

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

FRANÇOISE BADIOU

Formules d'inversion de Möbius

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 2 (1960-1961), exp. n° 1, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A1_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMULES D'INVERSION DE MÖBIUS

par Mme Françoise BADIOU

1. Préliminaires.

Soient F_K l'ensemble des fonctions arithmétiques à valeurs dans un corps K , M_K le sous-ensemble de F_K formé des fonctions multiplicatives f , c'est-à-dire telles que $(m, n) = 1 \rightarrow f(mn) = f(m) \cdot f(n)$, et non identiquement nulles.

1° On supposera que $f(1) = 1$ pour tout f de M_K , dans la suite. En effet, s'il existe $n > 1$ tel que $f(n) \neq 0$, $f(1) = 1$ puisque $f(n)$ est inversible dans K ; sinon $f(1) = \alpha$ ($\alpha \neq 0$) et $f = \alpha \cdot U$ où

$$U(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases} .$$

2° Tout élément f de M_K est déterminé par les éléments $f(p^\alpha)$ où p parcourt l'ensemble P des nombres premiers, α l'ensemble N . On a

$$f(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1}) \dots f(p_k^{\alpha_k}) .$$

EXEMPLES : U

I définie par $I(n) = 1$ pour tout n .

Si $K = \mathbb{C}$, $f_s(n) = n^s$ (s étant un nombre complexe donné)

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p_i | n \\ p_i \in P}} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \quad (\text{indicateur de Gauss}) .$$

2. Produit de convolution dans F_K .

F et G étant deux éléments de F_K , on désigne par $F * G$ l'élément de F_K défini par

$$F * G(n) = \sum_{d|n} F(d) \cdot G\left(\frac{n}{d}\right) .$$

Ce produit est évidemment commutatif; il est associatif, en effet :

$$F * (G * H)(n) = \sum_{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = n} \sum F(d_1) \cdot G(d_2) \cdot H(d_3) \quad ;$$

U est un élément unité.

Enfin, si $F(1) \neq 0$, F est inversible. En effet, on peut définir $F^*(n)$ par un système d'équations linéaires qui est un système de Cramer

$$\begin{aligned} F * F^*(1) &= F(1) F^*(1) = 1 \\ \vdots \\ F * F^*(n) &= F^*(n) F(1) + \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} F^*(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = 0 \quad . \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 1. - M_K muni du produit de convolution est un groupe multiplicatif.

Vérifions la propriété de fermeture. Soient f et g deux éléments de M_K et $(m, n) = 1$

$$f * g(mn) = \sum_{\Delta | mn} f(\Delta) g\left(\frac{mn}{\Delta}\right) = \sum_{\substack{d|m \\ d'|n}} f(d) f(d') \cdot g\left(\frac{m}{d}\right) \cdot g\left(\frac{n}{d'}\right) = f * g(m) \cdot f * g(n) \quad .$$

Si $f \in M_K$, $f^* \in M_K$. En effet, soit \bar{f}^* l'élément de M_K qui coïncide avec f^* sur les puissances des nombres premiers

$$f * f^* = U$$

et

$$f * \bar{f}^*(p^\alpha) = U(p^\alpha) \quad .$$

Or $f * \bar{f}^* \in M_K$, par suite $f * \bar{f}^*(n) = U(n) \quad (\forall n)$, donc $\bar{f}^* = f^*$.

Première formule d'inversion.

M_K peut être considéré comme un groupe d'homothéties inversibles de F_K . Par suite, si F et G sont deux éléments de F_K et f un élément de M_K , les deux formules suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad G = f * F \quad \text{ou} \quad F = f^* * G \quad .$$

APPLICATION.

Fonction de Möbius. - On désigne par μ l'élément I^* de M_K .

$$\mu(1) = 1$$

$$\mu(p) = -1$$

$$\mu(p^{\alpha+2}) = 0 \quad (\alpha \geq 0) \quad .$$

Donc $\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré ;} \\ + 1 & \text{si } n = 1 ; \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \quad (p_1 < p_2 \cdots < p_k \text{ étant des} \\ & \text{éléments de } p) \end{cases}$

$|\mu(n)|$ est donc la fonction caractéristique des nombres "quadratifrei".

Puisque $I * \mu = U$, on obtient

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{d|n} (d) = 0 & \text{si } n > 1 \\ = 1 & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

D'après la formule (1), si

$$G(n) = \sum_{d|n} F(d)$$

alors

$$F(n) = \sum_{d|n} \mu(d) G\left(\frac{n}{d}\right)$$

et réciproquement.

Soit par exemple Λ l'élément de F_R défini par

$$\begin{cases} \Lambda(n) = 0 & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance d'un nombre premier} \\ \Lambda(p^\alpha) = \log p ; \end{cases}$$

on a visiblement :

$$(3) \quad \log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

et par suite

$$(4) \quad \Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log d \quad .$$

L'inverse d'une fonction complètement multiplicative ψ est $\mu \cdot \psi$; en effet

$$\psi * \mu\psi(n) = \sum_{d|n} \psi(d) \cdot \psi\left(\frac{n}{d}\right) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \psi(n) \sum_{d|n} \mu(d) = \psi(n) \cdot U(n) \quad ;$$

$$f_s^*(n) = \mu(n) \cdot f_s(n) \quad .$$

Soit $\sigma_s(n) = I * f_s(n)$. $\sigma_s(n)$ est la somme des puissances (s) des diviseurs de n : c'est donc une fonction multiplicative. Or

$$\sigma_s(p^\alpha) = \frac{1 - p^{s(\alpha+1)}}{1 - p^s} \quad .$$

Donc

$$(5) \quad \sigma_s(n) = \prod_{\substack{p_i | n \\ p_i \in P}} \frac{1 - p_i^{s(\alpha_i+1)}}{1 - p_i^s} \quad \text{si } n = \prod p_i^{\alpha_i} \quad ;$$

on obtient les deux formules (par inversion)

$$\frac{1}{n^s} = \sum_{d|n} \frac{\sigma_s(d)}{d^s} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$n^s = \sum_{d|n} \sigma_s(d) \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right) \quad .$$

Indicateur de Gauss φ .

$I * \varphi$ est un élément de M_K , or $I * \varphi(p^\alpha) = p^\alpha = f_1(p^\alpha)$. Par suite $I * \varphi(n) = n$ pour tout n . Donc

$$(6) \quad n = \sum_{d|n} \varphi(d) \quad ,$$

et par inversion,

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} d \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum \frac{n}{d} \mu(d)$$

d'où

$$(7) \quad \frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \quad .$$

On a vu que $|\mu(n)| = (\mu(n))^2$ est une fonction multiplicative. On obtient facilement sa valeur

$$|\mu(n)| = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) 2^{k(d)} \quad ,$$

$k(n)$ désignant le nombre de facteurs premiers de n .

3. Autres produits.

Nous allons dans la suite considérer M_K comme un groupe d'homothéties inversibles pour d'autres ensembles de fonctions.

A. Produit \mathfrak{I} .

Soit \mathfrak{F} l'ensemble des fonctions définies sur la demi-droite réelle $x \geq 1$, à valeurs dans K : à un élément f de M_K et à un élément F de \mathfrak{F} , on associe

l'élément G de \mathfrak{F} défini par le produit

$$f \tau F(x) = \sum_{n=1}^{[x]} f(n) \cdot F\left(\frac{x}{n}\right) \quad (x \geq 1) \quad .$$

PROPRIÉTÉ 2. - Si f et g sont deux éléments de M_K ,

$$(8) \quad f \tau (g \tau F) = (f * g) \tau F \quad .$$

En effet,

$$\begin{aligned} f \tau (g \tau F)(x) &= \sum_{d=1}^{[x]} f(d) \cdot \sum_{d'=1}^{[x/n]} g(d') F\left(\frac{x}{dd'}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{[x]} F\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{dd'=n} f(d) \cdot g(d') \quad . \end{aligned}$$

Donc en particulier, la formule $G = f \tau F$ s'inverse et l'on obtient l'équivalence

$$(9) \quad G = f \tau F \leftrightarrow F = f^* \tau G \quad (\text{deuxième formule d'inversion}) \quad ,$$

(en effet, pour tout $F \in \mathfrak{F}$, $U \tau F = F$).

Considérons par exemple la fonction $F(x) = [x]$ ($x \geq 1$), et soient

$$G = \mu \tau F$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \left[\frac{x}{n} \right] \quad (x > 1) \quad .$$

Comme $F = I \tau G$, on vérifie facilement que $G(x) = 1$ ($x \geq 1$), donc

$$(10) \quad 1 = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \left[\frac{x}{n} \right] \quad \text{pour tout } x \geq 1 \quad .$$

B. Produit \perp .

Soit \mathfrak{S} l'ensemble des fonctions à valeurs complexes muni de l'opération externe \perp dont le domaine d'opérateurs est M_C , définie de la façon suivante : si $F \in \mathfrak{S}$ et $f \in M_C$.

$f \perp F = G$ a un sens lorsque la série

$$G(x) = \sum_{m=1}^{\infty} F(mx) \cdot f(m)$$

converge pour tout x .

En supposant que toutes les opérations qui suivent ont un sens, on obtient encore

$$(11) \quad (f * g) \perp F = f \perp (g \perp F) \quad ;$$

en effet,

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(m) \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \cdot F(mnx) = \sum_{m=1}^{\infty} F(mx) f * g(m) \quad ,$$

et $U \perp F = F$ pour tout F de \mathcal{S} .

Donc si chacune des séries qui y figurent est absolument **convergente**, les deux formules qui suivent sont équivalentes :

$$(12) \quad G = f \perp F \quad \text{ou} \quad F = f^* \perp G \quad (\text{troisième formule d'inversion}).$$

4. Application aux séries de Dirichlet.

On sait que la série $S_F(s) = \sum_1^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}$ associée à une fonction arithmétique

F est unique au voisinage d'un point où elle converge.

On en déduit que si $S_F(s)$, $S_G(s)$ et $S_{F * G}(s)$ convergent

$$(13) \quad S_{F * G}(s) = S_F(s) \cdot S_G(s) \quad .$$

Série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique multiplicative.

Si $f \in M_{\mathbb{C}}$, et si le produit infini de séries est convergent

$$(14) \quad S_f(s) = \prod_{p \in P} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots + \frac{f(p^n)}{p^{ns}} + \dots \right) \quad ,$$

en particulier

$$\zeta(s) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} \quad (R(s) > 1)$$

et $\frac{1}{S_f(s)} = S_{f^*}(s)$, puisque $S_U(s) = 1$). En particulier

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum \frac{\mu(n)}{n^s} \quad (R(s) > 1) \quad .$$

5. Distribution des valeurs de la fonction de Möbius.

Soit $\mathfrak{M}(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$.

1°

$$|\mathfrak{M}(x)| = O(x) \quad .$$

On démontre que ce théorème équivaut au théorème des nombres premiers, c'est-à-dire à $\psi(x) \sim x$ (où $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$).

2° LITTLEWOOD a démontré que l'hypothèse de Riemann équivaut à

$$|\mathfrak{M}(x)| = O(x^{1/2+\varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad .$$

3° On obtient une borne inférieure de $\mathfrak{M}(x)$ avec l'inégalité démontrée par TITCHMASH :

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{|\mathfrak{M}(x)|}{\sqrt{x}} > 0 \quad .$$
