Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

AHMET ABDIK

Problème des partitions

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 2 (1960-1961), exp. n° 13, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A13_0>

PROBLÈME DES PARTITIONS

par Ahmet ABDIK

Étant donné un nombre entier positif n, on peut toujours le mettre sous la forme :

(R) $n = a_1 + \dots + a_s$, les a_i sont des entiers > 0 .

On suppose que :

(i) la répétition d'un même a_i est permise

(ii) l'ordre des a_i n'intervient pas

(iii) s est indéterminé.

Sous ces trois conditions, une représentation de n du type (R), s'appelle <u>une partition de</u> n.

On désignera par $p(n)$ le nombre de partitions de n. Il s'agit de trouver la valeur de $p(n)$. Ici, nous allons donner quelques formules asymptotiques pour $p(n)$.

Le problème est un problème additif. Donc associons à $p(n)$ sa <u>fonction génératrice</u> $f(x)$.

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\, x^n .$$

Cette fonction a été trouvée par EULER.

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\, x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1} \tag{1}$$

$f(x)$ converge dans le cercle unité, $(|x| < 1)$, et admet ce cercle <u>comme coupure</u>.

POLYA a démontré en 1915, que toute fonction représentée par une série entière, convergente dans le cercle unité, doit se comporter comme une fonction génératrice de ce type. Il a utilisé de telles séries, de nature simple, et en approchant $f(x)$, il a trouvé que la partie principale de $p(n)$ est :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \frac{\exp[(2\pi/\sqrt{6})(\sqrt{n-(1/2)})]}{\sqrt{(n-(1/24)}} \quad .$$

En 1918, HARDY et RAMANUJAN ont trouvé une autre formule asymptotique. Ils ont remarqué qu'au voisinage d'un point rationnel du cercle unité, $f(x)$ avait plus de "poids". Or l'ensemble des points rationnels du cercle est dense sur la circonférence, d'où l'idée d'utiliser la suite de Farey et "Farey dissection".

Soit N un nombre entier positif.

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(x)}{x^{n+1}}\, dx \quad . \tag{2}$$

C est le cercle de centre 0 et de rayon

$$|x| = \exp(-2\pi N^{-2}) \quad .$$

Soit $\mathfrak{F}_N$ la suite de Farey d'ordre N.

$$\frac{h}{k} \in \mathfrak{F}_N \,, \quad 0 \leq \frac{h}{k} \leq 1$$

$P_{h/k}$ l'image de $\frac{h}{k}$ sur C. $P_{h/k}$ s'appelle point de Farey.

Si $\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'} \in \mathfrak{F}_N$ consécutifs,

$$\mu = \frac{h+h'}{k+k'} \,, \quad \mu \notin \mathfrak{F}_N \quad .$$

Soit P_μ son image sur C.

Soit $\nu = \frac{h+h''}{k+k''}$ et $\nu \notin \mathfrak{F}_N$, l'arc $P_\mu P_\nu$ sera appelé l'arc de Farey, et noté par $\xi_{h,k}$. La formule (2) devient

$$p(n) = \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0 \leq h \leq k \leq N}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_{h,k}} \frac{f(x)}{x^{n+1}}\, dx \quad .$$

RADEMACHER a modifié cette méthode, et a trouvé le même résultat. Nous allons étudier maintenant le problème sous cet angle.

Il se base sur un théorème de FORD.

Donnons-nous une suite de Farey d'ordre N. Soit $\frac{h}{k} \in \mathfrak{F}_N$.

Dans le plan complexe, considérons le point

$$r_{h,k} = \frac{h}{k} + \frac{i}{2k^2} \quad .$$

$C_{h,k}$ désignera le cercle de centre $r_{h,k}$, et de rayon $\frac{1}{2k^2}$ ($C_{h,k}$ s'appelle cercle de Ford).

Deux quelconques de ces cercles ne se coupent pas.

Soit $\frac{\ell}{m} \in \mathfrak{F}_N$.

$$|r_{h,k} - r_{\ell,m}|^2 - \left(\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2m^2}\right)^2 = \frac{(hm - \ell k)^2 - 1}{k^2 m^2} \geqslant 0 \quad .$$

$C_{h,k}$ et $C_{\ell,m}$ sont tangents, si $hm - \ell k = 1$, c'est-à-dire si $\frac{h}{k}$ et $\frac{\ell}{m}$ sont consécutifs avec $N = k + m - 1$.

Soient trois éléments consécutifs :

$$\frac{h_1}{k_1} < \frac{h}{k} < \frac{h_2}{k_2} \quad .$$

$C_{h,k}$ a un point de contact avec C_{h_1}, k_1 , et un autre point de contact avec C_{h_2}, k_2 .

On obtient un arc $\gamma_{h,k}$ sur $C_{h,k}$ quand on parcourt ces cercles dans le sens négatif.

Les coordonnées des extrémités de $\gamma_{h,k}$ sont

$$\begin{cases} \dfrac{-k_1}{k(k^2+k_1^2)} + \dfrac{i}{k^2+k_1^2} + \dfrac{h}{k} = \xi'_{h,k} + \dfrac{h}{k} \\[2ex] \dfrac{-k_2}{k(k^2+k_2^2)} + \dfrac{i}{k^2+k_1^2} + \dfrac{h}{k} = \xi''_{h,k} + \dfrac{h}{k} \end{cases} \quad .$$

On obtient donc

$$p(n) = \sum_{0 \leqslant h < k \leqslant N} \int_{\gamma_{h,k}} f(\exp 2\pi i r) \exp(-2\pi i n r)\, dr$$

avec, si $r = \sigma + it$ et $t > 0$,

$$x = \exp 2\pi i r$$

alors $|x| < 1$.

REMARQUE. - Soit la fonction

$$\eta(r) = \exp(\pi i r/12) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \exp 2\pi i n r) \ , \quad r = \sigma + it \ , \quad t > 0$$

alors $\eta(r)$ a un sens.

Si on change r en $\frac{ar + b}{cr + d}$, a , b , c, d entiers tels que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

on a :

$$\eta(\frac{ar + b}{cr + d}) = \varepsilon \exp[(\pi i/12)\sqrt{(cr + d)/i}\ \eta(r) \qquad ,$$

avec $\varepsilon^{24} = 1$, $r + 1 = \frac{1.r + 1}{0.r + 1}$ et $-\frac{1}{r} = \frac{0.r + 1}{1.r + 0}$

$$\eta(r + 1) = \exp(\pi i/12)\ \eta(r) \ \times \eta[(ar + b)/(cr + d)] = \exp(\pi i/12)\ \eta((ar + b)/(cr + d)) \ .$$

Reprenons notre problème :

$$p(n) = \sum_{0 \leqslant h < k \leqslant N} \int_{\gamma_{h,k}} f(\exp 2\pi i r) \ \exp(- 2\pi i n r) \ dr \qquad .$$

Faisons les changements de variable.

$$r = \frac{h}{k} + \xi$$

$$p(n) = \sum_{\substack{0 \leqslant h < k \leqslant N \\ (h,k) = 1}} \int_{\xi'_{h,k}}^{\xi''_{h,k}} f(\exp 2\pi i(\frac{h}{k} + \xi) \ \times \exp(- 2\pi i n(\frac{h}{k} + \xi))) \ d\xi \qquad .$$

Posons encore :

$$\xi = \frac{iz}{k^2}$$

$$\begin{cases} z'_{h,k} = \dfrac{k^2}{k^2 + k_1^2} + \dfrac{kk_1}{k^2 + k_1^2} \\[2ex] z''_{h,k} = \dfrac{k^2}{k^2 + k_2^2} + \dfrac{kk_2}{k^2 + k_2^2} \end{cases} .$$

Le cercle $C_{h,k}$ se transforme en un cercle $K_{h,k}$, de centre $z = 1/2$ et de rayon égal $1/2$; il est donc tangent en 0 à l'axe imaginaire.

Notre fonction devient :

$$p(n) = \sum_{\substack{0 \leq h < k \leq N \\ (h,k)=1}} k^{-2} \int_{z'_{h,k}}^{z''_{h,k}} f(\exp 2\pi i(\frac{h}{k} + \frac{iz}{k^2})) \times \exp(- 2\pi i(\frac{h}{k} + \frac{iz}{k^2})) \, dz .$$

Remarquons que :

$$f(e^{2\pi i r}) = \frac{\exp \pi i(r/12)}{\eta(r)} .$$

Remarquons que :

$$\eta(\frac{ar + b}{cr + d}) = \varepsilon\sqrt{\frac{cr + d}{i}}\, \eta(r)$$

$$r = \frac{h}{k} + \frac{12}{k^2} , \quad \frac{ar + b}{cr + d} = \frac{h'}{k} + \frac{i}{z}$$

on obtient :

$$c = k , \quad d = - h$$

$$f(\exp 2\pi i(\frac{h}{k} + \frac{iz}{k^2})) = \omega_{h,k} \sqrt{z/k}\, \exp((\pi/12)(\frac{1}{z} - \frac{z}{k^2})) \times f(\exp 2\pi i(\frac{h'}{k} + \frac{1}{z}))$$

avec $\omega_{h,k} = \varepsilon . \exp \pi i(\frac{h - h'}{12k})$, $(\omega_{h,k})^{24} = 1$

$$p(n) = \sum_{0\leqslant h<k\leqslant N} i\omega_{h,k} \exp(-2\pi i(hn/k)\ k^{-5/2} \times$$

$$\times \{ \int_{z'_{h,k}}^{z''_{h,k}} \sqrt{z} \exp((\pi/12)(\frac{1}{z} - \frac{z}{k^2})) \times f(\exp 2\pi i(\frac{h'}{k} + \frac{1}{z}) \times \exp(2\pi nz)/k^2)\} \ dz$$

posons

$$G_k(z) = \sqrt{z} \exp((\pi/12)(\frac{1}{z} - \frac{z}{k^2}))$$

$$p(n) = \sum_{0\leqslant h<k\leqslant N} i\omega_{h,k} \exp(-2\pi i(hn/k)) \times k^{-5/2} \times I_{h,k}$$

$$+ \sum_{0\leqslant h<k\leqslant N} i\omega_{h,k} \exp(-2\pi i(hn/k))\ I^{\alpha}_{h,k} \quad .$$

Avec

$$I_{h,k} = \int_{z'_{h,k}}^{z''_{h,k}} G_k(z) \ \exp(2\pi nz/k^2)\ dz$$

$$I^{\alpha}_{h,k} = \int_{z'_{h,k}}^{z''_{h,k}} G_k(z) \times \{f(\exp(2\pi i(\frac{h'}{k} + \frac{1}{z}))) - 1\} \exp(2\pi nz/k^2)\ dz \quad .$$

On a montré que $I^{\alpha}_{h,k}$ tend vers 0 quand $N \to \infty$.

$|z'_{h,k} - z''_{h,k}| < \frac{4k}{N}$, $|z| \leqslant 1$, $R(z) \leqslant 1$, $R(\frac{1}{z}) \geqslant 1$,
$x + iy = z \implies x^2 + y^2 \leqslant x$.

On trouve

$|I^{\alpha}_{h,k}| \leqslant C(\frac{k}{N})^{3/2}$, C est une constante

$$\Big|\sum_{0\leqslant h\leqslant k\leqslant N} i\omega_{h,k} \exp(-2\pi i(hn/k)) \times k^{-5/2}\ I^{\alpha}_{h,k}\Big| \leqslant C \sum_{0\leqslant h\leqslant k\leqslant N} k^{-5/2} (\frac{k}{N})^{3/2}$$

$$\leqslant \frac{C}{N^{1/2}}$$

$$p(n) = \sum_{0\leqslant h<k\leqslant N} i\omega_{h,k} \exp(-2\pi i(hn/k)) . k^{-5/2}\ I_{h,k} + O(N^{-1/2}) \quad .$$

Soit le cercle K , de centre $z = 1/2$ de rayon $= 1/2$

$$I_{h,k} = \int_{K^-} G_k(z) \exp(2\pi nz/k^2)\, dz - \int_0^{z'_{h,k}} G_k(z) \exp(2\pi nz/k^2)\, dz$$

$$- \int_{z''_{h,k}}^{0} |G_k(z)| \leqslant C\sqrt{k/N} \quad .$$

On démontre de la même façon que :

$$I_{h,k} = \int_{K^-} G_k(z) \exp(2\pi nz/k^2)\, dz + O(\tfrac{k}{N})^{3/2} \quad .$$

On a finalement :

$$p(n) = \sum_{0 \leqslant h \leqslant k < N} i\omega_{h,k} \exp(-2\pi i(hn/k))\, k^{-5/2} \times \int_{K^-} G_k(z) \exp(2\pi nz/k^2)\, dz$$

$$+ O(N^{-1/2})$$

posons :

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 \leqslant h \leqslant k < N \\ (h,k)=1}} \omega_{h,k} \exp(-2\pi ihn/k)$$

$$p(n) = 1 \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \times k^{-5/2} \int_{K^-} G_k(z) \exp(2\pi nz/k^2)\, dz + O(N^{-1/2}) \quad .$$

Faisons le changement de variable.

$$z = \frac{1}{\omega} \quad .$$

Le cercle K , se transforme en une droite parrallèle à l'axe imaginaire.

Finalement, posons $s = \frac{\pi\omega}{12}$, nous obtenons alors :

$$p(n) = 2\pi(24n - 1)^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(n)}{k} J_{3/2} \left(\frac{\pi}{k}\sqrt{2/3\,(n - 1/24)}\right)$$

$$\boxed{p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \cdot k^{1/2} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh C/k\sqrt{n - (1/24)}}{\sqrt{n - (1/24)}}\right) + O(N^{-1/2})}$$

$J_{3/2}$ fonction de Bessel.

INGHAM a trouvé une autre solution, en se servant d'un théorème tauberien

$$p(n) \sim \frac{\exp \pi\sqrt{2\pi/3}}{(4\sqrt{3})\ n}$$

$$q(n) \sim \frac{\exp \pi\sqrt{n/3}}{4 \cdot 3^{1/4} \cdot n^{3/4}} \quad q(n) \text{ , partition impaire} \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE.

1° Concernant la "Farey dissection", voir :

HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers. - Oxford, Clarendon Press, 1954.

2° Pour la transformation de la fonction $f(x)$, consulter :

RADEMACHER (Hans). - On the partitions functions $p(n)$, Proc. London math. Soc., t. 43, 1937, p. 241-254.

RADEMACHER (Hans). - On the expansion of the partition function in a series, Annals of Math., t. 44, 1943, p. 416-422.

RADEMACHER (Hans). - Lectures notes on analytic additive number theory. - University of Oregon, National Science Foundation, 1954.

3° Voir aussi :

FORD (L. R.). - Fractions, Amer. math. Monthly, t. 45, 1938, p. 586-601.

HARDY (G. H.) and RAMANUJAN (S.). - Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London math. Soc., t. 17, 1918, p. 75-115.

INGHAM (A. E.). - A Tauberian theorem for partitions, Annals of Math., t. 42, 1941, p. 1075-1090.