SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.
THÉORIE DES NOMBRES

HASSAN SAFFARI

Problèmes non homogènes de la géométrie des nombres

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 3 (1961-1962), exp. nº 6, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1961-1962__3__A3_0>

PROBLÈMES NON HOMOGÈNES DE LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES

par Hassan SAFFARI

1. Problème général.

Soit $f(x_1, \dots, x_n)$ une fonction définie sur R^n et à valeurs dans R ; on cherche à trouver une constante K avec la propriété suivante : si $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ est un point quelconque de R^n, il existe un point $(u_1, \dots, u_n) \in Z^n$ tel que

$$|f(\xi_1 - u_1, \dots, \xi_n - u_n)| \leq K \quad .$$

La signification géométrique de la question est évidente.

Soit en effet $\mathcal{R}$ l'ensemble des points de R^n définis par

$$|f(x_1, \dots, x_n)| \leq K \quad ,$$

$\mathcal{R}(u_1, \dots, u_n)$ l'ensemble des points définis par

$$|f(x_1 - u_1, \dots, x_n - u_n)| \leq K \quad ,$$

c'est-à-dire l'ensemble translaté du précédent par le vecteur $(u_1, \dots, u_n)$ à coordonnées entières. Alors le problème non homogène consiste à choisir K tel que ces ensembles translatés, quand le point $(u_1, \dots, u_n)$ parcourt Z^n, donnent un recouvrement de R^n. La différence essentielle avec le cas homogène est que l'on cherche à choisir K le plus petit possible pour que ce recouvrement soit possible ; il est clair que, dans ce genre de problèmes, on ne peut pas exclure le point à coordonnées nulles.

Dans un langage plus précis, $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ étant un point quelconque de R^n, on cherche d'abord

$$\inf |f(\xi_1 - u_1, \xi_2 - u_2, \dots, \xi_n - u_n)| \quad \text{pour tous les} \quad (u_1, \dots, u_n) \in Z^n ,$$

ou bien pour tous les $\eta_j \equiv \xi_j \pmod 1$, $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Puis on cherche

$$\mathfrak{M} = \sup(\inf |f(\xi_1 - u_1, \dots, \xi_n - u_n)|)$$

$$(\xi_1 , \ldots , \xi_n) \in R^n \qquad (u_1 , \ldots , u_n) \in Z^n$$

$\mathfrak{M}$ s'appelle le minimum non homogène de la fonction f .

Les cas les plus étudiés sont :

1° Quand f est un produit de formes linéaires,

2° Quand f est une forme quadratique.

Dans ce qui suit nous allons étudier en détail le premier cas, puis nous énoncerons quelques résultats concernant le 2e cas et d'autres cas possibles.

2. Une conjecture de Minkowski. Historique du problème.

En 1901, MINKOWSKI démontre [31] que L_1 et L_2 étant 2 formes linéaires à 2 variables, à coefficients réels, dont le déterminant des coefficients est Δ , quels que soient les nombres réels ρ_1 et ρ_2 , il existe un point de Z^2 tel que

$$|(L_1 + \rho_1)(L_2 + \rho_2)| \leq \frac{1}{4} \Delta \quad .$$

Depuis, un nombre considérable de démonstrations ont été données de cette proposition (Voir [1], [13] p. 46-48 et 145-158, [14], [26] p. 495-502, [27] Chap. 24, [29], etc.) dont la plus simple est peut-être la démonstration purement arithmétique donnée par LANDAU ([30] ou [27] Chap. 24).

La conjecture suivante est généralement attribuée à MINKOWSKI : $L_1 , L_2 , \ldots L_n$ étant n formes linéaires à coefficients réels et de déterminant Δ , pour tout ρ_i $(i = 1 , 2 , \ldots , n)$ il existe un point de Z^n tel que

$$\prod_{i=1}^{n} |L_i + \rho_i| \leq \frac{1}{2^n} \Delta \quad .$$

Mais, suivant DYSON [25], une telle référence n'existe pas dans l'oeuvre imprimée de MINKOWSKI. On peut démontrer très facilement que, si les coefficients des formes sont rationnels, la proposition est vraie (voir par exemple [14], page 322).

En 1923, REMAK démontre la proposition pour le cas $n = 3$ (voir [37] et [38], mais sa démonstration était particulièrement longue et difficile. Une démonstration simple et élégante en a été donnée, en 1939, par DAVENPORT [17]; une autre démonstration plus longue, mais plus naturelle, par BIRCH et SWINNERTON-DYER en 1956 [9].

En 1933, N. HOFREITER [28] a essayé de donner une démonstration du cas $n = 4$, mais sa démonstration était incomplète. Ce cas a été démontré, en 1948, par DYSON [25] ; l'auteur utilise des méthodes de topologie algébrique, et publie en même temps un mémoire sur la topologie algébrique [24] comme préliminaire à sa démonstration du problème de Minkowski.

La démonstration définitive de la conjecture de Minkowski s'arrête ici, et depuis 14 ans, aucun progrès n'a été fait dans ce sens. Suivant DYSON ([25], page 83), "il paraît que les méthodes actuelles sont insuffisantes pour la démonstration générale de la conjecture", mais de l'avis de MORDELL ([34], page 65) "tous mes instincts, pour autant qu'ils vaillent, me suggèrent que la conjecture est susceptible d'une démonstration élémentaire". On a essayé de donner des estimations de

$$\mathfrak{M} = \sup_{\rho \in R^n} \inf_{\mu_i \equiv \rho_i \pmod 1} \prod_{i=1}^{n} |L_i + \rho_i| \quad .$$

En 1934, N. ČEBOTAREV (N. TSCHEBOTARÖW) a montré [41] (voir également [27]) qu'on a

$$\mathfrak{M} \leq 2^{-n/2} \Delta \quad .$$

En 1940, MORDELL améliore cette borne [33], et donne

$$\mathfrak{M} \leq \Delta[2^{n/2} + (2 - \sqrt{2})^n]^{-1} \quad .$$

En 1946, DAVENPORT [18] démontre qu'il existe un nombre $\gamma_n > 1$ tel que

$$\mathfrak{M} < \frac{1}{\gamma_n \, 2^{n/2}} \quad \text{où} \quad \gamma_n \to 2e - 1 \quad \text{pour} \quad n \to \infty \quad .$$

En 1958, WOODS [44] améliore le résultat de MORDELL, et donne

$$\mathfrak{M} \leq \Delta 2^{-n/2}[2 - (2 - \sqrt{2})^n]^{-1} \quad .$$

Le dernier résultat obtenu dans ce sens date de 1960 ; MORDELL montre [36] qu'en combinant son ancienne méthode avec celle de WOODS, on obtient

$$\mathfrak{M} \leq \Delta 2^{-n/2}[4 - 2(2 - \frac{3\sqrt{2}}{4})^n - 2^{-n/2}]^{-1} \quad .$$

On remarque que, si $n \to \infty$, le coefficient de $\Delta . 2^{-n/2}$ dans la borne de MORDELL tend vers $\frac{1}{4}$; donc le $\frac{1}{\gamma_n}$ de Davenport est meilleur ; mais en appliquant la méthode Mordell-Woods, on peut remplacer γ_n par un nombre qui tend asymptotiquement vers $2(2e - 1)$.

Dans ce qui suit nous donnons d'abord la démonstration de DAVENPORT du cas $n = 3$, puis nous démontrons un théorème de WOODS basé sur la technique de ČEBOTAREV, duquel découlent comme corollaires : la démonstration de conjecture pour $n = 2$, le théorème de ČEBOTAREV et l'équivalence de la conjecture de Minkowski avec l'existence de la constante de réseau pour un certain domaine.

3. Démonstration de Davenport pour le théorème de Remak.

LEMME (REMAK [38] p. 175-180). - Il existe 3 nombres > 0 , p_i^2 $(i = 1, 2, 3)$, tels qu'il n'existe aucun point à coordonnées entières, sauf 0 , à l'intérieur de l'ellipsoïde $p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2 + p_3^2 x_3^2 = 1$; mais 3 points à coordonnées entières, non coplanaires avec 0 , sont situés sur l'ellipsoïde.

Démonstration. - Un ellipsoïde sera appelé "libre", s'il n'existe aucun point du réseau, sauf 0 , qui lui soit intérieur. Dans tout ce qui suit, nous acceptons que, si un ellipsoïde libre a 3 points du réseau sur sa surface, ces 3 points sont coplanaires avec 0 , et nous en déduisons une contradiction :

1° Remarquons que si 3 points A_1 , A_2 , A_3 sont sur l'ellipsoïde $(A_1 \neq \pm A_2)$, alors $A_3 = \pm A_1 \pm A_2$. En effet, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que l'ellipsoïde est une sphère. Comme la sphère est libre, la distance entre 2 points du réseau est au moins égale au rayon de la sphère, donc les 6 points $\pm A_1$, $\pm A_2$, $\pm A_3$ forment un hexagone régulier, le résultat s'en déduit.

2° 2 points du réseau, situé sur un ellipsoïde libre, ne peuvent pas appartenir à un même plan de coordonnées. Car supposons que, pour A_1 et A_2 , on ait $x_1 = 0$, ces points sont situés sur l'ellipse $p_2^2 x_2^2 + p_3^2 x_3^2 = 1$; si on fait décroître p_1 , mais p_2 et p_3 restant constants, les points A_1 et A_2 restent toujours sur l'ellipsoïde, et le volume de l'ellipsoïde $(V = \frac{4\pi}{3} (p_1 p_2 p_3)^{-1})$ augmente. D'après le théorème fondamental de Minkowski pour les corps convexes, pour une certaine valeur de p_1 , un point A_3 du réseau se situe sur l'ellipsoïde, mais il n'est pas dans le plan $x_1 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3° Nous montrons maintenant que, s'il existe 2 points A_1 et A_2 du réseau sur un ellipsoïde libre E , il existe un ellipsoïde libre E_1 tel que A_1, A_2 et $A_1 + A_2$ soient sur sa surface. En effet, posons $A_3 = A_1 + A_2$, $A_4 = A_1 - A_2$, et soit $A_j = (a_{1j} , a_{2j} , a_{3,j})$ $(j = 1 , 2 , 3 , 4)$. On a

(1) $$p_1^2\, a_{1j}^2 + p_2^2\, a_{2j}^2 + p_3^2\, a_{3j}^2 \begin{cases} = 1 & (j = 1\ ,\ 2) \\ \geqslant 1 & (j = 3\ ,\ 4) \end{cases} \quad .$$

Soient q_1 , q_2 , q_3 (non tous les 3 nuls) un système de solutions de

(2) $$\begin{cases} q_1\, a_{11}^2 + q_2\, a_{21}^2 + q_3\, a_{31}^2 = 0 \\ q_1\, a_{12}^2 + q_2\, a_{22}^2 + q_3\, a_{32}^2 = 0 \end{cases} \quad .$$

Nous pouvons toujours supposer, quitte à changer les signes de q_1 , q_2 , q_3 , que

(3) $$q_1\, a_{14}^2 + q_2\, a_{24}^2 + q_3\, a_{34}^2 \geqslant 0$$

(même en formant le déterminant des 3 formes (2) et (3) en q_1 , q_2 , q_3 , on peut montrer que l'inégalité est stricte).

Considérons maintenant les ellipsoïdes

$$(p_1^2 + tq_1)\, x_1^2 + (p_2^2 + tq_2)\, x_2^2 + (p_3^2 + tq_3)\, x_3^2 = 1 \qquad (t > 0\ )$$

qui, tous, passent par A_1 et A_2 . Comme d'après (2), l'un au moins parmi les q_1 , q_2 , q_3 est négatif, quand t croît à partir de zéro, l'une au moins des valeurs $p_j^2 + tq_j$ décroît, et le volume de l'ellipsoïde augmente ; et, pour une certaine valeur de t , un point du réseau se situe sur l'ellipsoïde. D'après (3), ce point ne peut pas être $A_4 = A_1 - A_2$, donc, d'après la première remarque, c'est $A_3 = A_1 + A_2$.

Il est clair qu'on peut toujours trouver un ellipsoïde libre passant par 2 points A_1 et A_2 . En répétant le même argument, on voit par induction, qu'il existe un ellipsoïde libre E_n d'équation

$$p_{1n}^2\, x_1^2 + p_{2n}^2\, x_2^2 + p_{3n}^2\, x_3^2 = 1 \qquad ,$$

tel que les points A_1 , $nA_1 + A_2$, $(n + 1)\, A_1 + A_2$ soient sur sa surface ; on a donc en particulier

(4) $$p_{1n}^2(na_{11} + a_{12})^2 + p_{2n}^2(na_{21} + a_{22})^2 + p_{3n}^2(na_{31} + a_{32})^2 = 1 \qquad .$$

Nous distinguons maintenant 3 cas.

1er cas. - $a_{11} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{31} \neq 0$; alors d'après (4), si $n \to \infty$, $p_{jn} \to 0$ le volume augmente et il y a contradiction.

2e cas. - $a_{11} = 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{31} \neq 0$; alors d'après la 2e remarque, $a_{12} \neq 0$, on a

$$p_{1n}^2 \leq a_{12}^{-2} < \infty \quad \text{et} \quad p_{jn} \to 0 \qquad (j = 2 , 3)$$

et il y a encore contradiction.

3e cas. - Supposons $a_{11} = a_{21} = 0 \neq a_{31}$; alors $a_{12} \neq 0 \neq a_{22}$, donc $p_{jn}^2 \leq a_{j2}^{-2}$ $(j = 1 , 2)$, $p_{3n} \to 0$ et il y a contradiction.

Ce qui montre que l'hypothèse initiale était absurde.

Démonstration du théorème. - Soient ξ , η , ζ trois formes linéaires par rapport à u , v , w , et de déterminant 1 (on peut toujours supposer ceci en raison de l'homogénéité) ; il s'agit de démontrer que, pour tout triplet de nombres réels $(\alpha , \beta , \gamma)$, il existe des valeurs entières de u , v , w telles que

$$(5) \qquad |(\xi - \alpha)(\eta - \beta)(\zeta - \gamma)| \leq \frac{1}{8} \quad .$$

Considérons l'ellipsoïde libre $p_1^2 \xi^2 + p_2^2 \eta^2 + p_3^2 \xi^2 = 1$, vérifiant les conditions du lemme. Nous allons démontrer que pour tous α , β , γ , il existe un point du réseau tel que

$$(6) \qquad p_1^2(\xi - \alpha)^2 + p_2^2(\eta - \beta)^2 + p_3^2(\zeta - \gamma)^2 \leq \frac{3}{4} (p_1 \, p_2 \, p_3)^{2/3} \quad .$$

Alors en vertu de l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique, (6) $\Longrightarrow$ (5) .

Par une transformation affine de ξ , η , ζ en x , y , z , on peut transformer l'ellipsoïde en la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, et les 3 points du réseau sur sa surface en $A_1(1 , 0 , 0)$, $A_2(x_1 , y_1 , 0)$, $A_3(x_2 , y_2 , z_2)$. Le réseau initial se transforme en un réseau de déterminant $D = p_1 \, p_2 \, p_3$. En formant le déterminant des 3 points A_1 , A_2 , A_3 , on remarque que $y_1 \, z_2$ est un multiple de D , donc $D \leq 1$.

Soit (a , b , c) le point transformé de $(\alpha , \beta , \gamma)$. On a

$$p_1^2(\xi - \alpha)^2 + p_2^2(\eta - \beta)^2 + p_3^2(\zeta - \gamma)^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \quad .$$

Il suffit donc de démontrer que le carré de la distance de (a , b , c) au point le plus proche du réseau ne dépasse pas $\frac{3}{4} D^{2/3}$.

Prenons ce point le plus proche comme origine, de façon que

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \tag{7}$$

pour tous les points (x , y , z) du réseau ; nous avons donc à démontrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant \frac{3}{4} D^{2/3} \quad . \tag{8}$$

Il existe un point du réseau tel que

$$|z - c| \leqslant \frac{1}{2} |z_2| \leqslant \frac{1}{2} , \qquad |y - b| \leqslant \frac{1}{2} |y_1| \leqslant \frac{1}{2} , \qquad |x - a| \leqslant \frac{1}{2}$$

donc d'après (7), on a

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant \frac{3}{4} \quad . \tag{9}$$

Considérons la forme quadratique quaternaire en u , v , w , t

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 + (dt)^2$$

où d est choisi tel que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Pour $t = 0$, sa valeur est au moins 1 , sauf si $u = v = w = 0$.

Pour $t = \pm 1$, sa valeur est au moins 1 d'après (7).

Pour $|t| \geqslant 2$, sa valeur est au moins

$$4d^2 = 4(1 - a^2 - b^2 - c^2) \geqslant 1 \quad \text{d'après (9)} \quad .$$

Mais le minimum d'une forme quadratique définie positive quaternaire de déterminant Δ, n'excède pas $(4\Delta)^{1/4}$ (Voir [42] ou [22] théorème 106), on remarque très facilement que $\Delta = d^2 D^2$, donc $1 \leqslant 4D^2 d^2$. Donc

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - d^2 \leq 1 - \frac{1}{4D^2} = \frac{3}{4} D^{2/3} + 1 - \frac{1}{4} (D^{2/3} + D^{2/3} + D^{2/3} + D^{-2}) \quad .$$

En vertu de l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique on a

$$\frac{1}{4} (D^{2/3} + D^{2/3} + D^{2/3} + D^{-2}) \geq 1 \quad ,$$

donc

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{3}{4} D^{2/3}$$

ce qui démontre le théorème.

4. Rappel de quelques définitions.

Soit K un ensemble de points ; un réseau Λ de déterminant $d(\Lambda)$ s'appelle K-admissible s'il n'existe aucun point de réseau Λ, sauf 0 (si 0 appartient à K), dans l'ensemble K. Lorsque, Λ décrivant tous les réseaux K-admissibles, l'ensemble des $d(\Lambda)$ admet une borne inférieure, on pose

$$\Delta(K) = \inf d(\Lambda)$$

et on appelle $\Delta(K)$ la constante du réseau de l'ensemble K. Un réseau K-admissible, tel que $d(\Lambda) = \Delta(K)$, s'appelle un réseau critique de l'ensemble K.

Nous rappelons également le théorème suivant.

THÉORÈME de compacité de Mahler. - Soit (Λ_r) une suite de réseaux de R^n telle que, pour tout r,

1° $\|x\| \geq c$ pour tout point $x \in \Lambda_r$ et $\neq 0$, où c est une constante positive, indépendante de r, et où $\|x\|$ désigne $\sup(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

2° $d(\Lambda_r) \leq M$, M étant une constante $< +\infty$ indépendante de r.

Alors on peut extraire de la suite (Λ_r) une suite partielle $(\Lambda_{r'})$ qui converge vers un réseau Λ, et on a

$$d(\Lambda) = \lim_{r' \to \infty} d(\Lambda_{r'}) \quad .$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir [14], théorème IV, page 137, ou [10].

5. Un théorème de Woods.

Soient $(x_1 , \ldots , x_n)$ les coordonnées d'un point x de R^n. Appelons K_1 l'ensemble des points x pour lesquels

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i + 1| \leq 1$$

et K_2 l'ensemble des points x pour lesquels

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i - 1| \leq 1 \quad .$$

Posons

$$K = K_1 \cup K_2 \quad .$$

THÉORÈME ([44] théorème 1). - $\mathfrak{M} \leq (\Delta(K))^{-1}$, où $\mathfrak{M}$ est défini au paragraphe 2 et $\Delta(K)$ au paragraphe 4.

Démonstration. - On peut toujours supposer $\mathfrak{M} > 0$. D'après la définition de $\mathfrak{M}$, à tout entier positif r correspond un nombre réel non négatif ε_r et un ensemble d'entiers rationnels $u_1^* , u_2^* , \ldots , u_n^*$ tels que les valeurs correspondantes $L_1^* , \ldots , L_n^*$ des formes linéaires $L_1 , \ldots , L_n$ pour $u_i = u_i^*$ $(i = 1 , 2 , \ldots , n)$ vérifient l'égalité

(10) $$\prod_{i=1}^{n} |L_i^* + \rho_i| = \frac{\mathfrak{M}}{1 - \varepsilon_r} \quad .$$

De plus, il est possible de choisir ces ε_r tels que $\lim_{r\to\infty} \varepsilon_r = 0$.

Pour un r donné, appelons Λ_r le réseau de R^n dont les coordonnées des points sont données par les relations

(11) $$x_i = \frac{L_i - L_i^*}{L_i^* + \rho_i} \qquad (i = 1 , 2 , \ldots , n) \quad .$$

Quand le point $(u_1 , \ldots , u_n)$ parcourt Z^n, on a d'après (10)

(12) $$d(\Lambda_r) = \frac{1 - \varepsilon_r}{\mathfrak{M}} \quad .$$

Comme $\prod_{i=1}^{n} |L_i + \rho_i| \geq \mathfrak{M}$, il en résulte que tout point de Λ_r vérifie la relation

$$(13) \qquad \prod_{i=1}^{n} |x_i + 1| = \prod_{i=1}^{n} \left|\frac{L_i + \rho_i}{L_i^* + \rho_i}\right| \geq 1 - \varepsilon_r \quad .$$

Comme Λ_r est symétrique par rapport à l'origine, on a, pour tout $x \in \Lambda_r$,

$$(14) \qquad \prod_{i=1}^{n} |x_i - 1| \geq 1 - \varepsilon_r \quad .$$

Donc, pour tout $x \in \Lambda_r$,

$$(15) \qquad \prod_{i=1}^{n} |x_i^2 - 1| \geq (1 - \varepsilon_r)^2 \quad .$$

Nous montrons maintenant qu'aucun point de Λ_r ne vérifie **la relation**

$$(16) \qquad |x_i| < (1 + (1 - \varepsilon_r)^2)^{1/2} \qquad \text{pour } r \text{ assez grand} \quad .$$

Car, pour un tel point, on a

$$-1 \leq x_i^2 - 1 \leq (1 - \varepsilon_r)^2 \leq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad .$$

Si, pour un certain i, on,a

$$x_i^2 - 1 > -(1 - \varepsilon_r)^2 \quad ,$$

alors, pour cet i, on a

$$|x_i^2 - 1| < (1 - \varepsilon_r)^2 \quad ;$$

et comme, pour tout i, on a $|x_i^2 - 1| \leq 1$, donc

$$\prod |x_i^2 - 1| < (1 - \varepsilon_r)^2 \quad ,$$

ce qui est contraire à (15). On a donc

$$-1 \leq x_i^2 - 1 \leq -(1 - \varepsilon_r)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

donc

$$(17) \qquad |x_i| \leq (1 - (1 - \varepsilon_r)^2)^{1/2} \leq \sqrt{2\varepsilon_r} \qquad (i = 1 , 2 , \dots , n) \quad .$$

Mais pour r assez grand, ε_r est assez petit, donc on peut choisir un entier N_r tel que le point $N_r x$ vérifie avec x la relation (16) et ne vérifie pas (17), ce qui est impossible d'après (15).

Il en résulte que, pour r assez grand, tout point de Λ_r, sauf 0, vérifie

$$(18) \qquad |x_i| \geq (1 + (1 - \varepsilon_r)^2)^{1/2} \quad .$$

Les relations (12) et (18) montrent que, pour les réseaux (Λ_r), les conditions d'applications du théorème de compacité de Mahler sont vérifiées ; la suite $\{\Lambda_r\}$ contient donc une suite partielle $\{\Lambda_{r_j}\}$ qui converge vers un réseau Λ tel que

$$d(\Lambda) = \pi^{-1} \quad .$$

Nous montrons maintenant que Λ est K-admissible. Supposons que cette proposition soit fausse, il existe alors un point $Y \neq 0$ de Λ dans K. Soit K_r l'union des régions définies par

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i + 1| \leq 1 - \varepsilon_r \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} |x_i - 1| \leq 1 - \varepsilon_r \quad .$$

On a

$$\lim_{r\to\infty} K_r = K \quad .$$

Comme $Y \neq 0$, pour tout r suffisamment grand, K_r contient un δ-voisinage de Y pour un certain δ indépendant de r. Alors pour toute valeur suffisamment grande de j, Λ_{r_j} contient un point Y_j à l'intérieur de ce voisinage, donc dans K_{r_j}, ce qui est impossible en vertu de la définition des K_r et des relations (13) et (14).

On a donc

$$\Delta(K) \leq d(\Lambda) = \pi^{-1} \quad .$$

COROLLAIRE 1. – La conjecture de Minkowski est équivalente à la conjecture

$$\Delta(K) = 2^n \quad .$$

Démonstration. – Si $\Delta(K) = 2^n$, on a, d'après le théorème précédent, $\mathfrak{M} \leq 2^{-n}$, et la conjecture de Minkowski est vraie. Supposons que la conjecture de Minkowski soit exacte, mais qu'on ait $\Delta(K) \neq 2^n$. Le réseau engendré par les points $(2, 0, \ldots, 0)$, $(0, 2, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, 2)$ est K-admissible et a pour déterminant 2^n. On a donc $\Delta(K) < 2^n$. K possède au moins un réseau critique ; appelons-le T, et représentons les coordonnées des points de T par $(L_1, \ldots, L_n)$ où $L_1, \ldots, L_n$ sont des formes linéaires par rapport aux variables $u_1, \ldots, u_n$ qui parcourent Z. Soit a_{i_j} les coefficients de ces formes, on a

$$|\det(a_{i_j})| = d(T) < 2^n \quad . \tag{19}$$

comme T est K-admissible, nous avons d'après la définition de K,

$$\prod_{i=1}^{n} |L_i + 1| \geq 1 \quad \text{pour tout } u_1, \ldots, u_n \in Z \quad . \tag{20}$$

Posons $c = (d(T))^{1/n}$, on a, d'après (19) et (20),

$$\prod_{i=1}^{n} |2c^{-1} L_i + 2c^{-1}| \geq 2^n c^{-n} > 1 \quad \text{pour tout } u_1, \ldots, u_n \in Z$$

ce qui est en contradiction avec la conjecture de Minkowski.

COROLLAIRE 2 (ČEBOTAREV). – On a $\mathfrak{M} \leq 2^{-n/2}$. En effet K contient la région $\prod_{i=1}^{n} |x_i^2 - 1| \leq 1$ laquelle contient ce cube $|x_i| \leq \sqrt{2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de volume $(2\sqrt{2})^n$.

D'après le théorème fondamental de Minkowski pour les corps convexes, on a

$$(2\sqrt{2})^n \leq 2^n \Delta(K) \quad ,$$

donc

$$\Delta(K) \geq 2^{n/2} \quad ,$$

et d'après le théorème précédent

$$\mathfrak{M} \leqslant 2^{-n/2} \quad .$$

COROLLAIRE 3 (MINKOWSKI). - Pour $n = 2$ la conjecture de Minkowski est exacte.

En effet on remarque très facilement que le rectangle $|x_1 + x_4| = 4$, $|x_1 - x_2| = 2$, dont l'aire est 16 est contenu dans K, alors le théorème fondamental de Minkowski pour les corps convexes $\Longrightarrow \Delta(K) \geqslant 4$, mais $\Delta(K) \leqslant 4$, donc on a $\Delta(K) = 4$ et, d'après le corollaire 1, on a le résultat cherché.

Remarque. - WOODS montre [44] que cette méthode n'est pas généralisable pour $n > 2$.

6. Quelques résultats sur les formes quadratiques.

Le minimum non homogène des formes quadratiques définies positives binaires $a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$ est trouvé par DIRICHLET [23] qui donne la valeur

$$K = \frac{a_{11} a_{22}(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})}{4(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}$$

et c'est le meilleur résultat possible si la forme est réduite. L. J. MORDELL [35] généralise le résultat de Dirichlet aux polynômes

$$f(x) = \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs} x_r x_s + 2 \sum_{r=1}^{n} a_r x_r \quad ;$$

mais avec une certaine condition sur le signe des a_{rs}.

Une forme quadratique binaire indéfinie est le produit de 2 formes linéaires, donc on a le même résultat que pour le cas $n = 2$ de la conjecture de Minkowski.

CASSELS [12] montre que pour les formes binaires indéfinies non dégénérées le minimum non homogène $\mathfrak{M}$ vérifie $|\mathfrak{M}| \geqslant \frac{\Delta^{1/2}}{48}$ améliorant ainsi le résultat $|\mathfrak{M}| \geqslant \frac{\Delta^{1/2}}{128}$ donné auparavant par DAVENPORT. Il montre, en particulier, que pour une infinité non dénombrable de valeurs de (x, y), on a $|\mathfrak{M}| \geqslant \frac{\Delta^{1/2}}{87}$, ce qui montre en particulier qu'il existe des nombres transcendants pour lesquels cette relation est vraie. Une étude très détaillée des minimums successifs des formes binaires indéfinies à été faite par E. S. BARNES et H. P. F. SWINNERTON-DYER

([2], [4] et [6]) ; ils ont étudiés de même les formes de Markov et d'autres catégories de formes, et ont appliqué leurs résultats à la recherche des corps quadratiques euclidiens ([1] et [5]).

E. S. BARNES [3] étudie le cas des formes quadratiques ternaires indéfinies et montre que, si $\mathfrak{M}$ est le minimum non homogène d'une telle forme et Δ son déterminant; on a

$$\mathfrak{M} \leq \left(\frac{1}{4} |\Delta|\right)^{1/3} \tag{21}$$

sauf pour 2 formes particulières pour lesquelles il trouve le minimum. Ainsi d'après un exemple de DAVENPORT [19] qui montre que, pour la forme

$$x^2 - y^2 + 4z^2 \qquad ,$$

on a $\mathfrak{M} = \left(\frac{1}{4} |D|\right)^{1/3}$, (21) donne le meilleur résultat possible pour les formes ternaires.

Le résultat le plus remarquable obtenu pour le minimum non homogène des formes quadratiques indéfinies est peut-être celui qui s'obtient à partir des 2 théorèmes suivants.

En 1958, B. J. BIRCH donne le théorème suivant [7] :

THÉORÈME A. - Soit Q_r une forme quadratique indéfinie à r variables et à coefficients incommensurables (c'est-à-dire que leurs rapports mutuels ne sont pas rationnels), et supposons qu'on soit dans l'un ou l'autre des 2 cas suivants

a. $r \geq 3$ et Q_r représente des valeurs non nulles arbitrairement petites.

b. $r \geq 4$ et Q_r représente proprement zéro.

Alors on a

$$\mathfrak{M}_I(Q_r) = \text{minimum non homogène} = 0 \qquad .$$

Puis BIRCH, DAVENPORT et RIDOUT (voir [8], [21], [39]) ont démontré le théorème suivant :

THÉORÈME B. - Soit $Q(x_1 , \ldots , x_n)$ une forme quadratique indéfinie de signature $(m , n - m)$ à coefficients réels et telle que

$$\min(m , n - m) = 5 \quad \text{et} \quad n \geq 21$$

alors l'inéquation $|Q(x_1 , \ldots , x_n)| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, est résoluble en entiers $x_1 , \ldots , x_n$ non tous nuls, sauf si les rapports mutuels des coefficients de Q sont tous des nombres rationnels.

A partir des théorèmes A et B, on déduit que, pour $n \geq 21$, on a

$$\mathfrak{M}_I(Q) = 0 \quad .$$

Le cas où les coefficients sont rationnels a été étudié par G. L. WATSON [43] qui donne un ordre de grandeur pour la borne supérieure de $\mathfrak{M}_I(Q)$.

7. Autres résultats.

Pour d'autres questions d'ordre général concernant les minima non homogènes, nous renvoyons aux mémoires suivants : [11], [15], [16], [21], [40], et aux références données dans ces travaux. A titre d'exemple nous citons deux résultats de CASSELS [12] concernant les formes cubiques ternaires et les formes quartiques quaternaires.

THÉORÈME C. - Soient L_1 , L_2 , L_3 des formes linéaires de déterminant $\Delta \neq 0$ en x , y , z , où L_1 est réelle et L_2 et L_3 sont des formes conjuguées $L_2 = \overline{L_3}$, alors il existe un point (x_0 , y_0 , z_0) tel que

$$\min_{(x , y , z) \equiv (x_0 , y_0 , z_0) \pmod 1} |L_1 L_2 L_3| \geq \frac{\Delta}{420}$$

Si en particulier les coefficients de L_1 , L_2 , L_3 sont des nombres correspondants dans des corps cubiques conjugués, alors x_0 , y_0 , z_0 peuvent être choisis rationnels.

THÉORÈME D. - Soient L_1 , L_2 , L_3 , L_4 des formes linéaires de déterminant $\Delta \neq 0$ en x , y , z , t où L_1 et L_2 ainsi que L_3 et L_4 sont des formes conjuguées. Alors il existe un point (x_0 , y_0 , z_0 , t_0) tel que

$$\min_{(x , y , z , t) \equiv (x_0 , y_0 , z_0 , t_0) \pmod 1} |L_1 L_2 L_3 L_4| > \frac{\Delta}{5300} \quad .$$

Si L_1, L_2, L_3, L_4 sont des formes conjuguées dans un certain corps quartique, alors x_0, y_0, z_0, t_0 peuvent être choisis rationnels.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARNES (E. S.). - Non-homogeneous binary quadratic forms, Quart. J. Math., Oxford, Series 2, t. 1, 1950, p. 199-210.

[2] BARNES (E. S.). - The inhomogeneous minima of binary quadratic forms, IV., Acta Math., t. 92, 1954, p. 235-264.

[3] BARNES (E. S.). - The inhomogeneous minimum of a ternary quadratic form, II., Acta Math., t. 96, 1956, p. 67-97.

[4] BARNES (E. S.) and SWINNERTON-DYER (H. P. F.). - The inhomogeneous minima of binary quadratic forms, I., Acta Math., t. 87, 1952, p. 259-323.

[5] BARNES (E. S.) and SWINNERTON-DYER (H. P. F.). - The inhomogeneous minima of binary quadratic forms, II., Acta Math., t. 88, 1952, p. 279-316.

[6] BARNES (E. S.) and SWINNERTON-DYER (H. P. F.). - The inhomogeneous minima of binary quadratic forms, III., Acta Math., t. 92, 1954, p. 199-234.

[7] BIRCH (B. J.). - The inhomogeneous minimum of quadratic forms of signature zero, Acta Arithm., t. 4, 1958, p. 85-98.

[8] BIRCH (B. J.) and DAVENPORT (H.). - Indefinite quadratic forms in many variables, Mathematika, t. 5, 1958, p. 8-12.

[9] BIRCH (B. J.) and SWINNERTON-DYER (H. P. F.). - On the inhomogeneous minimum of the product of n linear forms, Mathematika, t. 3, 1956, p. 25-39.

[10] CHABAUTY (Claude). - Limite d'ensembles et géométrie des nombres, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 143-151.

[11] CASSELS (J. W. S.). - The product of n inhomogeneous linear forms in n variables, J. London math. Soc., t. 27, 1952, p. 485-492.

[12] CASSELS (J. W. S.). - The inhomogeneous minimum of binary quadratic ternary cubic and quaternary quartic forms, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 48, 1952, p. 72-86 et 519-520.

[13] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to diophantine approximation. - Cambridge, at the University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Math. and math. Physics, 45).

[14] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to the geometry of numbers. - Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1959 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenchaften, 99).

ČEBOTAREV (N.). Voir TSCHEBOTAROW (N.).

[15] CHALK (J. H. H.). - On the positive values of linear forms, I., Quart. J. Math., Oxford, t. 18, 1947, p. 215-227.

[16] CHALK (J. H. H.). - On the positive values of linear forms, II., Quart. J. Math., Oxford, t. 19, 1948; p. 67-80.

[17] DAVENPORT (H.). - A simple proof of Remak's theorem on the product of three linear forms, J. London math. Soc., t. 14, 1939, p. 47-51.

[18] DAVENPORT (H.). - On a theorem of Tschebotareff, J. London math. Soc., t. 21, 1946, p. 28-34. Corringendum, J. London math. Soc., t. 24, 1949, p. 316.

[19] DAVENPORT (H.). - Non-homogeneous ternary quadratic forms, Acta Math., t. 80, 1948, p. 65-95.

[20] DAVENPORT (H.) and RIDOUT (D.). - Indefinite quadratic forms, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 9, 1959, p. 544-555.

[21] DAVENPORT (H.) and SWINNERTON-DYER (H. P. F.). - Product of inhomogeneous linear forms, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 5, 1955, p. 474-499.

[22] DICKSON (Leonard E.). - Studies in the theory of numbers. - Chigago, the University of Chigago Press, 1930 (The University of Chigago Science Series).

[23] DIRICHLET (G. LEJEUNE). - G. Lejeune Dirichlet's Werke, 2ter Band. - Berlin, G. Heimer, 1897.

[24] DYSON (F. J.). - A theorem in algebraic topology, Annals of Math., Series 2, t. 49, 1948, p. 75-81.

[25] DYSON (F. J.). - On the product of four non-homogeneous linear forms, Annals of Math., Series 2, t. 49, 1948, p. 82-109.

[26] HANCOCK (Harris). - Development of the Minkowski geometry of numbers. - New-York, the Macmillan Company, 1939.

[27] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, 4th edition. - Oxford, the Clarendon Press, 1959.

[28] HOFREITER (Nicolas). - Über einen Approximationssatz von Minkowski, Monatsh. für Math. und Physik, t. 40, 1933, p. 351-406.

[29] KOKSMA (J. F.). - Diophantische Approximationen. - Berlin, J. Springer, 1936 (Ergebnisse der Mathematik, 4).

[30] LANDAU (Edmund). - Neuer Beweis eines Minkowskischen Satzes, J. reine und angew. Math., t. 165, 1931, p. 1-3.

LEJEUNE-DIRICHLET (G.). Voir DIRICHLET (G. LEJEUNE).

[31] MINKOWSKI (Hermann). - Annäherung einer reellen Grösse durch rationale Zahlen, Math. Annalen, t. 54, 1901, p. 108-124.

[32] MINKOWSKI (Hermann). - Diophantische Approximationen. - Leipzig, B. G. Teubner, 1907 (math. Vorlesung. Univ. Göttingen, 2).

[33] MORDELL (L. J.). - Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms, Vierteljahr. Naturf. Gesellsch. Zürich, t. 85, 1940, p. 47-50.

[34] MORDELL (L. J.). - Thoughts on number theory, J. London math. Soc., t. 21, 1946, p. 58-74.

[35] MORDELL (L. J.). - The minimum of an inhomogeneous quadratic polynomial in n variables, Math. Z., t. 63, 1956, p. 525-528.

[36] MORDELL (L. J.). - Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms, J. London math. Soc., t. 35, 1960, p. 91-98.

[37] REMAK (Robert). - Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes, I., Math. Z., t. 17, 1923, p. 1-34.

[38] REMAK (Robert). - Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes, II., Math. Z., t. 18, 1924, p. 173-200.

[39] RIDOUT (D.). - Indefinite quadratic form, Mathematika, t. 5, 1958, p. 122-124.

[40] ROGERS (C. A.). - The product of n non-homogeneous linear forms, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 4, 1954, p. 50-83.

[41] TSCHEBOTARÖW (N.). - Beweis des Minkowskischen Satzes über lineare inhomogene Formen, Bull. Univ. Kasan, Series 2, t. 94, 1934, p. 3-16.

[42] VAN DER WAERDEN (B. L.). - Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen, Acta Math., t. 96, 1956, p. 265-309.

[43] WATSON (G. L.). - The inhomogeneous minimum of an indefinite quadratic form, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 55, 1959, p. 368-370.

[44] WOODS (A. C.). - On a theorem of Tschebotareff, Duke math. J., t. 25, 1958, p. 631-637.