$

de sorte que f_k vérifie la condition (10). On en conclut aisément, en utilisant la convergence uniforme de la suite f_k vers f sur $\underset{\sim}{R}$, que f vérifie également la condition (10). Le théorème 3 montre alors que la suite u_n est é. r. (mod 1) .

4. – La même idée générale conduit au résultat suivant :

THÉORÈME 5. – Pour que la suite u_n soit é. r. (mod 1), il faut et il suffit que, pour tout entier $h \in \underset{\sim}{N}^+$, on ait

$$(16) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_1^N (\underset{\smile}{u_n})^h = \frac{1}{h+1} \quad .$$

La condition est nécessaire car, si la suite u_n est é. r. (mod 1), (10) donne, en prenant $f(x) = x^h$, où $h \in \underset{\sim}{N}^+$, de sorte que $f \in \mathcal{C}^*(I)$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_1^N (\underset{\smile}{u_n})^h = \int_0^1 x^h \, dx = \left[\frac{x^{h+1}}{h+1}\right]_0^1 = \frac{1}{h+1} \quad .$$

Pour établir que la condition est suffisante, on considère cette fois le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}(I)$ des polynômes sur I, qui est partout dense sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $f \in \mathcal{C}(I)$; il existe une suite de fonctions $f_k \in \mathcal{P}(I)$, soit $f_k(x) = \sum_0^H \alpha_h x^h$, qui converge uniformément vers f sur I quand $k \to \infty$. Si la condition (16) est satisfaite pour tout entier $h \in \underset{\sim}{N}^+$, on a, avec la convention $0^0 = 1$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_1^N f_k(\underset{\smile}{u_n}) = \sum_{h=0}^H \alpha_h \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\underset{\smile}{u_n})^h = \sum_0^H \frac{\alpha_h}{h+1}$$

et d'autre part

$$\int_0^1 f_k(x) \, dx = \sum_0^H \alpha_h \int_0^1 x^h \, dx = \sum_0^H \frac{\alpha_h}{h+1}$$

de sorte que f_k vérifie la condition (10). Dès lors, la démonstration s'achève comme précédemment.

5. Autres critères analogues.

5.1. – Pour que la suite u_n soit u. é. r. (mod 1), il faut et il suffit que, pour tout entier $h \in \underset{\sim}{N}^+$, on ait

$$(17) \qquad \underset{\nu \in \underset{\sim}{N}}{\text{unif}} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu+1}^{\nu+N} e(hu_n) = 0$$

(PETERSEN [9]).

La condition est nécessaire car, si la suite u_n est u. é. r. (mod 1), (12) fournit (17) pour $f(x) = e(hx)$, où $h \in \underset{\sim}{N}^+$. Sa suffisance s'établit à l'aide d'un argument analogue à celui du théorème 4.

5.2. - Pour que la suite u_n soit p. é. r. (mod 1), il faut et il suffit qu'il existe une application strictement croissante φ de $\underset{\sim}{N}^+$ dans $\underset{\sim}{N}^+$ telle que, pour tout entier $h \in \underset{\sim}{N}^+$, on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{1}^{\varphi(N)} e(hu_n) = 0 \quad . \tag{18}$$

5.3. - Soit $\lambda_n \geqslant \lambda_{n+1} > 0$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}^+$ et $\sum_{1}^{\infty} \lambda_n = \infty$. Pour que la suite u_n soit λ_n-é. r. (mod 1), il faut et il suffit que, pour tout entier $h \in \underset{\sim}{N}^+$, on ait

$$\lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{1}^{N} \lambda_n\Big)^{-1} \sum_{1}^{N} \lambda_n \, e(hu_n) = 0 \quad . \tag{19}$$

5.4. - Des critères analogues au théorème 5 s'appliquent également aux suites u. é. r., p. é. r., λ_n-é. r. (mod 1).

6. Applications.

6.1. THÉORÈME 6. - La suite λn, où $\lambda \in \underset{\sim}{R} - \underset{\sim}{Q}$, est u. é. r. (mod 1).

$\sum_{\nu+1}^{\nu+N} e(h\lambda n)$, où $h \in \underset{\sim}{N}^+$, est la somme d'une progression géométrique de raison $e(h\lambda) \neq 1$, puisque λ est irrationnel ; on a donc

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu+1}^{\nu+N} e(h\lambda n) = \frac{1}{N} \frac{e(h\lambda(\nu + N + 1)) - e(h\lambda(\nu + 1))}{e(h\lambda) - 1} = \frac{e(h\lambda(\nu + 1))}{e(h\lambda) - 1} \frac{e(h\lambda N) - 1}{N} \quad ,$$

quantité dont le module est $\leqslant \frac{1}{|e(h\lambda) - 1|} \frac{2}{N} = \frac{1}{N|\sin \pi h\lambda|}$, ce qui montre qu'elle tend uniformément en $\nu \in \underset{\sim}{N}$ vers 0 quand $N \to \infty$. Dès lors, le critère (17) donne le résultat annoncé.

6.2. La suite $\lambda \log n$, où $\lambda \in \underset{\sim}{R}$, n'est pas é. r. (mod 1).

Utilisons la formule sommatoire d'Euler

$$\sum_{N_0}^{N} F(n) = \int_{N_0}^{N} F(t)\, dt + \frac{1}{2} (F(N_0) + F(N)) - \int_{N_0}^{N} (\tfrac{1}{2} - \underset{\vee}{t})\, F'(t)\, dt \tag{20}$$

où N_0, N sont des entiers naturels $(N_0 \leq N)$ et où F est une fonction à valeurs complexes dérivable sur $[N_0, N]$. Pour $F(t) = e(\lambda \log t)$ et $N_0 = 1$, on obtient

$$\sum_1^N e(\lambda \log n) = \int_1^N e(\lambda \log t)\, dt + \frac{1}{2}(1 + e(\lambda \log N)) - 2i\pi\lambda \int_1^N (\tfrac{1}{2} - \underset{\vee}{t})\, e(\lambda \log t) \frac{dt}{t} \quad .$$

Les trois termes figurant au 2e membre s'écrivent respectivement

$$\left[\frac{t\, e(\lambda \log t)}{2i\pi\lambda + 1}\right]_1^N = \frac{N\, e(\lambda \log N) - 1}{2i\pi\lambda + 1}, \qquad O(1), \qquad O\left(\int_1^N \frac{dt}{t}\right) = O(\log N) \quad ,$$

de sorte que

$$\frac{1}{N} \sum_1^N e(\lambda \log n) = \frac{e(\lambda \log N)}{2i\pi\lambda + 1} + O\left(\frac{\log N}{N}\right) \quad .$$

Le 1er terme du second membre ayant pour module $(1 + 4\pi^2 \lambda^2)^{-1/2}$, indépendant de N, on voit que le 1er membre ne tend pas vers 0 quand $N \to \infty$, ce qui assure le résultat annoncé.

6.3. <u>La suite</u> λp^n, <u>où</u> $p \in \underset{\sim}{Z}$ <u>et</u> $\lambda \in \underset{\sim}{R}$, <u>n'est pas u. é. r.</u> (mod 1).

Soit $|p| \geq 2$ et $\lambda \neq 0$ (sinon, le résultat est évident). Posons $u_n = \lambda p^n$ et formons

$$\sum_{\nu+1}^{\nu+N} e(u_n) = \sum_1^N e(u_{n+\nu}) = \sum_1^N e(p^n u_\nu)$$

d'où

$$\left|\sum_{\nu+1}^{\nu+N} e(u_n)\right| \geq \left|\sum_1^N \cos 2\pi p^n u_\nu\right| = \left|\sum_1^N \cos 2\pi |p|^n \underset{\smile}{u_\nu}\right|$$

où tous les arguments, soient $\theta_n(\nu)$, sont compris au sens large entre 0 et $2\pi|p|^N \underset{\smile}{u_\nu}$. Supposons que la suite u_n soit u. é. r. (mod 1) ; alors 0 est un point d'accumulation de sa répartition (mod 1) et, quel que soit $N \in \underset{\sim}{N}^+$, il existe $\nu_N \in \underset{\sim}{N}^+$ tel que $\underset{\smile}{u_{\nu_N}} < \frac{1}{6|p|^N}$. Dans ces conditions, tous les arguments $\theta_n(\nu_N)$ vérifient $0 \leq \theta_n(\nu_N) < \frac{\pi}{3}$, donc tous leurs cosinus sont $> \frac{1}{2}$, et l'on a, pour tout $N \in \underset{\sim}{N}^+$:

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{\nu_N+1}^{\nu_N+N} e(u_n)\right| > \frac{1}{2} \quad .$$

On voit que le critère (17) est en défaut pour $h = 1$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur la suite u_n. Ainsi le résultat annoncé se trouve établi par l'absurde.

La méthode précédente est due à KEOGH-LAWTON-PETERSEN [3], qui indiquent la même propriété pour la suite $\lambda\alpha^n$, où $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; mais leur démonstration n'est pas concluante.

A noter que la suite λp^n, où $p \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$, qui n'est u. e. r. (mod 1) pour aucun $\lambda \in \mathbb{R}$, est é. r. (mod 1) pour presque tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ (cf. théorème 13, cas particulier).

III. Conditions suffisantes d'équirépartition et applications.

1. Condition suffisante de Fejér.

1.1. THÉORÈME 7. - Si f est une fonction définie au voisinage de l'infini positif et sur $\mathbb{N}^+$, strictement monotone, dérivable et à dérivée monotone au voisinage de l'infini positif, si $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ et si $\lim_{x\to\infty} x|f'(x)| = \infty$, alors la suite $f(n)$ est é. r. (mod 1). (cf. PÓLYA-SZEGÖ [11].)

Remarquons d'abord que les hypothèses faites sur f, que nous supposons vérifiées pour $x \geqslant x_0$, entraînent $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$, car $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(\xi)$, où $x_0 < \xi < x$, d'où, puisque $|f'(\xi)| \geqslant |f'(x)|$:

$$|f(x)| \geqslant (x - x_0)\ |f'(\xi)| - |f(x_0)| \geqslant x|f'(x)| - x_0|f'(x)| - |f(x_0)|$$

et ce dernier membre $\to \infty$ quand $x \to \infty$.

Supposons, pour fixer les idées, que f soit strictement croissante sur $[x_0, \infty[$, et soit φ sa fonction inverse, elle aussi strictement croissante et dérivable sur $[f(x_0), \infty[$; on a $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, φ' croissante sur $[f(x_0), \infty[$ et $\lim_{x\to\infty} \varphi'(x) = \infty$.

Soit $0 < b \leqslant 1$. Pour un entier naturel k assez grand, disons pour $k \geqslant k_0$, le nombre des termes $f(n)$ tels que $k \leqslant f(n) < k + b$, c'est-à-dire encore tels que $\varphi(k) \leqslant n < \varphi(k+b)$, est $\varphi(k+b) - \varphi(k) + O(1) = b\varphi'(k+c_k) + O(1)$, où $0 < c_k < b$. Donc, si $\varphi(K-1) \leqslant N < \varphi(K)$, avec $K > K_0$, le nombre des termes $f(n)$ tels que $0 \leqslant f(n) < b$ et $1 \leqslant n \leqslant N$ est

$$(N\,,\,0\,,\,b(_f = O(1) + \sum_{K_0}^{K-1} \left(b\varphi'(k+c_k) + O(1)\right)$$

$$- \left| \begin{array}{ll} \varphi(K-1+b) - N & \text{si} \quad \varphi(K-1) \leqslant N < \varphi(K-1+b) \\ 0 & \text{si} \quad \varphi(K-1+b) \leqslant N < \varphi(K) \end{array} \right. \quad .$$

Dans les deux cas, ce dernier terme est $\leqslant \varphi(K) - \varphi(K-1) \leqslant \varphi'(K)$, puisque φ' est croissante, de sorte que

$$(N\,,\,0\,,\,b(_f = b \sum_{K_0}^{K-1} \varphi'(k+c_k) + O(K) + O(\varphi'(K)) \quad .$$

La somme $\sum_{K_0}^{K-1} \varphi'(k+c_k)$ est comprise entre

$$\varphi'(K_0) + \varphi'(K_0+1) + \dots + \varphi'(K-1)$$

et

$$\varphi'(K_0+1) + \varphi'(K_0+2) + \dots + \varphi'(K) \quad ,$$

et l'intégrale $\int_{K_0}^{K} \varphi'(x)\,dx = \varphi(K) - \varphi(K_0)$ est comprise entre les mêmes bornes, dont la différence est $\varphi'(K) - \varphi'(K_0)$; on a donc

$$\left| \sum_{K_0}^{K-1} \varphi'(k+c_k) - \varphi(K) + \varphi(K_0) \right| \leqslant \varphi'(K) - \varphi'(K_0)$$

d'où

$$\sum_{K_0}^{K-1} \varphi'(k+c_k) = \varphi(K) + o(\varphi'(K)) \quad .$$

On obtient ainsi

$$(N\,,\,0\,,\,b(_f = b\varphi(K) + o(K) + o(\varphi'(K)) \quad .$$

D'autre part

$$N = \varphi(K) + O(\varphi'(K)) \quad .$$

Quand $x \to \infty$, on a $f'(x) \to 0$, donc aussi $\frac{f(x)}{x} \to 0$, de sorte que $K = o(\varphi(K))$; dans les mêmes conditions $xf'(x) \to \infty$, donc $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \to 0$, de sorte que $\varphi'(K) = o(\varphi(K))$. Dès lors, les formules précédentes deviennent

$$\left[N , 0 , b\right[_f = b\varphi(K) + o(\varphi(K))$$

$$N = \varphi(K) + o(\varphi(K)) \quad .$$

Il en résulte que $\frac{\left[N, 0 , b\right[_f}{N} \to b$ quand $K \to \infty$, donc aussi quand $N \to \infty$, et la suite $f(n)$ est é. r. (mod 1).

1.2. - Le théorème 7 peut aussi s'établir à l'aide de la formule (20) et du 2e critère de Weyl. Supposons les hypothèses faites sur f vérifiées pour $x \geqslant N_0$, où $N_0 \in \underset{\sim}{N}^+$, et soit, pour fixer les idées, f strictement croissante sur $\left[N_0 , \infty\right[$. Prenant $F(t) = e(hf(t))$, où $h \in \underset{\sim}{N}^+$, (20) donne

$$(21) \quad \sum_{N_0}^{N} e(hf(n)) = \int_{N_0}^{N} e(hf(t))\ dt + \frac{1}{2}\left(e(hf(N_0)) + e(hf(N))\right) - 2i\,\pi h \int_{N_0}^{N} \left(\frac{1}{2} - \underset{\vee}{t}\right) e(hf(t))\ f'(t)\ dt \quad .$$

Le 2e et le 3e termes figurant au second membre s'écrivent respectivement $O(1)$ et $O\left(\int_{N_0}^{N} f'(t)\ dt\right) = O(f(N))$. D'autre part f', étant une fonction dérivée monotone sur $\left[N_0 , N\right]$, est continue sur $\left[N_0 , N\right]$, donc $\frac{1}{f'}$ est, elle aussi, monotone et continue sur $\left[N_0 , N\right]$, ce qui nous permet d'écrire, en intégrant par parties :

$$2i\,\pi h \int_{N_0}^{N} e(hf(t))\ dt = \int_{N_0}^{N} \frac{1}{f'(t)}\ de(hf(t)) = \left[\frac{e(hf(t))}{f'(t)}\right]_{N_0}^{N} - \int_{N_0}^{N} e(hf(t))\ d\left(\frac{1}{f'(t)}\right)$$

d'où

$$\int_{N_0}^{N} e(hf(t))\ dt = O\left(\frac{1}{f'(N)}\right) + O\left(\int_{N_0}^{N} d\left(\frac{1}{f'(t)}\right)\right) = O\left(\frac{1}{f'(N)}\right) \quad .$$

En résumé, il résulte de (21) que

$$\sum_{1}^{N} e(hf(n)) = \mathcal{O}(f(N)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{f'(N)}\right) \quad .$$

Les deux dernières hypothèses de l'énoncé fournissant $f(N) = o(N)$ et $\frac{1}{f'(N)} = o(N)$, on obtient finalement, pour tout $h \in \mathbb{N}^+$:

$$\sum_{1}^{N} e(hf(n)) = o(N)$$

et le critère (15) montre que la suite $f(n)$ est é. r. (mod 1) .

2. Application. – Prenant $f(x) = \lambda x^{\alpha} \log^{\beta} x$, on trouve que la suite $\lambda n^{\alpha} \log^{\beta} n$, où α , β , λ réels et $\lambda \neq 0$, est é. r. (mod 1) :

1° Si $0 < \alpha < 1$;

2° Si $\alpha = 0$ et $\beta > 1$.

3. Condition suffisante de Van der Corput.

3.1. THÉORÈME 8. – Si, pour tout $h \in \mathbb{N}^+$, la suite $u_{n+h} - u_n$ est é. r. (mod 1), alors la suite u_n est é. r. (mod 1) . (VAN DER CORPUT [16])

Utilisons l'inégalité de Van der Corput

$$(22) \quad H^2 \left| \sum_{1}^{N} z_n \right|^2 \leqslant H(H + N - 1) \sum_{1}^{N} |z_n|^2 + 2(H + N - 1) \sum_{h=1}^{H-1} (H - h) \left| \sum_{n=1}^{N-h} \overline{z}_n z_{n+h} \right|$$

où H , N sont deux entiers naturels tels que $H \leqslant N$, et où z_k , $\overline{z}_k$ désignent deux nombres complexes conjugués $(1 \leqslant k \leqslant N)$. H étant choisi, prenons $z_n = e(ku_n)$, où $k \in \mathbb{N}^+$; on a, pour $N \geqslant H$:

$$H^2 \left| \sum_{1}^{N} e(ku_n) \right|^2 \leqslant H(H + N - 1) N + 2(H + N - 1) \sum_{h=1}^{H-1} (H - h) \left| \sum_{n=1}^{N-h} e(k(u_{n+h} - u_n)) \right|$$

d'où

$$(23) \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} e(ku_n) \right|^2 \leqslant \frac{H + N - 1}{NH}$$
$$+ 2 \sum_{h=1}^{H-1} \frac{(H + N - 1)(H - h)(N - h)}{N^2 H^2} \left| \frac{1}{N - h} \sum_{n=1}^{N-h} e(k(u_{n+h} - u_n)) \right| \quad .$$

Si pour tout $h \in \mathbb{N}^+$, la suite $u_{n+h} - u_n$ est é. r. (mod 1) , le 2e critère de Weyl montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}^+$, le dernier terme de ce second membre tend vers 0 quand $N \to \infty$. Il en résulte que la limite supérieure du 1er membre, quand $N \to \infty$, est $\leq \frac{1}{H}$, et cela exige, puisque H est arbitrairement grand, que, pour tout $k \in \underset{\sim}{N}^+$, $\frac{1}{N}\sum_1^N e(ku_n)$ tende vers 0 quand $N \to \infty$. Dès lors, une nouvelle application du critère (15) donne le résultat annoncé.

3.2. - Plus généralement, sous les mêmes hypothèses, KOROBOV-POSTNIKOV [5] montrent que la suite u_{pn+q}, où $p \in \underset{\sim}{N}^+$ et $q \in \underset{\sim}{N}$, est é. r. (mod 1).

3.3. - La méthode précédente permet d'ailleurs de justifier une autre généralisation du théorème 8 :

<u>Soit</u> φ <u>une application strictement croissante de</u> $\underset{\sim}{N}^+$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{N}^+$ <u>telle que</u> $\lim_{h\to\infty} \frac{\varphi(h)}{h} = 1$; <u>si pour tout</u> $h \in \underset{\sim}{N}^+$ <u>la suite</u> $u_{n+\varphi(h)} - u_n$ <u>est é. r.</u> (mod 1), <u>alors la suite</u> u_n <u>est é. r.</u> (mod 1).

On sépare, dans la somme générale qui figure au 2e membre de (23), les termes pour lesquels $h \notin \{\varphi(m)\}$, de somme $A_1(N)$, et ceux pour lesquels $h \in \{\varphi(m)\}$, de somme $A_2(N)$; on a alors :

$$A_1(N) \leq \sum_{\substack{1\leq h<H \\ h\notin\{\varphi(m)\}}} \frac{(H+N-1)(H-h)(N-h)}{N^2 H^2} \qquad (24)$$

Il existe un entier naturel m_H tel que $\varphi(m_H) \leq H-1 < \varphi(m_H+1)$ et, d'après l'hypothèse faite sur φ, on voit que $1 \geq \frac{m_H}{H-1} \to 1$ quand $H \to \infty$, donc que $0 \leq \frac{H-1-m_H}{H} \to 0$ quand $H \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$; pour H assez grand, disons $H > H_\varepsilon$, le nombre des termes figurant au 2e membre de (24), qui est $H-1-m_H$, sera $< \varepsilon H$, et l'on aura

$$A_1(N) < \frac{\varepsilon(H+N-1)}{N} .$$

Ainsi

$$\left|\frac{1}{N}\sum_1^N e(ku_n)\right|^2 < \frac{H+N-1}{N}\left(\frac{1}{H}+2\varepsilon\right) + 2A_2(N) .$$

Les hypothèses du nouvel énoncé entraînent que $A_2(N) \to 0$ quand $N \to \infty$. Il en résulte que la limite supérieure du 1er membre quand $N \to \infty$ est $\leq \frac{1}{H} + 2\varepsilon$, et, puisque H est arbitrairement grand et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on achève comme précédemment.

3.4. - La condition suffisante précédente n'est pas nécessaire ; par exemple, la suite $u_n = \lambda n$, où $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, est é. r. (mod 1), alors que la suite $u_{n+\varphi(h)} - u_n = \lambda\varphi(h)$ ne l'est évidemment pas.

3.5. - H. DELANGE a montré que, étant donné $p \in \mathbb{N}^+$, pour que la suite u_n soit é. r. (mod 1), il suffit que, pour tout $h \in \mathbb{N}^+$, la suite $u_{n+ph} - u_n$ le soit (résultat non publié).

4. - Posons $\Delta^1 u_n = u_{n+1} - u_n$, $\Delta^k u_n = \Delta^1 \Delta^{k-1} u_n$ où $k = 2, 3, 4, \dots$, do sorte qué $\Delta^{k-1} \Delta^1 u_n = \Delta^{k-1} u_{n+1} - \Delta^{k-1} u_n = \Delta^1 \Delta^{k-1} u_n$.

THÉORÈME 9. - <u>Soit</u> k <u>un entier naturel ; si la suite</u> $\Delta^k u_n$ <u>est strictement monotone à partir d'un certain rang, si</u> $\lim_{n\to\infty} \Delta^k u_n = 0$ <u>et si</u> $\lim_{n\to\infty} n|\Delta^k u_n| = \infty$, <u>alors la suite</u> u_n <u>est é. r.</u> (mod 1). (VAN DER CORPUT [16].)

La propriété est vraie pour $k = 1$, car on peut construire une fonction f vérifiant les hypothèses du théorème 7 et telle que $f(n) = u_n$.

Soit r un entier naturel $\geqslant 2$ et supposons que la propriété soit vraie pour $k = r - 1$. Pour tout $h \in \mathbb{N}^+$, on a

$$u_{n+h} - u_n = \sum_{p=0}^{h-1} \Delta^1 u_{n+p} \quad ,$$

d'où

$$\Delta^{r-1}(u_{n+h} - u_n) = \sum_{p=0}^{h-1} \Delta^r u_{n+p} \quad .$$

Si $\Delta^r u_n$ tend monotonement vers 0 quand $n \to \infty$, il en est de même pour $\Delta^r u_{n+p}$, donc aussi pour $\Delta^{r-1}(u_{n+h} - u_n)$ quel que soit $h \in \mathbb{N}^+$. Si $n\Delta^r u_n$ tend vers $\pm\infty$ quand $n \to \infty$, il en est de même pour $n\Delta^r u_{n+p}$, donc aussi pour $n\Delta^{r-1}(u_{n+h} - u_n)$ quel que soit $h \in \mathbb{N}^+$. La propriété étant vraie pour $k = r - 1$, la suite $u_{n+h} - u_n$ est é. r. (mod 1) quel que soit $h \in \mathbb{N}^+$, donc (théorème 8) la suite u_n est é. r. (mod 1), de sorte que la propriété est alors vraie pour $k = r$. La démonstration se trouve ainsi achevée par récurrence sur k.

5. THÉORÈME 10. - <u>Soit</u> k <u>un entier naturel ; si</u> $\lim_{n\to\infty} \Delta^k u_n = \alpha$, <u>où</u> $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, <u>alors la suite</u> u_n <u>est é. r.</u> (mod 1). (VAN DER CORPUT [16].)

On établit la propriété pour $k = 1$ à partir de l'inégalité

$$|e(x) - e(y)| \leqslant 2\pi|x - y|$$

où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, et la démonstration s'achève par récurrence sur k en utilisant le théorème 8.

Sous une hypothèse plus forte (cf. III-6.2), la démonstration devient élémentaire (en donnant d'ailleurs davantage).

6. Autres conditions suffisantes analogues.

6.1. - <u>Si pour tout</u> $h \in \mathbb{N}^+$, <u>la suite</u> $u_{n+h} - u_n$ <u>est u. é. r.</u> (mod 1) , <u>alors la suite</u> u_n <u>est u. é. r.</u> (mod 1) . (LAWTON [6].)

Cette propriété s'établit à l'aide d'un argument analogue à celui du théorème 8, en prenant dans (22) $z_n = e(ku_{n+\nu})$, où $k \in \mathbb{N}^+$ et $\nu \in \mathbb{N}$. Elle reçoit d'ailleurs la même généralisation que le théorème 8 (cf. III-3.3).

6.2. - <u>Soit</u> k <u>un entier naturel ; si la série</u> $\sum_1^\infty (\Delta^k u_n - \alpha)$, <u>où</u> $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, <u>est convergente, alors la suite</u> u_n <u>est u. é. r.</u> (mod 1) .

La propriété est vraie pour $k = 1$, car alors $u_n - n\alpha$ tend vers une limite finie quand $n \to \infty$ et la suite $n\alpha$ est u. é. r. (mod 1) (théorème 6), ce qui permet d'appliquer I-8.2. La démonstration s'achève par récurrence sur k , en appliquant III-6.1.

6.3. - <u>Si</u> f <u>est une fonction définie au voisinage de l'infini positif et sur</u> $\mathbb{N}^+$, <u>strictement monotone et dérivable au voisinage de l'infini positif, si</u> $f'(x)$ <u>et</u> $xf'(x)$ <u>sont monotones en</u> x <u>au voisinage de l'infini positif, si</u> $\lim_{x\to\infty}|f(x)| = \infty$, <u>si</u> $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ <u>et si</u> $\lim_{x\to\infty} x|f'(x)| \log x = \infty$, <u>alors la suite</u> $f(n)$ <u>est</u> $\frac{1}{n}$-é. r. (mod 1) (TSUJI [14]).

Ce théorème, analogue au théorème 7, se généralise d'ailleurs et donne alors des conditions suffisantes pour qu'une suite $f(n)$ soit λ_n- é. r. (mod 1) , où $\lambda_n = \frac{1}{n}, \frac{1}{n \log n}, \frac{1}{n \log n \log \log n}, \ldots$

6.4. - <u>Soit</u> $\lambda_n \geqslant \lambda_{n+1} > 0$ <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{N}^+$ <u>et</u> $\sum_1^\infty \lambda_n = \infty$. <u>Si la suite</u> $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+h}}$ <u>est décroissante en</u> n <u>pour tout</u> $h \in \mathbb{N}^+$ <u>et si la suite</u> $u_{n+h} - u_n$ <u>est</u> λ_n<u>-é. r.</u> (mod 1) <u>pour tout</u> $h \in \mathbb{N}^+$, <u>alors la suite</u> u_n est λ_n<u>-é. r.</u> (mod 1) (TSUJI [14]).

7. Applications.

7.1. THÉORÈME 11. - Si $a_0, a_1, \dots, a_r$ sont $r+1$ nombres réels ($r \geqslant 1$, $a_r \neq 0$) et si l'un au moins des nombres $a_1, a_2, \dots, a_r$ est irrationnel, alors la suite $u_n(r) = \sum_{k=0}^{r} a_k n^k$ est u. é. r. (mod 1) (LAWTON [6]).

a. Supposons a_r irrationnel. La propriété est vraie pour $r = 1$ (théorème 6). Supposons qu'elle soit vraie pour $r = \ell - 1$, où $\ell \geqslant 2$; $u_{n+h}(\ell) - u_n(\ell)$ est un polynôme en n dont le terme de plus haut degré est $a_\ell \ell h n^{\ell-1}$, à coefficient irrationnel si l'on suppose a_ℓ irrationnel ; la propriété étant vraie pour $r = \ell - 1$, la suite $u_{n+h}(\ell) - u_n(\ell)$ est alors u. é. r. (mod 1) pour tout $h \in \mathbb{N}^+$, donc (III-6.1) la suite $u_n(\ell)$ l'est aussi, de sorte que la propriété est vraie pour $r = \ell$. Le résultat se trouve ainsi démontré par récurrence sur r.

b. Supposons a_r rationnel. Il existe alors un entier naturel $s \leqslant r-1$ tel que a_s soit irrationnel et $a_{s+1}, a_{s+2}, \dots, a_r$ soient rationnels ; donc il existe un entier naturel p tel que $pa_{s+1}, pa_{s+2}, \dots, pa_r$ soient des entiers de $\mathbb{N}$. Il en résulte que $u_{pn+q}(r)$ est congru (mod 1) à un polynôme en n dont le terme de plus haut degré est $a_s p^s n^s$, à coefficient irrationnel. Appliquant (a), on voit que la suite $u_{pn+q}(r)$ est u. é. r. (mod 1) pour tout $q \in \mathbb{N}$, donc en particulier pour $q = 0, 1, \dots, p-1$, et cela entraîne aisément que la suite $u_n(r)$ est u. é. r. (mod 1).

7.2. - Prenant $f(x) = \lambda x^\alpha \log^\beta x$, III-6.3 montre que la suite $\lambda n^\alpha \log^\beta n$, où α, β, λ réels et $\lambda \neq 0$, est $\frac{1}{n}$-é. r. (mod 1) :

1° Si $0 < \alpha < 1$;

2° Si $\alpha = 0$ et $\beta > 0$.

IV. Théorèmes métriques et applications.

1. Théorème métrique de Koksma.

1.1. THÉORÈME 12. - Soient α, β, c trois nombres réels tels que $\alpha < \beta$ et $c > 0$, et soit une suite f_n de fonctions à valeurs réelles définies sur $[\alpha, \beta]$. Si la fonction $\varphi_{p,q} = f_p - f_q$, où $p \neq q$, est dérivable sur $[\alpha, \beta]$,

<u>si sa fonction dérivée</u> $\varphi'_{p,q}$ <u>est monotone et de signe constant sur</u> (α , β) <u>et si</u> $|\varphi'_{p,q}(t)| \geq c$ <u>sur</u> (α , β) , <u>alors la suite</u> $f_n(t)$ <u>est é. r.</u> (mod 1) <u>pour presque tous les</u> $t \in (\alpha , \beta)$. (KOKSMA [4].)

a. Soit $h \in \underset{\sim}{N}^+$ et posons $\sigma_N(t) = \frac{1}{N} \sum_1^N e(hf_n(t))$; on a

$$|\sigma_N(t)|^2 = \sigma_N(t)\,\overline{\sigma_N(t)} = \frac{1}{N^2} \sum_{p=1}^{N} e(hf_p(t)) \sum_{q=1}^{N} e(-hf_q(t)) =$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{1\leq p\leq N \\ 1\leq q\leq N}} e(h\varphi_{p,q}(t))$$

d'où, en séparant dans cette somme les termes pour lesquels $p = q$ et ceux pour lesquels $p \neq q$:

$$|\sigma_N(t)|^2 = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{1\leq q<p\leq N} (e(h\varphi_{p,q}(t)) + e(-h\varphi_{p,q}(t)))$$

$$= \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{1\leq q<p\leq N} \cos 2\pi h\, \varphi_{p,q}(t) \quad .$$

Posons $\mathfrak{I}_N = \int_\alpha^\beta |\sigma_N(t)|^2\, dt$ et $\mathfrak{I}_{p,q} = \int_\alpha^\beta \cos 2\pi h\, \varphi_{p,q}(t)\, dt$; on a alors

$$\mathfrak{I}_N = \frac{\beta - \alpha}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{1\leq q<p\leq N} \mathfrak{I}_{p,q} \quad . \tag{25}$$

$\varphi'_{p,q}$ gardant un signe constant sur (α , β) , $\varphi_{p,q}$ est strictement monotone sur (α , β) ; dès lors, le changement de variable $u = 2\pi h\, \varphi_{p,q}(t)$ donne

$$\mathfrak{I}_{p,q} = \frac{1}{2\pi h} \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{\cos u}{\psi(u)}\, du$$

en posant $\varphi'_{p,q}(t) = \psi(u)$, $\alpha' = 2\pi h\, \varphi_{p,q}(\alpha)$, $\beta' = 2\pi h\, \varphi_{p,q}(\beta)$. ψ étant monotone sur le nouvel intervalle d'intégration, le 2e théorème de la moyenne, appliqué à l'intégrale précédente, donne dans tous les cas :

$$\mathfrak{I}_{p,q} = \frac{1}{2\pi h} \max\left(\frac{1}{|\psi(\alpha')|} , \frac{1}{|\psi(\beta')|}\right) \int_\Delta \cos u\, du$$

où Δ est un intervalle inclus dans le nouvel intervalle d'intégration. Comme $|\int_\Delta \cos u\, du| = |[\sin u]_\Delta| \leq 2$, on voit que

$$|\mathfrak{I}_{p,q}| \leqslant \frac{1}{\pi h} \max_{t\in\{\alpha,\beta\}} \frac{1}{|\varphi'_{p,q}(t)|} \quad .$$

Posons $A_N = \sum_{1\leqslant q<p\leqslant N} \max_{t\in\{\alpha,\beta\}} \frac{1}{|\varphi'_{p,q}(t)|}$; (25) donne alors

(26) $$\mathfrak{I}_N \leqslant \frac{\beta-\alpha}{N} + \frac{2}{\pi h N^2} A_N \quad .$$

b. Nous allons chercher une majoration de A_N. Soient $p \geqslant 2$, $t \in (\alpha, \beta)$, et rangeons $f'_1(t)$, $f'_2(t)$, ..., $f'_p(t)$ par ordre de grandeur croissante, soit

$$f'_{\nu_1}(t) < f'_{\nu_2}(t) < \dots < f'_{\nu_p}(t) \quad .$$

Si $1 \leqslant s < r \leqslant p$, les termes $f'_{\nu_r}(t)$ et $f'_{\nu_s}(t)$ sont séparés dans ce classement par $r-s$ intervalles, la longueur de chacun d'eux étant $\geqslant c$, de sorte que $f'_{\nu_r}(t) - f'_{\nu_s}(t) \geqslant (r-s)c$. On a donc

$$\sum_{q=1}^{p-1} \frac{1}{|f'_p(t) - f'_q(t)|} \leqslant 2\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{2c} + \dots + \frac{1}{(\ell-1)c}\right) + \left|\begin{array}{ll} \frac{1}{\ell c} & \text{si } p = 2\ell \\ \frac{2}{\ell c} & \text{si } p = 2\ell+1 \end{array}\right.$$

et par conséquent, dans tous les cas,; quel que soit $t \in (\alpha, \beta)$:

$$\sum_{q=1}^{p-1} \frac{1}{|\varphi'_{p,q}(t)|} \leqslant \frac{2}{c}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\ell}\right) \leqslant \frac{2}{c}\left(1 + \int_1^\ell \frac{du}{u}\right) = \frac{2}{c}(1 + \log \ell) \leqslant \frac{2}{c}\left(1 + \log\frac{p}{2}\right).$$

Dès lors, soit $N \geqslant 2$; on a :

$$A_N = \sum_{p=2}^{N} \sum_{q=1}^{p-1} \max_{t\in\{\alpha,\beta\}} \frac{1}{|\varphi'_{p,q}(t)|} \leqslant \sum_{p=2}^{N} \frac{2}{c}\left(1 + \log\frac{p}{2}\right) \leqslant \frac{2}{c}(N-1)\left(1 + \log\frac{N}{2}\right)$$
$$< \frac{2N(1 + \log N)}{c}$$

et (26) donne

$$\mathfrak{I}_N < \frac{\beta-\alpha}{N} + \frac{4(1 + \log N)}{\pi h c N}$$

ce qui montre que

$$\mathfrak{I}_N = O\left(\frac{\log N}{N}\right) \quad .$$

c. Pour tout $m \in \underset{\sim}{N}^+$, on a $\mathfrak{I}_{m^2} = O\left(\frac{\log m}{m^2}\right)$, de sorte que la série $\sum_1^\infty \mathfrak{I}_{m^2} = \sum_1^\infty \int_\alpha^\beta |\sigma_{m^2}(t)|^2 dt$ est convergente ; il en résulte, d'après un théorème de Fatou, que la série $\sum_1^\infty |\sigma_{m^2}(t)|^2$ est presque partout convergente sur (α , β), donc que l'on a

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_{m^2}(t) = 0 \qquad \text{p. p. sur } (\alpha , \beta) \quad .$$

Dès lors, soit m la racine carrée entière de N, définie par $m^2 \leqslant N < (m + 1)^2$, et formons

$$\frac{N}{m^2} \sigma_N(t) - \sigma_{m^2}(t) = \frac{1}{m^2} \sum_{m^2+1}^{N} e(hf_n(t)) \quad .$$

Le module de cette quantité est $\leqslant \frac{N - m^2}{m^2} < \frac{2m + 1}{m^2}$ qui tend vers 0 quand $m \to \infty$; donc, compte tenu du résultat précédent, on a aussi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{m^2} \sigma_N(t) = 0 \qquad \text{p. p. sur } (\alpha , \beta) \quad .$$

Comme $\frac{N}{m^2} \to 1$ quand $N \to \infty$, on obtient finalement, pour tout $h \in \underset{\sim}{N}^+$:

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(t) = 0 \qquad \text{p. p. sur } (\alpha , \beta) \quad ,$$

et le 2e critère de Weyl donne le résultat annoncé.

1.2. - LEVEQUE [7] montre que si, plus particulièrement, il existe $\gamma > 0$ tel que $|\varphi'_{p,q}(t)| \geqslant c|p - q|^\gamma$ sur (α , β), alors, quel que soit $\varepsilon > 0$ et pour tout $h \in \underset{\sim}{N}^+$, on a $\sigma_N(t) = o(N^{-(1/2)+\varepsilon})$ pour presque tous les $t \in (\alpha , \beta)$.

2. THÉORÈME 13. - <u>Soit</u> δ <u>un nombre réel</u> > 0 <u>et soit</u> F <u>une application biunivoque de</u> $\underset{\sim}{N}^+$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{R}$ <u>telle que, pour tout couple</u> p, q <u>d'entiers naturels</u>

<u>différents, on ait</u> $|F(p) - F(q)| \geq \delta$; <u>alors la suite</u> $tF(n)$ <u>est é. r.</u> (mod 1) <u>pour presque tous les</u> $t \in \underset{\sim}{R}$ (WEYL [17]).

On applique le théorème 12 à un intervalle $[\alpha , \beta]$ quelconque, avec $f_n(t) = tF(n)$, d'où $\varphi_{p,q}(t) = t(F(p) - F(q))$ et $\varphi'_{p,q}(t) = F(p) - F(q)$ constante non nulle pour $p \neq q$; de plus $|\varphi'_{p,q}(t)| = |F(p) - F(q)| \geq \delta$ pour $p \neq q$, de sorte qu'on peut prendre ici $c = \delta > 0$.

En particulier, <u>si</u> F <u>est une application biunivoque de</u> $\underset{\sim}{N}^+$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{Z}$, <u>alors la suite</u> $tF(n)$ <u>est é. r.</u> (mod 1) <u>pour presque tous les</u> $t \in \underset{\sim}{R}$; ici $\delta = 1$.

3. THÉORÈME 14. - <u>Soit</u> δ <u>un nombre réel</u> > 0 <u>et soit</u> F <u>une application biunivoque de</u> $\underset{\sim}{N}^+$ <u>dans</u> $[1 , \infty[$ <u>telle que, pour tout couple</u> p , q <u>d'entiers naturels différents, on ait</u> $|F(p) - F(q)| \geq \delta$; <u>alors la suite</u> $\lambda t^{F(n)}$; <u>où</u> λ <u>est un nombre réel non nul, est é. r.</u> (mod 1) <u>pour presque tous les</u> $t \in [1 , \infty[$ (KOKSMA [4]).

On applique le théorème 12 à un intervalle $[1 , \beta]$ quelconque, avec $f_n(t) = \lambda t^{F(n)}$, d'où $\varphi_{p,q}(t) = \lambda(t^{F(p)} - t^{F(q)})$ et

$$\varphi'_{p,q}(t) = \lambda(F(p)\ t^{F(p)-1} - F(q)\ t^{F(q)-1})$$

qui, pour $p \neq q$, a sur $[1 , \beta]$ le signe de $\lambda(F(p) - F(q))$; de plus $\varphi'_{p,q}$, pour $p \neq q$, est monotone sur $[1 , \beta]$, car $\varphi''_{p,q}(t)$ a sur $[1 , \beta]$ le signe de $\lambda(F(p) - F(q))$; enfin, pour $p \neq q$, on a sur $[1 , \beta]$, en posant $M = \max(F(p) , F(q))$ et $m = \min(F(p) , F(q))$:

$$|\varphi'_{p,q}(t)| = |\lambda|\ t^{m-1}\ (Mt^{M-m} - m) \geq |\lambda|\ (M - m) \geq |\lambda|\ \delta$$

de sorte qu'on peut prendre ici $c = |\lambda|\ \delta > 0$.

En particulier, <u>si</u> F <u>est une application biunivoque de</u> $\underset{\sim}{N}^+$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{N}^+$, <u>alors la suite</u> $\lambda t^{F(n)}$, <u>où</u> $0 \neq \lambda \in \underset{\sim}{R}$, <u>est é. r.</u> (mod 1) <u>pour presque tous les</u> $t \in [1 , \infty[$; ici $\delta = 1$. D'ailleurs, cette suite est aussi é. r. (mod 1) pour presque tous les $t \in]- \infty , - 1]$.

4. Applications.

4.1. - <u>La suite</u> $t\lambda^n$, <u>où</u> $\lambda \in \underset{\sim}{R}$ <u>et</u> $|\lambda| > 1$, <u>est é. r.</u> (mod 1) <u>pour presque tous les</u> $t \in \underset{\sim}{R}$. (WEYL [17]).

On applique le théorème 13 à $F(n) = \lambda^n$, où $|\lambda| > 1$; pour $p \neq q$, on a, en posant $M = \max(p, q)$ et $m = \min(p, q)$:

$$|F(p) - F(q)| = |\lambda|^m \, |\lambda^{M-m} - 1| \geqslant |\lambda|^m \, (|\lambda|^{M-m} - 1) \geqslant |\lambda| \, (|\lambda| - 1) > |\lambda| - 1$$

de sorte qu'on peut prendre ici $\delta = |\lambda| - 1 > 0$.

4.2. - <u>La suite</u> λt^n, <u>où</u> $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, <u>est é. r.</u> (mod 1) <u>pour presque tous les</u> $t \in \mathbb{R} -]-1, 1[$ (KOKSMA [4]).

On applique le théorème 14 (cas particulier et remarque) à $F(n) = n$. Parmi les $t \in \mathbb{R} -]-1, 1[$ pour lesquels la suite t^n n'est pas é. r. (mod 1) figurent, outre les $t \in \mathbb{Z} - \{0\}$, les <u>nombres de Pisot</u> [10] et les <u>nombres de Salem</u> [12].

4.3. - <u>La suite</u> λn^t, <u>où</u> $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, <u>est é. r.</u> (mod 1) <u>pour presque tous les</u> $t \in [1, \infty[$ (KOKSMA [4]).

On applique le théorème 12 à un intervalle $[1, \beta]$ quelconque, avec $f_n(t) = \lambda n^t$, d'où $\varphi_{p,q}(t) = \lambda(p^t - q^t)$ et $\varphi'_{p,q}(t) = \lambda(p^t \log p - q^t \log q)$ qui, pour $p \neq q$, a sur $[0, \beta]$ le signe de $\lambda(p - q)$; de plus $\varphi'_{p,q}$, pour $p \neq q$, est monotone sur $[0, \beta]$, car $\varphi''_{p,q}(t)$ a sur $[0, \beta]$ le signe de $\lambda(p - q)$; enfin, la formule des accroissements finis donne, pour $p \neq q$:

$$p^t \log p - q^t \log q = (p - q) \, x^{t-1} \, (1 + t \log x)$$

où x est strictement compris entre p et q, et, pour $p \neq q$, on a sur $[1, \beta]$:

$$|\varphi'_{p,q}(t)| = |\lambda| \, |p - q| \, x^{t-1} \, (1 + t \log x) > |\lambda| \, |p-q| \geqslant |\lambda|$$

de sorte qu'on peut prendre ici $c = |\lambda| > 0$.

On a vu d'ailleurs (cf. III-2) que la suite λn^t, où $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, est é. r. (mod 1) pour tous les $t \in]0, 1[$.

5. Théorèmes métriques de LeVeque.

5.1. - f désignant une application périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, appelons <u>conditions</u> $L(f)$ les suivantes :

$L_1(f)$: f est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

$L_2(f)$: f' n'a qu'un nombre fini de zéros sur une période.

$L_3(f)$: f' et f'' ne s'annulent pas simultanément sur $\mathbb{R}$.

5.2. THÉORÈME 15. - Soient α , ρ deux nombres réels tels que $\rho > 1$; soient F , G deux applications croissantes de $\mathbb{N}^+$ dans $]0 , \infty[$ telles que $G(n+1) \geqslant \rho G(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, et soit Φ une application périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ remplissant les conditions $L(\Phi)$ et $L(\Phi')$; alors la suite $G(n)\,\Phi(tF(n) + \alpha)$ est é. r. (mod 1) pour presque tous les $t \in \mathbb{R}$ (LEVEQUE [8]).

5.3. - Le théorème 15 s'applique en particulier à $\Phi(x) = \cos x$, et pour $G(x) = \lambda\rho^n$, où λ réel > 0 , on obtient alors :

Si α , ρ , λ sont trois nombres réels tels que $\rho > 1$, $\lambda > 0$ et si F est une application croissante de $\mathbb{N}^+$ dans $]0 , \infty[$, alors la suite $\lambda\rho^n \cos(tF(n) + \alpha)$ est é. r. (mod 1) pour presque tous les $t \in \mathbb{R}$ (LEVEQUE [8]).

5.4. - Si α est un nombre réel et si F est une application strictement croissante de $\mathbb{N}^+$ dans $\mathbb{N}^+$, alors la suite $F(n)\cos(tF(n) + \alpha)$ est é. r. (mod 1) pour presque tous les $t \in \mathbb{R}$ (LEVEQUE [8]).

6. - Si μ^* désigne la mesure produit sur $\mathbb{R}^\infty$ construite à partir de la mesure μ sur $\mathbb{R}$, on montre que μ^*-presque toutes les suites sont é. r. (mod 1) .

Plus précisément, CASSELS [1] établit que, pour μ^*-presque toutes les suites u_n , on a

$$\underset{0 \leq a < b \leq 1}{\text{unif}} \; \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{|(N , a , b[_u - N(b-a)|}{\sqrt{N \log\log N}} = \sqrt{2(b-a)(1-b+a)} \quad .$$

Il en résulte que, pour μ^*-presque toutes les suites et pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on a

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} N^{(1/2)-\varepsilon} D_N(u) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{N\to\infty}} N^{1/2} D_N(u) = \infty \quad .$$

V. Extension multidimensionnelle et applications.

1. Notations. – Soient $\vec{a} = (a_1 , a_2 , \dots , a_p)$, $\vec{b} = (b_1 , b_2 , \dots , b_p)$ deux vecteurs réels à p composantes, ou points de $\mathbb{R}^p$, tels que $\vec{a} < \vec{b}$, c'est-à-dire tels que $a_k < b_k$ pour $k = 1 , 2 , \dots , p$; l'ensemble des $\vec{x} = (x_1 , x_2 , \dots , x_p)$ de $\mathbb{R}^p$ tels que $\vec{a} \leqslant \vec{x} < \vec{b}$, c'est-à-dire tels que $a_k \leqslant x_k < b_k$ pour $k = 1 , 2 , \dots , p$, est noté $[\vec{a} , \vec{b}[$. On construit de même $[\vec{a} , \vec{b}]$, dont le sens est visible, à l'aide des relations d'ordre partiel entre vecteurs de $\mathbb{R}^p$ qui viennent d'être introduites. Pour $\mathbb{R}^p$, on pose $\vec{0} = (0 , 0 , \dots , 0)$, $\vec{1} = (1 , 1 , \dots , 1)$, $\vec{\infty} = (\infty , \infty , \dots , \infty)$, où le nombre p des composantes sera sans inconvénient sous-entendu ; on a $I^p = [\vec{0}, \vec{1}]$.

Si $\vec{x} = (x_1 , x_2 , \dots , x_p)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$, $\hat{\vec{x}} = (\hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \dots , \hat{x}_p)$ désigne sa partie entière et $\underset{\vee}{\vec{x}} = (\underset{\smile}{x_1} , \underset{\smile}{x_2} , \dots , \underset{\smile}{x_p})$ sa partie fractionnaire, de sorte que $\hat{\vec{x}} + \underset{\vee}{\vec{x}} = \vec{x}$ et $\vec{0} \leqslant \underset{\vee}{\vec{x}} < \vec{1}$.

On envisage dans V des suites $\{\vec{u}_{\vec{n}}\}_{\vec{n} \in \mathbb{N}^{+m}}$ de vecteurs réels $\vec{u}_{\vec{n}}$ à p composantes et à m indices, où $p \in \mathbb{N}^+$ et $m \in \mathbb{N}^+$; une telle suite sera appelée, par abus de langage, la suite $\vec{u}_{\vec{n}}$; parfois aussi nous la désignerons par $\vec{u}$. L'indice marquant le rang des diverses composantes d'un vecteur sera placé en bas ou en haut sans référence à une covariance ou une contravariance éventuelle de ce vecteur.

2. Définition 6. – L'extension multidimentionnelle de la notion d'équirépartition est due à WEYL [17] et à VAN DER CORPUT [16].

Soit une suite vectorielle multiple réelle à p composantes et à m indices $\vec{u}_{\vec{n}} = (u^1_{\vec{n}} , u^2_{\vec{n}} , \dots , u^p_{\vec{n}})$, où $\vec{n} = (n_1 , n_2 , \dots , n_m)$ est un vecteur de $\mathbb{N}^{+m}$; étant donnés un vecteur $\vec{N} = (N_1 , N_2 , \dots , N_m)$ de $\mathbb{N}^{+m}$ et un ensemble $E \subset I^p$, le nombre des termes $\vec{u}_{\vec{n}}$ tels que $\underset{\vee}{\vec{u}_{\vec{n}}} \in E$ et $\vec{1} \leqslant \vec{n} \leqslant \vec{N}$ est noté $(\vec{N} , E)_{\vec{u}}$. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$ tels que $\vec{0} \leqslant \vec{a} < \vec{b} \leqslant \vec{1}$, on pose $(\vec{N} , [\vec{a} , \vec{b}[)_{\vec{u}} = (\vec{N} , \vec{a} , \vec{b}[_{\vec{u}}$.

La suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ est dite équirépartie (mod 1) [e. r. (mod 1)] si et seulement si, pour tout couple $\vec{a}$, $\vec{b}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ tels que $\vec{0} \leqslant \vec{a} < \vec{b} \leqslant \vec{1}$, on a

(27) $$\lim_{\vec{N}\to\vec{\infty}} \frac{(\vec{N}, \vec{a}, \vec{b}(_{\vec{u}_{\vec{n}}}}{N_1 N_2 \ldots N_m} = \prod_1^p (b_k - a_k) \quad .$$

Lorsque de plus la suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ est répartie sur I^p, on dit qu'elle est <u>équirépartie sur</u> I^p. Pour que la suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ soit é. r. (mod 1), il faut et il suffit que la suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ soit é. r. sur I^p.

3. – Soit en particulier une suite vectorielle simple réelle à p composantes $\vec{u}_n = (u_n^1, u_n^2, \ldots, u_n^p)$, où $n \in \underset{\sim}{N}^+$. Si, étant donné un entier naturel N, le nombre des termes $\vec{u}_n$ tels que $\vec{a} \leq \vec{u}_n < \vec{b}$ et $1 \leq n \leq N$ est noté $(N, \vec{a}, \vec{b}(_{\vec{u}}$, la suite $\vec{u}_n$ sera é. r. (mod 1) si et seulement si, pour tous les couples $\vec{a}, \vec{b}$ envisagés plus haut, on a

(28) $$\lim_{N\to\infty} \frac{(N, \vec{a}, \vec{b}(_{\vec{u}}}{N} = \prod_1^p (b_k - a_k)$$

qui traduit (27) dans le cas $m = 1$.

Le nombre

(29) $$D_N(\vec{u}) = \sup_{\vec{0}\leq\vec{a}<\vec{b}\leq\vec{1}} \left| \frac{(N, \vec{a}, \vec{b}(_{\vec{u}}}{N} - \prod_1^p (b_k - a_k) \right|$$

s'appelle <u>discrépance</u> de l'ensemble $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_N\}$ des N premiers termes de la suite $\vec{u}_n$. Ici encore (cf. I-3, I-4), pour toute suite $\vec{u}_n$, on a $0 < D_N(\vec{u}) \leq 1$, et une condition nécessaire et suffisante d'équirépartition (mod 1) de la suite $\vec{u}_n$ est que l'on ait

(30) $$\lim_{N\to\infty} D_N(\vec{u}) = 0 \quad .$$

On en conclut qu'il faut même, pour que la suite $\vec{u}_n$ soit é. r. (mod 1), que la condition (28) soit satisfaite <u>uniformément en</u> $\vec{a}$ <u>et</u> $\vec{b}$.

4. – Un argument analogue à celui du théorème 2 montre que la définition 6 peut être formulée d'une manière plus générale : <u>pour tout ensemble</u> E <u>mesurable-</u>$\mathcal{R}$ <u>et inclus dans</u> I^p, <u>on a</u>

$$(31) \qquad \lim_{\vec{N}\to\vec{\infty}} \frac{(\vec{N}, E)_{\vec{u}}}{N_1 N_2 \ldots N_m} = |E| \quad .$$

5. Définition 7. — Soit $(\vec{\nu}, \vec{N}, \vec{a}, \vec{b}(_{\vec{u}}$ le nombre des termes $\vec{u}_{\vec{n}}$ tels que $\vec{a} \leq \vec{u}_{\vec{n}} < \vec{b}$ et $\vec{\nu} + \vec{1} \leq \vec{n} \leq \vec{\nu} + \vec{N}$, où $\vec{\nu} \in \mathbb{N}^m$. La suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ est dite uniformément équirépartie (mod 1) [u. é. r. (mod 1)] si et seulement si, pour tout couple $\vec{a}, \vec{b}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ tels que $\vec{0} \leq \vec{a} < \vec{b} \leq \vec{1}$, on a

$$(32) \qquad \operatorname*{unif}_{\vec{\nu}\in\mathbb{N}^m} \lim_{\vec{N}\to\vec{\infty}} \frac{(\vec{\nu}, \vec{N}, \vec{a}, \vec{b}(_{\vec{u}}}{N_1 N_2 \ldots N_m} = \prod_1^p (b_k - a_k) \quad .$$

Toute suite vectorielle multiple u. é. r. (mod 1) est évidemment é. r. (mod 1), mais la réciproque est fausse. On verra plus loin (cf. théorème 19) qu'il existe des suites vectorielles multiples u. é. r. (mod 1).

6. — Si z est un nombre complexe, $\Re z$ désigne sa partie réelle et $\Im z$ sa partie imaginaire, de sorte que $z = \Re z + i\Im z$ et $\Re z \in \mathbb{R}$, $\Im z \in \mathbb{R}$.

La suite complexe z_n est dite é. r. (mod 1) [resp. : u. é. r. (mod 1)] si et seulement si la suite vectorielle simple réelle $(\Re z_n, \Im z_n)$ de $\mathbb{R}^2$ est é. r. (mod 1) [resp. : u. é. r. (mod 1)].

7. Critères d'équirépartition.

7.1. — Soit $\Im(I^p)$ la classe des fonctions à valeurs complexes bornées et intégrables-$\Re$ sur I^p.

THÉORÈME 16. — Pour que la suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ à p composantes et à m indices soit é. r. (mod 1), il faut et il suffit que, pour toute fonction $f \in \Im(I^p)$, on ait

$$(33) \qquad \lim_{\vec{N}\to\vec{\infty}} \frac{1}{N_1 N_2 \ldots N_m} \sum_{\vec{1}}^{\vec{N}} f(\vec{u}_{\vec{n}}) = \int_{I^p} f(\vec{x})\, d\vec{x} \quad .$$

Le 2e membre désigne ici l'intégrale multiple

$$\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p \quad .$$

Avec des notations dont la signification est évidente, on peut d'ailleurs remplacer dans cet énoncé la classe $\mathfrak{I}(I^p)$ soit par la classe $\mathcal{C}(I^p)$, soit par la classe $\mathcal{C}(T^p)$, où T^p désigne le tore unité à p dimensions (cf. II-1.2, II-1.3) ; pour passer au dernier cas, on utilise la sous-classe des fonctions f de $\mathcal{C}(I^p)$ pour lesquelles $f(0, x_2, \dots, x_p) \equiv f(1, x_2, \dots, x_p)$, $f(x_1, 0, \dots, x_p) \equiv f(x_1, 1, \dots, x_p)$, ...,

$$f(x_1, x_2, \dots, 0) \equiv f(x_1, x_2, \dots, 1) \quad .$$

7.2. THÉORÈME 17. - Pour que la suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ à p composantes et à m indices soit é. r. (mod 1), il faut et il suffit que, pour tout vecteur $\vec{h} \neq \vec{0}$ de $\underset{\sim}{Z}^p$, on ait

$$\lim_{\vec{N} \to \infty} \frac{1}{N_1 N_2 \cdots N_m} \sum_{\vec{1}}^{\vec{N}} e(\vec{h}\vec{u}_{\vec{n}}) = 0 \quad . \tag{34}$$

$\vec{h}\vec{u}_{\vec{n}}$ désigne ici le produit intérieur des vecteurs $\vec{h}$, $\vec{u}_{\vec{n}}$, soit $\vec{h}\vec{u}_{\vec{n}} = \sum_1^p h_k u_{\vec{n}}^k$.

Bornons-nous à remarquer que la condition est nécessaire car, si la suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ est é. r. (mod 1), (33) donne (34) en prenant $f(\vec{x}) = e(\vec{h}\vec{x})$, où $\vec{0} \neq \vec{h} \in \underset{\sim}{Z}^p$, de sorte que $f \in \mathcal{C}(T^p)$.

7.3. - Le théorème 17 admet l'interprétation suivante : pour que la suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ soit é. r. (mod 1), il faut et il suffit que, pour tout vecteur $\vec{h} \neq \vec{0}$ de $\underset{\sim}{Z}^p$, la suite $\vec{h}\vec{u}_{\vec{n}}$ le soit.

7.4. - THÉORÈME 18. - Pour que la suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ à p composantes et à m indices soit é. r. (mod 1), il faut et il suffit que, pour tout vecteur $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_p)$ de $\underset{\sim}{N}^{+p}$, on ait

$$\lim_{\vec{N} \to \infty} \frac{1}{N_1 N_2 \cdots N_m} \sum_{\vec{1}}^{\vec{N}} \underbrace{(u_{\vec{n}}^1)}^{h_1} \underbrace{(u_{\vec{n}}^2)}^{h_2} \cdots \underbrace{(u_{\vec{n}}^p)}^{h_p} = \frac{1}{(h_1 + 1)(h_2 + 1) \cdots (h_p + 1)} \quad . \tag{35}$$

Bornons-nous à remarquer que la condition est nécessaire car, si la suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ est é. r. (mod 1), (33) donne (35) en prenant $f(\vec{x}) = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_p^{h_p}$, où $\vec{h} \in \underset{\sim}{N}^{+p}$, de sorte que $f \in \mathcal{C}^*(I^p)$.

8. Critère d'équirépartition uniforme.

8.1. - Pour que la suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ à p composantes et à m indices soit u. é. r. (mod 1), il faut et il suffit que, pour tout vecteur $\vec{h} \neq \vec{0}$ de $\underset{\sim}{Z}^p$, on ait

$$\text{(36)} \qquad \underset{\vec{\nu} \in \underset{\sim}{N}^m}{\text{unif}} \lim_{\vec{N} \to \infty} \frac{1}{N_1 N_2 \dots N_m} \sum_{\vec{\nu}+\vec{1}}^{\vec{\nu}+\vec{N}} e(\vec{h}\vec{u}_{\vec{n}}) = 0 \quad .$$

8.2. - Le critère (36) admet l'interprétation suivante : pour que la suite $\vec{u}_{\vec{n}}$ soit u. é. r. (mod 1), il faut et il suffit que, pour tout vecteur $\vec{h} \neq \vec{0}$ de $\underset{\sim}{Z}^p$, la suite $\vec{h}\vec{u}_{\vec{n}}$ le soit.

9. - Les interprétations V-7.3 et V-8.2 conduisent à étendre les notions d'équi-répartition et d'équirépartition uniforme aux suites vectorielles multiples réelles $(u^1_{\vec{n}}, u^2_{\vec{n}}, u^3_{\vec{n}}, \dots)$ à une infinité dénombrable de composantes et à m indices. On pose notamment :

Définition 8. - La suite $(u^1_{\vec{n}}, u^2_{\vec{n}}, u^3_{\vec{n}}, \dots)$ est dite équirépartie (mod 1) [é. r. (mod 1)] si et seulement si, pour tout $r \in \underset{\sim}{N}^+$, la suite $(u^1_{\vec{n}}, u^2_{\vec{n}}, \dots, u^r_{\vec{n}})$ de $\underset{\sim}{R}^r$ est é. r. (mod 1). Lorsque, de plus, la suite $(u^1_{\vec{n}}, u^2_{\vec{n}}, u^3_{\vec{n}}, \dots)$ est répartie sur I^∞, on dit qu'elle est équirépartie sur I^∞.

10. Applications.

10.1. THÉORÈME 19. - Soit $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ un vecteur de $\underset{\sim}{N}^{+m}$ et soit $\vec{L}_{\vec{n}} = (L^1_{\vec{n}}, L^2_{\vec{n}}, \dots, L^p_{\vec{n}})$ un vecteur de $\underset{\sim}{R}^p$ dont chaque composante est une forme linéaire en $n_1, n_2, \dots, n_m$; si le seul vecteur $\vec{h}$ de $\underset{\sim}{Z}^p$ tel que $\vec{h}\vec{L}_{\vec{n}}$ soit à coefficients entiers rationnels en $n_1, n_2, \dots, n_m$ est le

<u>vecteur</u> $\vec{0}$, <u>alors la suite</u> $\vec{L}_{\vec{n}}$ <u>est u. é. r.</u> (mod 1) .

Posons $\vec{h}\vec{L}_{\vec{n}} = \vec{n}\vec{A}$, où $\vec{A} \in \underset{\sim}{R}^m$; par hypothèse, pour tout vecteur $\vec{h} \neq \vec{0}$ de $\underset{\sim}{Z}^p$, on a $\vec{A} \not\equiv \vec{0}$ (mod 1) , c'est-à-dire que l'une au moins des composantes de $\vec{A}$, soit A_s , où $1 \leqslant s \leqslant m$, n'est pas entière rationnelle.

Soient $\vec{0} \neq \vec{h} \in \underset{\sim}{Z}^p$, $\vec{\nu} \in \underset{\sim}{N}^m$, et formons

$$\sigma(\vec{\nu}\,,\,\vec{N}) = \frac{1}{N_1 N_2 \ldots N_m} \sum_{\vec{\nu}+\vec{1}}^{\vec{\nu}+\vec{N}} e(\vec{h}\vec{L}_{\vec{n}}) = \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{N_k} \sum_{n_k=\nu_k+1}^{\nu_k+N_k} e(n_k A_k) \right) .$$

Dans ce dernier membre, le produit des $m - 1$ facteurs pour lesquels $k \neq s$ a un module $\leqslant 1$, de sorte que

$$|\sigma(\vec{\nu}\,,\,\vec{N})| \leqslant \frac{1}{N_s} \left| \sum_{n_s=\nu_s+1}^{\nu_s+N_s} e(n_s A_s) \right| .$$

Au 2e membre figure la somme d'une progression géométrique de raison $e(A_s) \neq 1$, puisque $A_s \not\equiv 0$ (mod 1) ; on a donc

$$\sum_{n_s=\nu_s+1}^{\nu_s+N_s} e(n_s A_s) = \frac{e(A_s(\nu_s + N_s + 1)) - e(A_s(\nu_s + 1))}{e(A_s) - 1}$$

$$= \frac{e(A_s(\nu_s + 1))}{e(A_s) - 1} \left(e(A_s N_s) - 1 \right) .$$

Il en résulte que $|\sigma(\vec{\nu}\,,\,\vec{N})| \leqslant \dfrac{1}{|e(A_s) - 1|} \dfrac{2}{N_s} = \dfrac{1}{N_s |\sin \pi A_s|}$, ce qui montre que $\sigma(\vec{\nu}\,,\,\vec{N})$ tend uniformément en $\vec{\nu} \in \underset{\sim}{N}^m$ vers 0 quand $N_s \to \infty$, donc quand $\vec{N} \to \vec{\infty}$. Dès lors, le critère (36) donne le résultat annoncé.

CASSELS [2] démontre, sans recourir au critère (34), que la suite $\vec{L}_{\vec{n}}$ est é. r. (mod 1) .

En particulier :

a. Pour $p = 1$, on obtient, en prenant $L_{\vec{n}} = \vec{\lambda}\vec{n}$: <u>soit</u> $\vec{n}$ <u>un vecteur de</u> $\underset{\sim}{N}^{+m}$ <u>et soit</u> $\vec{\lambda}$ <u>un vecteur de</u> $\underset{\sim}{R}^m$; <u>si l'une au moins des composantes de</u> $\vec{\lambda}$ <u>est irrationnelle, alors la suite</u> $\vec{\lambda}\vec{n}$ <u>est u. é. r.</u> (mod 1) .

L'hypothèse de l'énoncé général devient ici : pour tout entier non nul $h \in \underset{\sim}{Z}$, on a $h\vec{\lambda} \not\equiv \vec{0}$ (mod 1) , ce qui exprime que l'une au moins des composantes de $\vec{\lambda}$ est irrationnelle.

b. Pour $m = 1$, on obtient, en prenant $\vec{L}_n = \vec{\lambda} n$: soit $\vec{\lambda}$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$; si le seul vecteur $\vec{h}$ de $\mathbb{Z}^p$ tel que $\vec{h}\vec{\lambda}$ soit entier rationnel est le vecteur $\vec{0}$, alors la suite $\vec{\lambda} n$ est u. é. r. (mod 1).

c. Pour $p = m = 1$, on retrouve, en prenant $L_n = \lambda n$, le théorème 6.

10.2. - La suite λz^n, où $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, est é. r. (mod 1) pour presque tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| \geqslant 1$ (LEVEQUE [8]).

Posons $z = \rho e^{it}$, où $\rho > 1$, et $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, où λ_1, λ_2 non tous les deux nuls ; on a

$$\lambda z^n = \rho^n(\lambda_1 \cos nt - \lambda_2 \sin nt) + i\rho^n(\lambda_2 \cos nt + \lambda_1 \sin nt) \quad .$$

Posons $h = h_1 + ih_2$, où h_1, h_2 sont des entiers rationnels non tous les deux nuls, et formons

$$h_1\, \mathcal{R}(\lambda z^n) + h_2\, \mathcal{I}(\lambda z^n) = \rho^n((\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) \cos nt + (\lambda_1 h_2 - \lambda_2 h_1) \sin nt)$$
$$= |h\lambda|\, \rho^n \cos(nt - \alpha)$$

où

$$\cos \alpha = \frac{\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2}{|h\lambda|} , \qquad \sin \alpha = \frac{\lambda_1 h_2 - \lambda_2 h_1}{|h\lambda|} \quad .$$

Pour que la suite complexe λz^n soit é. r. (mod 1), il faut et il suffit que, pour tout vecteur $(h_1 , h_2) \neq (0 , 0)$, la suite $|h\lambda|\, \rho^n \cos(nt - \alpha)$ le soit, et pour cela il suffit que, pour tout nombre réel $\mu > 0$, la suite $\mu\rho^n \cos(nt - \alpha)$ le soit. Or, d'après IV-5.3, quel que soit $\mu > 0$, cette dernière suite est é. r. (mod 1) pour presque tous les $t \in \mathbb{R}$; la propriété annoncée en résulte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CASSELS (J. W. S.). - An extension of the law of the iterated logarithm, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 47, 1951, p. 55-64.

[2] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to diophantine approximation. - Cambridge, at the University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and math. Physics, 45).

[3] KEOGH (F. R.), LAWTON (B.) and PETERSEN (G. M.). - Well distributed sequences, Canadian J. Math., t. 10, 1958, p. 572-576.

[4] KOKSMA (J. F.). - Diophantische Approximationen. - Berlin, J. Springer, 1936 (Ergebnisse der Mathematik, 4).

[5] KOROBOV (N. M.) i POSTNIKOV (A. G.). - Quelques théorèmes généraux sur l'équirépartition des parties fractionnaires [en russe], Doklady Akad. Nauk S. S. S. R., Nouvelle Série, t. 84, 1952, p. 217-220.

[6] LAWTON (B.). - A note on well distributed sequences, Proc. Amer. math. Soc., t. 10, 1959, p. 891-893.

[7] LEVEQUE (W. J.). - Note on a theorem of Koksma, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 380-383.

[8] LEVEQUE (W. J.). - The distribution modulo 1 of trigonometric sequences, Duke math. J., t. 20, 1953, p. 367-374.

[9] PETERSEN (G. M.). - Almost convergence and uniformly distributed sequences, Quart. J. Math., Oxford, Series 2, t. 7, 1956, p. 188-191.

[10] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Annali Scuola norm. sup. Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248.

[11] PÓLYA (G.) und SZEGÖ (G.). - Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. - Berlin, J. Springer, 1925. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 19).

[12] SALEM (Raphaël). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.

[13] ŠAPIRO-PJATECKIJ (I. I.). - Une généralisation du concept d'équirépartition des parties fractionnaires [en russe], Mat. Sbornik, Nouvelle Série, t. 30, 1952, p. 669-676.

[14] TSUJI (Masatsugu). - On the uniform distribution of numbers modulo 1, J. Math. Soc. Japan, t. 4, 1952, p. 313-322.

[15] VAN AARDENNE-EHRENFEST (T.). - On the impossibility of a just distribution, Indagationes Math., t. 11, 1945, p. 264-269 ; Proof of the impossibility of a just distribution of an infinite sequence of points over an interval, Proc. Neder. Akad. Wetensch., t. 48, 1945, p. 266-271.

[16] VAN DER CORPUT (J. G.). - Diophantische Ungleichungen, I : Zur Gleichverteilung modulo Eins., Acta Math., t. 56, 1931, p. 373-456.

[17] WEYL (Hermann). - Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins., Math. Annalen, t. 77, 1916, p. 313-352.