Françoise Badiou

# Formules d'inversion de Möbius

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 2 (1960-1961), exp. n° 1, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
2e année, 1960/61, n° 1



7 novembre 1960

# FORMULES D'INVERSION DE MÖBIUS

par Mme Françoise BADIOU

## 1. Préliminaires.

Soient $F_K$ l'ensemble des fonctions arithmétiques à valeurs dans un corps $K$, $M_K$ le sous-ensemble de $F_K$ formé des fonctions multiplicatives $f$, c'est-à-dire telles que $(m , n) = 1 \rightarrow f(mn) = f(m).f(n)$, et non identiquement nulles.

1° On supposera que $f(1) = 1$ pour tout $f$ de $M_K$, dans la suite. En effet, s'il existe $n > 1$ tel que $f(n) \neq 0$, $f(1) = 1$ puisque $f(n)$ est inversible dans $K$ ; sinon $f(1) = \alpha$ ( $\alpha \neq 0$ ) et $f = \alpha.U$ où

$$U(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases} .$$

2° Tout élément $f$ de $M_K$ est déterminé par les éléments $f(p^\alpha)$ où $p$ parcourt l'ensemble $P$ des nombres premiers, $\alpha$ l'ensemble $N$. On a

$$f(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1}) \ldots f(p_k^{\alpha_k}) .$$

EXEMPLES : $U$

$I$ définie par $I(n) = 1$ pour tout $n$.

Si $K = C$, $f_s(n) = n^s$ ( $s$ étant un nombre complexe donné)

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p_i | n \\ p_i \in P}} (1 - \frac{1}{p_i}) \quad \text{(indicateur de Gauss)} .$$

## 2. Produit de convolution dans $F_K$.

$F$ et $G$ étant deux éléments de $F_K$, on désigne par $F * G$ l'élément de $F_K$ défini par

$$F * G(n) = \sum_{d|n} F(d).G(\frac{n}{d}) .$$

Ce produit est évidemment commutatif ; il est associatif, en effet :

$$F * (G * H)(n) = \sum\sum_{d_1 . d_2 . d_3 = n} F(d_1).G(d_2).H(d_3) \quad ;$$

$U$ est un élément unité.

Enfin, si $F(1) \neq 0$ , $F$ <u>est inversible</u>. En effet, on peut définir $F^*(n)$ par un système d'équations linéaires qui est un système de Cramer

$$F * F^*(1) = F(1)\ F^*(1) = 1$$
$$\vdots$$
$$F * F^*(n) = F^*(n)\ F(1) + \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} F^*(d)\ F(\tfrac{n}{d}) = 0 \quad .$$

PROPRIÉTÉ 1. - $M_K$ <u>muni du produit de convolution est un groupe multiplicatif</u>.

Vérifions la propriété de fermeture. Soient $f$ et $g$ deux éléments de $M_K$ et $(m , n) = 1$

$$f * g(mn) = \sum_{\Delta|mn} f(\Delta)\ g\tfrac{mn}{\Delta} = \sum_{\substack{d|m \\ d'|n}} f(d)\ f(d').g(\tfrac{m}{d}).g(\tfrac{n}{d'}) = f * g(m).f * g(n) \quad .$$

Si $f \in M_K$ , $f^* \in M_K$ . En effet, soit $\overline{f}^*$ l'élément de $M_K$ qui coïncide avec $f^*$ sur les puissances des nombres premiers

$$f * f^* = U$$

et

$$f * \overline{f}^*(p^\alpha) = U(p^\alpha) \quad .$$

Or $f * \overline{f}^* \in M_K$ , par suite $f * \overline{f}^*(n) = U(n)$ $(\forall\ n)$, donc $\overline{f}^* = f^*$ .

<u>Première formule d'inversion</u>.

$M_K$ <u>peut être considéré comme un groupe d'homothéties inversibles de</u> $F_K$ . <u>Par suite, si</u> $F$ <u>et</u> $G$ <u>sont deux éléments de</u> $F_K$ <u>et</u> $f$ <u>un élément de</u> $M_K$ , <u>les deux formules suivantes sont équivalentes</u> :

(1) $$G = f * F \quad \text{ou} \quad F = f^* * G \quad .$$

APPLICATION.

<u>Fonction de Möbius</u>. - On désigne par $\mu$ l'élément $I^*$ de $M_K$ .

$\mu(1) = 1$

$\mu(p) = -1$

$\mu(p^{\alpha+2}) = 0 \quad (\alpha \geqslant 0)$ .

Donc $\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré ;} \\ +1 & \text{si } n = 1 \text{ ;} \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1.p_2 \cdots p_k \quad ( p_1 < p_2 \cdots < p_k \text{ étant des éléments de } p ) \end{cases}$

$|\mu(n)|$ est donc la fonction caractéristique des nombres "quadratfrei".

Puisque $I * \mu = U$ , on obtient

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{d|n} (d) = 0 & \text{si } n > 1 \\ \phantom{\sum_{d|n} (d)} = 1 & \text{si } n = 1 . \end{cases}$$

D'après la formule (1), si

$$G(n) = \sum_{d|n} F(d)$$

alors

$$F(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\ G(\tfrac{n}{d})$$

et réciproquement.

Soit par exemple $\Lambda$ l'élément de $F_R$ défini par

$$\begin{cases} \Lambda(n) = 0 \text{ si } n \text{ n'est pas une puissance d'un nombre premier} \\ \Lambda(p^\alpha) = \log p \text{ ;} \end{cases}$$

on a visiblement :

$$(3) \qquad \log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

et par suite

$$(4) \qquad \Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(\tfrac{n}{d}) \log d \quad .$$

L'inverse d'une fonction complètement multiplicative $\psi$ est $\mu.\psi$ ; en effet

$$\psi * \mu\psi(n) = \sum_{d|n} \psi(d).\psi(\tfrac{n}{d})\ \mu(\tfrac{n}{d}) = \psi(n) \sum_{d|n} \mu(d) = \psi(n).U(n) \quad ;$$

$$f_s^*(n) = \mu(n).f_s(n) \quad .$$

Soit $\sigma_s(n) = I * f_s(n)$ . $\sigma_s(n)$ est la somme des puissances (s) des diviseurs de $n$ : c'est donc une fonction multiplicative. Or

$$\sigma_s(p^\alpha) = \frac{1 - p^{s(\alpha+1)}}{1 - p^s} \quad .$$

Donc

(5) $$\sigma_s(n) = \prod_{\substack{p_i | n \\ p_i \in P}} \frac{1 - p_i^{s(\alpha_i+1)}}{1 - p_i^s} \qquad \text{si} \quad n = \prod p_i^{\alpha_i} \quad ;$$

on obtient les deux formules (par inversion)

$$\frac{1}{n^s} = \sum_{d|n} \frac{\sigma_s(d)}{d^s} \; \mu(\tfrac{n}{d})$$

$$n^s = \sum_{d|n} \sigma_s(d) . \mu(\tfrac{n}{d}) \quad .$$

Indicateur de Gauss $\varphi$ .

$I * \varphi$ est un élément de $M_K$ , or $I * \varphi(p^\alpha) = p^\alpha = f_1(p^\alpha)$ . Par suite $I * \varphi(n) = n$ pour tout $n$ . Donc

(6) $$n = \sum_{d|n} \varphi(d) \quad ,$$

et par inversion,

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} d\mu(\tfrac{n}{d}) = \sum \tfrac{n}{d} \mu(d)$$

d'où

(7) $$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \quad .$$

On a vu que $|\mu(n)| = (\mu(n))^2$ est une fonction multiplicative. On obtient facilement sa valeur

$$|\mu(n)| = \sum_{d|n} \mu(\tfrac{n}{d}) \, 2^{k(d)} \quad ,$$

$k(n)$ désignant le nombre de facteurs premiers de $n$ .

3. Autres produits.

Nous allons dans la suite considérer $M_K$ comme un groupe d'homothéties inversibles pour d'autres ensembles de fonctions.

A. Produit $\perp$ .

Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur la demi-droite réelle $x \geqslant 1$ , à valeurs dans $K$ : à un élément $f$ de $M_K$ et à un élément $F$ de $\mathfrak{F}$ , on associe l'élément $G$ de $\mathcal{F}$ défini par le produit

$$f \top F(x) = \sum_{n=1}^{[x]} f(n).F(\frac{x}{n}) \qquad ( x \geqslant 1 ) \quad .$$

PROPRIÉTÉ 2. - Si $f$ et $g$ sont deux éléments de $M_K$ ,

(8) $$f \top (g \top F) = (f * g) \top F \quad .$$

En effet,

$$f \top (g \top F)(x) = \sum_{d=1}^{[x]} f(d). \sum_{d'=1}^{[x/n]} g(d') \, F(\frac{x}{dd'})$$

$$= \sum_{n=1}^{[x]} F(\frac{x}{n}) \sum_{dd'=n} f(d).g(d') \quad .$$

Donc en particulier, la formule $G = f \top F$ s'inverse et l'on obtient l'équivalence

(9) $G = f \top F \longleftrightarrow F = f^* \top G$ (deuxième formule d'inversion) ,

(en effet, pour tout $F \in \mathcal{F}$ , $U \top F = F$ ).

Considérons par exemple la fonction $F(x) = [x]$ ( $x \geqslant 1$ ), et soient

$$G = \mu \top F$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n)[\frac{x}{n}] \qquad ( x > 1 ) \quad .$$

Comme $F = I \top G$ , on vérifie facilement que $G(x) = 1$ ( $x \geqslant 1$ ), donc

(10) $$1 = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n)[\frac{x}{n}] \qquad \text{pour tout } x \geqslant 1 \quad .$$

B. Produit $\perp$ .

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes muni de l'opération externe $\perp$ dont le domaine d'opérateurs est $M_C$ , définie de la façon suivante : si $F \in \mathcal{G}$ et $f \in M_C$ .

$f \perp F = G$ a un sens lorsque la série

$$G(x) = \sum_{m=1}^{\infty} F(mx).f(m)$$

converge pour tout $x$ .

En supposant que toutes les opérations qui suivent ont un sens, on obtient encore

(11) $$(f * g) \perp F = f \perp (g \perp F) \quad ;$$

en effet,

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(m) \sum_{n=1}^{\infty} g(n).F(mnx) = \sum_{m=1}^{\infty} F(mx)\ f * g(m) \quad ,$$

et $U \perp F = F$ pour tout $F$ de $\mathcal{S}$ .

Donc si chacune des séries qui y figurent est absolument convergente, les deux formules qui suivent sont équivalentes :

(12) $G = f \perp F$ ou $F = f^* \perp G$ (troisième formule d'inversion).

4. Application aux séries de Dirichlet.

On sait que la série $S_F(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}$ associée à une fonction arithmétique $F$ est unique au voisinage d'un point où elle converge.

On en déduit que si $S_F(s)$ , $S_G(s)$ et $S_{F*G}(s)$ convergent

(13) $$S_{F*G}(s) = S_F(s).S_G(s) \quad .$$

Série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique multiplicative.

Si $f \in M_C$ , et si le produit infini de séries est convergent

(14) $$S_f(s) = \prod_{p \in P} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^\ell)}{p^{2s}} + \dots + \frac{f(p^n)}{p^{ns}} + \dots \right) \quad ,$$

en particulier

$$\zeta(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \qquad ( R(s) > 1 )$$

et $\frac{1}{S_f(s)} = S_{f^*}(s)$ , puisque $S_U(s) = 1$ ). En particulier

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum \frac{\mu(n)}{n^s} \qquad ( R(s) > 1 ) \quad .$$

5. Distribution des valeurs de la fonction de Möbius.

Soit $\mathcal{M}(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)$ .

1° $$|\mathcal{M}(x)| = O(x) \quad .$$

On démontre que ce théorème équivaut au théorème des nombres premiers, c'est-à-dire à $\psi(x) \sim x$ (où $\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)$ ).

2° LITTLEWOOD a démontré que l'hypothèse de Riemann équivaut à

$$|\mathfrak{M}(x)| = O(x^{1/2+\varepsilon}) \qquad (\forall\ \varepsilon > 0) \quad .$$

3° On obtient une borne inférieure de $\mathfrak{M}(x)$ avec l'inégalité démontrée par TITCHMASH :

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{|\mathfrak{M}(x)|}{\sqrt{x}} > 0 \quad .$$