SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.
THÉORIE DES NOMBRES

HASSAN SAFFARI

Théorèmes métriques sur les fractions continues

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 1 (1959-1960), exp. nº 5, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1959-1960__1__A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
1re année, 1959/60, n° 5

7 mars 1960

THÉORÈMES MÉTRIQUES SUR LES FRACTIONS CONTINUES

par Hassan SAFFARI

Rappel des formules et notations employées. - Une fraction continue

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

s'écrit

$$\alpha = [a_0 ; a_1 , a_2 , \ldots]$$

les a_n entiers > 0 , $a_0 \geqslant 0$, s'appellent éléments ou quotients incomplets.

La fraction continue finie

$$[a_0 ; a_1 , a_2 , \ldots , a_k] = \frac{p_k}{q_k}$$

s'appelle la k-ième fraction convergente et la fraction continue infinie

$$[a_k ; a_{k+1} , a_{k+2} , \ldots] = r_k$$

le k-ième reste ou quotient complet. Soit $z_n = r_n - a_n$, $0 \leqslant z_n < 1$. On a

$$z_n = \frac{1}{a_{n+1} + z_{n+1}} = \frac{1}{r_{n+1}}$$

$$a_n = [r_n] \quad .$$

On a

$$\left.\begin{aligned} p_k &= a_k\, p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k &= a_k\, q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned}\right\} \text{ avec } \quad \begin{aligned} p_0 &= a_0 , \quad p_{-1} = 1 \\ q_0 &= 1 , \quad q_{-1} = 0 \end{aligned}$$

$$q_k\, p_{k-1} - p_k\, q_{k-1} = (-1)^k$$

$$q_k\, p_{k-2} - p_k\, q_{k-2} = (-1)^{k-1}\, a_k$$

$$\alpha = \frac{p_{k-1}\, r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}\, r_k + q_{k-2}} \qquad q_k \geqslant 2^{(k-1)/2} \;,\quad k \geqslant 2$$

$$\frac{1}{q_k\, q_{k+1}} > |\alpha - \frac{p_k}{q_k}| > \frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)}$$

1. Fonction $a_n(\alpha)$.

Je considère l'ensemble des nombres réels α (modulo 1) et leur développement en fraction continue qui est de la forme $[0 \,;\, a_1 \,,\, a_2 \,,\, \ldots]$. Chaque élément a_n est une fonction du nombre α que j'appelle $a_n(\alpha)$. On va étudier sommairement la nature de cette fonction. Tout d'abord $a_1(\alpha) = [\frac{1}{\alpha}]$, donc on a

$$a_1(\alpha) = k \quad \text{(entier) pour} \quad \frac{1}{k+1} < \alpha \leqslant \frac{1}{k}$$

donc la fonction $a_1(\alpha)$ est constante dans chaque intervalle $\left]\frac{1}{k+1} \,,\, k\right]$ et est discontinue pour toute valeur de α où $\frac{1}{\alpha}$ est entier, et, pour $\alpha \to 0$, $a_1(\alpha)$ tend vers l'infini. Nous appellerons intervalle de rang 1 tout intervalle $\frac{1}{k+1} < \alpha \leqslant \frac{1}{k}$ où $a_1(\alpha)$ est constante (l'intervalle $(0 \,,\, 1)$ s'appellera intervalle de rang 0), on a

$$\int_0^1 a_1(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty \qquad .$$

Pour étudier la fonction $a_2(\alpha)$, considérons l'un quelconque des intervalles de rang 1 : $\frac{1}{k+1} < \alpha \leqslant \frac{1}{k}$. Dans cet intervalle $a_1 = k$, donc $\alpha = \dfrac{1}{k + 1/r_2}$

$1 \leqslant r_2 < \infty$ et $a_2 = [r_2]$ quand r_2 varie de 1 à ∞ , α croît de $\frac{1}{k+1}$ jusqu'à $\frac{1}{k}$ et parcourt l'intervalle de rang 1 considéré, donc $a_2 = \ell$ pour $\dfrac{1}{k+\frac{1}{\ell}} \leqslant \alpha < \dfrac{1}{k+\frac{1}{\ell+1}}$. Ainsi chaque intervalle de rang 1 se subdivise en une infinité dénombrable d'intervalles de rang 2 , et la fonction croissante $a_2(\alpha)$

est constante dans chacun de ces intervalles. L'ensemble des points pour lesquels on a $a_2 = k$ est l'union d'une infinité dénombrable d'intervalles de rang 2 dont un seul est compris dans chaque intervalle de rang 1, il en résulte que chaque intervalle de rang 1 est défini par une seule relation $a_1 = k_1$ tandis que chaque intervalle de rang 2 sera défini par deux relations $a_1 = k_1$, $a_2 = k_2$.

Supposons de façon générale les fonctions $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$, ..., $a_n(\alpha)$ ainsi définies, alors chaque système de valeurs

$$a_1 = k_1 \ , \quad a_2 = k_2 \ , \ \dots \ , \quad a_n = k_n \tag{1}$$

définit un intervalle J_n de rang n, et un nombre quelconque α de cet intervalle se représente sous la forme

$$\alpha = [0 \ , k_1 \ , k_2 \ , \dots \ , k_n \ , r_{n+1}] \tag{2}$$

où r_{n+1} varie de 1 à ∞. Réciproquement pour r_{n+1} arbitraire la relation (2) montre que le nombre α appartient à l'intervalle J_n défini par les relations (1). Comme $a_{n+1}(\alpha) = [r_{n+1}]$, J_n se subdivise en une infinité dénombrable d'intervalles de rang $n+1$, et $a_{n+1}(\alpha)$ est un entier constant dans chacun de ces intervalles. On a

$$\alpha = \frac{p_n \, r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \, r_{n+1} + q_{n-1}}$$

et quand r_{n+1} croît de 1 à ∞, α parcourt tout l'intervalle J_n considéré, tandis que p_n, q_n, p_{n-1}, q_{n-1} restent constants. La fonction étant monotone, en faisant $r_{n+1} = 1$ et ∞, on constate que les points $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$ sont les extrémités de J_n. On a

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(q_n \, r_{n+1} + q_{n-1})}$$

α est fonction monotone de r_{n+1} dans l'intervalle $(1, \infty)$, réciproquement r_{n+1} et aussi a_{n+1} sont des fonctions monotones de α dans l'intervalle J_n, donc, quand α parcourt J_n, $a_{n+1}(\alpha)$ parcourt respectivement les entiers 1, 2, ... et subdivise J_n en une infinité dénombrable d'intervalles J_{n+1}; cette fonction est décroissante pour n pair et croissante pour n impair.

2. Un problème.

Le premier problème métrique qui se pose est de trouver la mesure de l'ensemble des points de l'intervalle $(0\ ,\ 1)$ pour lesquels on a $a_n = k$, c'est l'union d'une infinité dénombrable d'intervalles de rang n . Nous trouverons au numéro 6 une formule asymptotique pour cette mesure, pour le moment nous allons résoudre ce problème dans une première approximation.

Soit $E\binom{n_1\ ,\ n_2\ ,\ \ldots\ ,\ n_s}{k_1\ ,\ k_2\ ,\ \ldots\ ,\ k_s}$ l'ensemble des points pour lesquels on a

$a_{n_1} = k_1$, $a_{n_2} = k_2$, ... , $a_{n_s} = k_s$ (n_i et k_i entiers et les n_i distincts); c'est une infinité dénombrable d'intervalles ; en particulier $E\binom{1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n}{k_1\ ,\ k_2\ ,\ \ldots\ ,\ k_n}$ est un intervalle J_n caractérisé par les relations

$$a_i = k_i \qquad (i = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n) \qquad .$$

On a la relation évidente

$$(3) \qquad \sum_{k_\ell=1}^{\infty} E\binom{n_1\ ,\ \ldots\ ,\ n_{\ell-1}\ ,\ n_\ell\ ,\ n_{\ell+1}\ ,\ \ldots\ ,\ n_s}{k_1\ ,\ \ldots\ ,\ k_{\ell-1}\ ,\ k_\ell\ ,\ k_{\ell+1}\ ,\ \ldots\ ,\ k_s}$$

$$= E\binom{n_1\ ,\ \ldots\ ,\ n_{\ell-1}\ ,\ n_{\ell+1}\ ,\ \ldots\ ,\ n_s}{k_1\ ,\ \ldots\ ,\ k_{\ell-1}\ ,\ k_{\ell+1}\ ,\ \ldots\ ,\ k_s} \quad .$$

La notation $\mathfrak{M}E$ représente la mesure de l'ensemble E . Cela posé, considérons dans

$$J_n = E\binom{1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n}{k_1\ ,\ k_2\ ,\ \ldots\ ,\ k_n}$$

l'intervalle

$$J_{n+1}^{(s)} = E\binom{1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n\ ,\ n+1}{k_1\ ,\ k_2\ ,\ \ldots\ ,\ k_n\ ,\ s} \quad .$$

Un α de J_n se représente sous la forme $\alpha = \dfrac{p_n\, r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n\, r_{n+1} + q_{n-1}}$, et parmi eux, ceux qui appartiennent à $J_{n+1}^{(s)}$ sont caractérisés par $s \leqslant r_{n+1} < s + 1$ ce qui nous montre en particulier que les points $\dfrac{p_n\, s + p_{n-1}}{q_n\, s + q_{n-1}}$ et $\dfrac{p_n(s+1) + p_{n-1}}{q_n(s+1) + q_{n-1}}$ sont les extrémités de l'intervalle $J_{n+1}^{(s)}$. Donc

$$\mathfrak{M}J_n = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n})}$$

$$\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} = \left|\frac{p_n\, s + p_{n-1}}{q_n\, s + q_{n-1}} - \frac{p_n(s+1) + p_{n-1}}{q_n(s+1) + q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n^2\, s^2 (1 + \frac{q_{n-1}}{sq_n})(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{sq_n})}$$

$$\frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n} = \frac{1}{s^2} \times \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{(1 + \frac{q_{n-1}}{sq_n})(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{sq_n})} \ .$$

Comme

$$1 + \frac{q_{n-1}}{q_n} < 2 \ , \qquad 1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{sq_n} < 3 \ , \qquad \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{1 + \frac{q_{n-1}}{sq_n}} \geqslant 1 \ ,$$

on a

$$\frac{1}{3s^2} < \frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n} < \frac{2}{s^2} \tag{4}$$

ou bien

$$\frac{\mathfrak{M}J_n}{3s^2} < \mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} < \frac{2\mathfrak{M}J_n}{s^2} \ ;$$

une sommation sur tous les intervalles J_n entraîne

$$\frac{1}{3s^2} < \mathfrak{M}E\binom{n+1}{s} < \frac{2}{s^2} \ ; \tag{5}$$

cette approximation qui est, bien sûr, très grossière a ceci d'intéressant que ses deux bornes ne dépendent que de s et non pas de n.

3. Applications.

THÉORÈME 1 (BOREL [2]). - L'ensemble des nombres de l'intervalle $(0\ ,\ 1)$, dont les éléments (ou quotients incomplets) sont bornés, est de mesure nulle.

J'appelle E_M l'ensemble des nombres dont les éléments sont bornés par M, J_n un intervalle quelconque de rang n dont les points vérifient les relations

(6) $$a_i < M \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et $J_{n+1}^{(k)}$ l'intervalle de rang $n + 1$ de J_n pour lequel on a de plus $a_{n+1} = k$.

D'après (4), on a

$$\mathfrak{M} J_{n+1}^{(k)} > \frac{1}{3k^2} \mathfrak{M} J_n$$

$$\mathfrak{M} \sum_{k \geq M} J_{n+1}^{(k)} > \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{k \geq M} \frac{1}{k^2} > \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(M+i)^2} > \frac{1}{3} MJ_n \int_{M+1}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{3(M+1)} \mathfrak{M} J_n .$$

Comme $\sum_{k=1}^{\infty} J_{n+1}^{(k)} = J_n$,

(7) $$\mathfrak{M} \sum_{k<M} J_{n+1}^{(k)} < \left(1 - \frac{1}{3(M+1)}\right) \mathfrak{M} J_n = \beta \mathfrak{M} J_n$$

où $\beta = 1 - \frac{1}{3(M+1)} < 1$.

Soit $E_M^{(n)}$ l'ensemble des nombres de $(0, 1)$ caractérisés par (6). Comme on a $E_M^{(n+1)} \subset E_M^{(n)}$ l'inégalité (7) entraîne

$$\mathfrak{M} E_M^{(n+1)} < \beta \mathfrak{M} E_M^{(n)} < \beta^2 E_M^{(n-1)} < \ldots < \beta^n \mathfrak{M} E_M^{(1)} .$$

Si $n \to \infty$, on a $\mathfrak{M} E_M^{(n)} \to 0$, mais $E_M \subset E_M^{(n)}$, $\forall n$, donc $\mathfrak{M} E_M = 0$. Mais l'ensemble E du théorème est $\bigcup_M E_M$, donc $\mathfrak{M} E = 0$.

THÉORÈME 2 (BOREL et F. BERNSTEIN) [2], [1], chapitre 5. - Soit $\varphi(n)$ une fonction positive de la variable entière n, alors, si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ est divergente, la relation

(8) $$a_n = a_n(\alpha) \geq \varphi(n)$$

est vérifiée pour presque tous les nombres α une infinité de fois. Réciproquement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ est convergente, l'inégalité (8), pour presque tous les α, n'est vérifiée qu'un nombre fini de fois au plus.

Remarque préliminaire. - Si on pose $\varphi(n) = M = \text{Cte}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M} = \infty$, et on retrouve que l'ensemble E_M du théorème 1 est de mesure nulle.

Soit J_{m+n} un intervalle de rang $m + n$ dont les points vérifient les relations

(9) $$a_{m+i} < \varphi(m + i) \qquad (i = 1 , 2 , \dots , n)$$

(nous n'imposons aucune condition à $a_1 , a_2 , \dots , a_m$).

Alors comme pour le théorème 1, on trouve l'inégalité

$$\mathfrak{M} \sum_{k<\varphi(m+n+1)} J^{(k)}_{m+n+1} < [1 - \frac{1}{3(1 + \varphi(m + n +1))}] \mathfrak{M} J_{m+n} \quad .$$

Soit $E_{m,n}$ l'ensemble des nombres de $(0 , 1)$ qui vérifient (9), alors une sommation sur tous les intervalles de rang $m + n$ vérifiant (9) entraîne

$$\mathfrak{M} E_{m,n+1} < \{ 1 - \frac{1}{3(1 + \varphi(m + n +1))}\} \mathfrak{M} E_{m,n}$$

et l'application successive de cette inégalité entraîne,

$$\mathfrak{M} E_{m,n} < \mathfrak{M} E_{m,1} \prod_{i=2}^{n} \{1 - \frac{1}{3(1 + \varphi(m + i))}\} \quad .$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = \infty$, il en est de même pour $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{3(1 + \varphi(m + i))}$, donc si $n \to \infty$,

$$\prod_{i=2}^{n} (1 - \frac{1}{3(1 + \varphi(m + i))}\} \to 0$$

donc

$$\mathfrak{M} E_{m,n} \to 0 \text{ si } n \to \infty \quad .$$

Les nombres pour lesquels $a_{m+i} < \varphi(m + i)$, $\forall$ i , appartiennent à $E_{m,n}$, $\forall$ n , donc l'ensemble E_M de ces nombres est de mesure nulle. Soit enfin $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$, on a $\mathfrak{M} E = 0$. Mais tout nombre, pour lequel (8) n'est vrai qu'un nombre fini de fois, appartient à un E_M pour m assez grand, donc la première partie est démontrée.

Supposons maintenant la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} < \infty$, on a, avec les notations précédentes, d'après (4)

$$\mathfrak{M}J_{n+1}^{(k)} < \frac{2}{k^2}\,\mathfrak{M}J_n$$

donc

$$\mathfrak{M}\sum_{k\geqslant\varphi(n+1)} J_{n+1}^{(k)} < 2\mathfrak{M}J_n \sum_{k\geqslant\varphi(n+1)} \frac{1}{k^2} \leqslant 2\mathfrak{M}J_n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\{\varphi(n+1)+i\}^2}$$

$$< 2\mathfrak{M}J_n\left\{\frac{1}{\varphi(n+1)} + \int_{\varphi(n+1)}^{\infty}\frac{du}{u^2}\right\} = \frac{4\mathfrak{M}J_n}{\varphi(n+1)} \quad .$$

Si F_n est l'ensemble des nombres de $(0\ ,\ 1)$ pour lesquels $a_n \geqslant \varphi(n)$, une sommation de la dernière inégalité sur tous les J_n entraîne $\mathfrak{M}F_{n+1} < \frac{4}{\varphi(n+1)}$, et ceci montre que les mesures des ensembles F_1 , F_2 , ... forment une série convergente. Si F est l'ensemble des nombres de $(0\ ,\ 1)$ qui appartiennent à une infinité d'ensembles F_n , on a $\mathfrak{M}F = 0$, mais F est l'ensemble des nombres pour lesquels (8) est vérifiée une infinité de fois, et la seconde partie du théorème est démontrée.

4. Estimation métrique de la croissance des dénominateurs des fractions convergentes.

THÉORÈME 3 (KHINČIN [8]). - Il existe une constante absolue B telle que, pour n assez grand, on a presque partout

$$q_n = q_n(\alpha) < \exp Bn \quad ,$$

Remarque préliminaire. - On sait que $q_n \geqslant 2^{(n-1)/2}$, donc il existe une constante a telle que $a < \sqrt[n]{q_n}$ et, d'après le théorème 3, on a, pour n assez grand, $\sqrt[n]{q_n} < A$ (A une constante), donc on a presque partout

$$a < \sqrt[n]{q_n} < A \quad .$$

En effet il existe un théorème beaucoup plus précis (KHINČIN [11]) d'après lequel il existe une constante γ telle que, pour presque tous les α ,

$$\sqrt[n]{q_n} \to \gamma \qquad (n\to\infty) \quad ;$$

mais la démonstration de ce théorème est très longue et très difficile.

Soit $E_n(g)$ $(n > 0\ ,\ g \geqslant 1)$ l'ensemble des nombres de $(0\ ,\ 1)$ pour lesquels on a $a_1\ a_2 \dots a_n \geqslant g$ (c'est un système d'intervalles J_n), l'inégalité $q_n > a_n\ q_{n-1} \implies q_n > a_n\ a_{n-1} \dots a_2\ a_1$, donc on a, pour la longueur de l'un de ces intervalles :

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2} < \frac{1}{(a_n\ a_{n-1} \dots a_2\ a_1)^2}$$

donc

$$\mathfrak{m}E_n(g) < \sum_{a_1 a_2 \dots a_n \geqslant g} \frac{1}{a_n^2\ a_{n-1}^2 \dots a_2^2\ a_1^2} \qquad (10)$$

Pour estimer cette somme remarquons qu'on a

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \frac{1}{a_i(a_i + 1)} \leqslant 2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(a_i + 1)}$$

$$= 2^n \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_i+1} \frac{dx_i}{x_i^2} = 2^n \int_{a_1}^{a_1+1} \int_{a_2}^{a_2+1} \dots \int_{a_n}^{a_n+1} \frac{dx_1 \dots dx_n}{x_1^2 \dots x_n^2}$$

donc

$$\sum_{a_1 a_2 \dots a_n \geqslant g} \left\{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}\right\} \leqslant 2^n\ J_n(g)$$

où $J_n(g)$ est l'intégrale n-uple $\iint \dots \int \dfrac{dx_1 \dots dx_n}{x_1^2 \dots x_n^2}$ sur le domaine

$$x_1 \geqslant 1 \quad (i = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n)\ , \qquad x_1\ x_2 \dots x_n \geqslant g \quad .$$

Pour $g \leqslant 1$, ce domaine est $1 \leqslant x_i < \infty$ $(i = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n)$ et

$$J_n(g) = \left\{\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}\right\}^n = 1 \qquad (g \leqslant 1) \quad .$$

Pour $g > 1$, on montre assez facilement par récurrence que

$$J_n(g) = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\log g)^i}{i!}$$

donc

$$\mathbb{M}E_n(g) < \frac{2^n}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\log g)^i}{i!} \quad .$$

Posons maintenant $g = \exp An$ ($A > 1$ constante)

$$\mathbb{M}E_n(\exp An) < \exp n(\log 2 - A) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(An)^i}{i!} \quad .$$

En remarquant que chaque terme de la somme est plus petit que $\frac{(An)^n}{n!}$ et en utilisant la formule de Stirling pour l'estimation de $n!$, c_1 et c_2 étant deux constantes absolues positives, on aura :

$$(11)\ \mathbb{M}E_n(\exp An) < \exp n(\log 2 - A)\ n\frac{(An)^n}{n!} < c_1 \exp n(\log 2 - A) \frac{n(An)^n}{n^n \exp(-n)\sqrt{n}}$$

$$< c_2 \sqrt{n} \exp(-n(A - \log 2 - \log A - 1)) \quad ;$$

choisissons A assez grand pour que $A - \log 2 - \log A - 1 > 0$, alors (11) entraîne : $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}E_n(\exp An)$ est convergente, c'est-à-dire tout nombre de $(0, 1)$ est, sauf pour un ensemble de mesure nulle, au plus, l'élément d'un nombre fini d'ensembles $E_n(\exp An)$. Cela signifie que, pour presque tous les nombres de l'intervalle $(0, 1)$, on a, pour n suffisamment grand, $a_1 \dots a_n < \exp An$. Mais

$$q_n < 2a_n q_{n-1} < 2^n a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$$

donc on a presque partout, pour n assez grand,

$$q_n < 2^n \exp An = \exp Bn \qquad (B = A + \log 2) \quad .$$

5. Théorème fondamental de la théorie métrique des approximations.

THÉORÈME 4 (KHINČIN [7]). - Soit $f(x)$ une fonction continue positive de la variable positive x , telle que la fonction $xf(x)$ est non croissante, alors l'inéquation

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{f(q)}{q} \tag{12}$$

possède, pour presque tous les nombres α , une infinité de solutions en nombres entiers p et q $(q > 0)$, quand l'intégrale

$$\int_0^\infty f(x)\, dx \tag{13}$$

est divergente. Réciproquement l'inéquation (12), pour presque tous les α , ne possède qu'un nombre fini de solutions en entiers p et q si l'intégrale (13) est convergente.

Remarque 1. - D'après le théorème 4 par exemple les inéquations

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2 \log q}\ , \qquad |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2 \log q \log \log q}\ , \quad \text{etc.}$$

ont presque partout une infinité de solutions, tandis que réciproquement

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2 \log^{1+\varepsilon} q} \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon > 0$$

n'a presque partout qu'un nombre fini de solutions.

Remarque 2. - Le théorème 4 de Khinčin peut être généralisé, moyennant quelques restrictions sur $f(x)$, aux cas des approximations simultanées et même au cas des approximations simultanées non homogènes ([4], [5], p. 120-132, [9]).

Cas de divergence de (13). - Posons

$$\varphi(x) = \exp Bx\ f(\exp Bx)$$

où B est la constante du théorème 3. On a, en posant $u = \exp Bx$,

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx = \frac{1}{B}\int_{\exp Ba}^{\exp BA} f(u)\,du \quad \Longrightarrow \quad \int_a^A \varphi(x)\,dx \quad \text{pour} \quad A > a > 0$$

et $A \to \infty$ est divergente ; comme $\varphi(x)$ est non croissante, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$ est aussi divergente et, d'après le théorème 2, l'inégalité

$$a_{i+1} \geqslant \frac{1}{\varphi(i)}$$

est vérifiée presque partout pour une infinité de valeurs de i et on a, dans tous les cas de validité de cette inéquation,

$$(14) \qquad |\alpha - \frac{p_i}{q_i}| \leqslant \frac{1}{q_i\, q_{i+1}} \leqslant \frac{1}{a_{i+1}\, q_i^2} \leqslant \frac{\varphi(i)}{q_i^2} \quad ;$$

mais, d'après le théorème 3, on a, pour i suffisamment grand, presque partout $q_i < \exp Bi$, soit $i > \frac{\log q_i}{B}$, donc, pour i assez grand, (14) entraîne

$$|\alpha - \frac{p_i}{q_i}| \leqslant \frac{\varphi(\frac{\log q_i}{B})}{q_i^2} = \frac{f(q_i)}{q_i} \quad .$$

<u>Cas de convergence de (13).</u> - Dans ce cas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge. Appelons E_n l'ensemble des nombres de $(0\ ,\ 1)$ qui, pour k entier choisi, vérifient

$$|\alpha - \frac{k}{n}| < \frac{f(n)}{n} \quad .$$

E_n est une famille d'intervalles de longueurs $\frac{2f(n)}{n}$ centrés aux points $\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots \frac{n-1}{n}$ ainsi que les deux intervalles $(0\ ,\ \frac{f(n)}{n})$ et $(1 - \frac{f(n)}{n}\ ,\ 1)$ donc

$$\mathfrak{M}E_n \leqslant 2f(n)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n$$

est convergente ; ceci signifie que presque tous les α de $(0\ ,\ 1)$ appartiennent, au plus, à un nombre fini d'ensembles E_n, ou bien presque tous les α de $(0 , 1)$, pour q entier >0 assez grand et p entier quelconque, vérifient

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{f(q)}{q} \quad .$$

6. Un problème de Gauss.

Le problème suivant posé par GAUSS dans une lettre à LAPLACE, datée du 30 janvier 1812, est, au point de vue historique, le premier problème de la théorie métrique des fractions continues.

Soient

$$\alpha = [0 ; a_1 , a_2 , \dots , a_n , \dots] \quad ,$$

$$r_n(\alpha) = [a_n ; a_{n+1} , a_{n+2} , \dots] \quad ,$$

$$z_n = r_n - a_n$$

et $\mathfrak{M}_n(x)$ la mesure de l'ensemble des α de $(0 , 1)$ pour lesquels on a $z_n(\alpha) < x$. GAUSS écrit qu'il a pu démontrer

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_n(x) = \frac{\log(1 + x)}{\log 2} \qquad (0 \leqslant x < 1) \quad ,$$

mais dans la même lettre, GAUSS écrit que ses efforts pour trouver une bonne estimation de la différence $\mathfrak{M}_n(x) - \frac{\log(1 + x)}{\log 2}$, pour n assez grand, ont été infructueux. Bien sûr GAUSS ne parlait pas de mesure mais de probabilité, ce qui est évidemment la même chose.

Mais la démonstration de GAUSS ne fut publiée nulle part, et le théorème resta sans démonstration jusqu'en 1928 où le mathématicien russe R. O. KUSMIN trouva une démonstration, ainsi qu'une excellente estimation pour $\mathfrak{M}_n(x) - \frac{\log(1 + x)}{\log 2}$.

On peut remarquer d'abord en utilisant la relation évidente

$$z_n = \frac{1}{a_{n+1} + z_{n+1}} \qquad (1 \leqslant a_{n+1} \quad \text{(entier)} \quad < \infty)$$

que les fonctions $\mathfrak{M}_0(x)$, $\mathfrak{M}_1(x)$, ..., $\mathfrak{M}_n(x)$, ... vérifient l'équation fonctionnelle

(15) $$\mathfrak{M}_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\mathfrak{M}_n(\tfrac{1}{k}) - \mathfrak{M}_n(\tfrac{1}{k+x})\} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ n \geqslant 0) \ .$$

(GAUSS avait déjà signalé que la fonction $\varphi(x) = C \log(1 + x)$ vérifie la relation $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\varphi(\frac{1}{k}) - \varphi(\frac{1}{k+x})\}$.

La dérivation formelle de (15) entraîne

(16) $$\mathfrak{M}'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \mathfrak{M}'_n(\frac{1}{k+x})$$

mais on voit facilement en remarquant que $\mathfrak{M}_0(x) = x$, donc $\mathfrak{M}'_0(x) = 1$ que la série du second membre de (16) est uniformément convergente et qu'elle représente donc une fonction bornée et continue. KUSMIN a utilisé la relation (16) pour démontrer la formule de Gauss.

THÉORÈME 5 (KUSMIN). - Soient $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , $f_n(x)$, ... une suite de fonctions réelles définies sur $(0 , 1)$ et vérifiant la relation

(17) $$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} f_n(\frac{1}{k+x}) \qquad (n \geqslant 0)$$

et telles que, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on ait

$$0 < f_0(x) < M \ , \qquad |f'_0(x)| < \mu$$

on a alors

$$f_n(x) = \frac{a}{1+x} + \theta A \exp(-\lambda\sqrt{n}) \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

où

$$a = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 f_0(z)\, dz \qquad |\theta| < 1$$

λ est une constante absolue > 0 et A une constante > 0 qui ne dépend que de M et de μ .

La démonstration repose sur les quatre lemmes suivants (on trouve la démonstration détaillée de ces lemmes dans [12] et [14], p. 396-406).

LEMME 1. - On a, pour $n \geqslant 0$ quelconque,

$$f_n(x) = \sum^{(n)} f_0\left(\frac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}}\right) \frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2} \tag{18}$$

où $\sum^{(n)}$ signifie que la sommation se fait sur tous les J_n ou, ce qui revient au même, que a_1, a_2, ..., a_n parcourent les entiers de 1 à l'infini.

LEMME 2.

$$|f'_n(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M \tag{19}$$

LEMME 3. - Si $\frac{t}{1 + x} < f_n(x) < \frac{T}{1 + x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, on a aussi

$$\frac{t}{1 + x} < f_{n+1}(x) < \frac{T}{1 + x}.$$

LEMME 4. - $\int_0^1 f_n(z)\, dz = \int_0^1 f_0(z)\, dz$, $\forall$ n.

Démonstration du théorème 5. - $f_0(x)$, étant dérivable, est continue pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, elle admet donc, sur cet intervalle, un minimum > 0 que j'appelle m. La relation $m \leqslant f_0(x) < M$ entraîne

$$\frac{m}{2(1 + x)} < f_0(x) < \frac{2M}{1 + x} \quad \text{ou bien} \quad \frac{g}{1 + x} < f_0(x) < \frac{G}{1 + x}$$

où $g = \frac{m}{2}$; $G = 2M$.

Posons

$$\varphi_n(x) = f_n(x) - \frac{g}{1 + x};$$

la fonction $F(x) = \frac{g}{1 + x}$ vérifie la relation

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{k + x}\right) \frac{1}{(k + x)^2}$$

donc la suite des fonctions $\varphi_0(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... vérifient (17) et par suite vérifient aussi (18) (lemme 1), et on a

$$\varphi_n(x) = \sum^{(n)} \varphi_0(u) \frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2}, \qquad u = \frac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}}$$

mais

$$\varphi_0(u) > 0, \qquad q_n + xq_{n-1} \leqslant q_n + q_{n-1} < 2q_n$$

donc

(20) $$\varphi_n(x) > \frac{1}{2} \sum^{(n)} \varphi_0(u) \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}$$

mais on a aussi

(21) $$\frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_0(z)\, dz = \frac{1}{2} \sum^{(n)} \varphi_0(u') \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}$$

où u' est un point de $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right)$ donc

(22) $$\varphi_n(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_0(z)\, dz > \frac{1}{2} \sum^{(n)} \{ \varphi_0(u) - \varphi_0(u') \} \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}.$$

Comme $|\varphi_0'(u)| \leqslant |f_0'(x)| + g < \mu + g$,

$$|\varphi_0(u) - \varphi_0(u')| < (\mu + g)(u - u') < \frac{\mu + g}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{\mu + g}{q_n^2} < \frac{\mu + g}{2^{n-1}}$$

et (22) entraîne

$$\varphi_n(x) > \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_0(z)\, dz - \frac{\mu + g}{2^n} = \ell - \frac{\mu + g}{2^n}$$

$$\ell = \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_0(z)\, dz > 0$$

donc

$$f_n(x) > \frac{g}{1 + x} + \ell - \frac{\mu + g}{2^n} > \frac{g + \ell - 2^{-n+1}(\mu + g)}{1 + x} = \frac{g_1}{1 + x}.$$

Les mêmes calculs avec les fonctions $\psi_n(x) = \frac{G}{1+x} - f_n(x)$ entraînent

$$f_n(x) < \frac{G - \ell' + 2^{-n+1}(\mu + G)}{1+x} = \frac{G_1}{1+x}$$

$$\ell' = \frac{1}{2}\int_0^1 \psi_0(z)\,dz > 0$$

et pour n assez grand on a

$$g < g_1 < G_1 < G$$

et

$$G_1 - g_1 < G - g - (\ell + \ell') + 2^{-n+2}(\mu + G)$$

mais

$$\ell + \ell' = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{G - g}{1+z}\,dz = (G - g)\,\frac{\log 2}{2}$$

donc

$$G_1 - g_1 < (G - g)\,\delta + 2^{-n+2}(\mu + G)$$

$$\delta = 1 - \frac{\log 2}{2} < 1 \quad .$$

Ainsi on a

$$\frac{g_1}{1+x} < f_n(x) < \frac{G_1}{1+x} \quad \text{avec} \quad |f_n'(x)| < \mu_1 \qquad \text{(lemme 2)} \quad ;$$

on peut donc recommencer avec $f_n(x)$ au lieu de $f_0(x)$, et on trouve

$$\frac{g_2}{1+x} < f_{2n}(x) < \frac{G_2}{1+x}$$

avec

$$\begin{cases} g_1 < g_2 < G_2 < G_1 \\ G_2 - g_2 < \delta(G_1 - g_1) + 2^{-n+2}(\mu_1 + G_1) \end{cases} \quad .$$

Au bout de r opérations on trouve

$$(23)\qquad \begin{cases} g_{r-1} < g_r < G_r < G_{r-1} \\ G_r - g_r < \delta(G_{r-1} - g_{r-1}) + 2^{-n+2}(\mu_{r-1} + G_{r-1}) \end{cases}$$

et on a, pour n assez grand ;

$$\mu_r = \frac{\mu}{2^{rn-3}} + 4M < 5M \qquad \forall \quad r$$

(23) entraîne alors :

$$G_n - g_n < (G - g)\delta^n + 2^{-n+2}\{(\mu + 2M)\delta^{n-1} + 7M\delta^{n-1} + 7M\delta^{n-2} + \ldots + 7M\}$$

donc

$$G_n - g_n < B \exp(-\lambda n)$$

$\lambda > 0$ constante absolue et $B > 0$ ne dépendant que de M et μ donc

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} g_n = a$$

et on a

$$(24)\qquad |f_{n^2}(x) - \frac{a}{1 + x}| < B \exp(-\lambda n)$$

donc

$$\int_0^1 f_{n^2}(z)\, dz \to a \log 2 \qquad (n \to \infty)$$

et

$$a = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 f_0(z)\, dz \qquad \text{(lemme 4)} \qquad .$$

Soit maintenant $n^2 < N < (n + 1)^2$, (24) entraîne

$$\frac{a - 2B\exp(-\lambda n)}{1 + x} < f_{n^2}(x) < \frac{a + 2B\exp(-\lambda n)}{1 + x}$$

donc

$$\frac{a - 2B\exp(-\lambda n)}{1 + x} < f_N(x) < \frac{a + 2B\exp(-\lambda n)}{1 + x} \qquad \text{(lemme 3)}$$

donc

$$\left|f_N(x) - \frac{a}{1 + x}\right| < 2B\exp(-\lambda n) = A\exp(-\lambda(n + 1)) < A\exp(-\lambda\sqrt{N}) \quad ,$$

$A = 2B\exp\lambda$. On peut choisir A assez grand pour que cette inégalité soit vraie $\forall\ N > 0$.

Posons en particulier

$$f_n(x) = m'_n(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$f_0(x) \equiv 1$$

et on trouve

(25)
$$\left|m'_n(x) - \frac{1}{(1 + x)\log 2}\right| < A\exp(-\lambda\sqrt{n})$$

donc

$$\left|m_n(x) - \frac{\log(1 + x)}{\log 2}\right| < A\exp(-\lambda\sqrt{n}) \quad .$$

Application. - On peut appliquer ce résultat pour calculer $\mathfrak{M}E\binom{n}{k}$ c'est-à-dire la mesure de l'ensemble des nombres pour lesquels $a_n = k$, on a alors

$$\frac{1}{k + 1} < z_{n-1} \leqslant \frac{1}{k}$$

donc

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k} = m_{n-1}\left(\frac{1}{k}\right) - m_{n-1}\left(\frac{1}{k + 1}\right) = \int_{1/(k+1)}^{1/k} m'_{n-1}(x)\,dx$$

(25) entraîne donc

$$(26) \qquad \left| \mathfrak{M}\binom{n}{k} - \frac{\log\{1 + \frac{1}{k(k+2)}\}}{\log 2} \right| < \frac{A}{k(k+1)} \exp(-\lambda\sqrt{n-1})$$

donc

$$\mathfrak{M}\binom{n}{k} \to \frac{\log\{1 + \frac{1}{k(k+2)}\}}{\log 2} \quad (n \to \infty) \quad .$$

Généralisation.

THÉORÈME 6 (KHINČIN [10]). – Étant donnés les entiers > 0 :

$$n_1 < n_2 < \dots < n_t < n_{t+1} \quad \text{et} \quad r_1 , r_2 , \dots , r_t , r$$

quelconques, il existe deux constantes absolues > 0 , A et λ telles que

$$\left| \frac{\mathfrak{M}\begin{pmatrix} n_1 , n_2 , \dots , n_t , n_{t+1} \\ r_1 , r_2 , \dots , r_t , r_{t+1} \end{pmatrix}}{\mathfrak{M}\begin{pmatrix} n_1 , n_2 , \dots , n_t \\ r_1 , r_2 , \dots , r_t \end{pmatrix}} - \frac{\log\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\}}{\log 2} \right|$$

$$< \frac{A}{r(r+1)} \exp(-\lambda\sqrt{n_{t+1} - n_t - 1}) \quad .$$

Soit un J_k fixe défini par les relations

$$a_1 = r_1 , \quad a_2 = r_2 , \dots , a_k = r_k$$

et soit $M_n(x)$ la mesure des nombres de J_k qui vérifient en outre la relation $z_{k+n} < x$ on a

$$\frac{1}{r+x} < z_{k+n-1} \leqslant \frac{1}{r} \qquad (r \text{ entier arbitraire}) \quad .$$

Ceci entraîne

$$M_n(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \{M_{n-1}(\tfrac{1}{r}) - M_{n-1}(\tfrac{1}{r+x})\} \qquad (n \geqslant 1 , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1)$$

donc les fonctions $M'_0(x)$, $M'_1(x)$, ... , $M'_n(x)$ vérifient (17).

Soit α un nombre de J_k , on a

$$\alpha = \frac{p_k\, r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k\, r_{k+1} + q_{k-1}} = \frac{p_k + z_k\, p_{k-1}}{q_k + z_k\, q_{k-1}}$$

donc, pour $z_k < x$, α varie entre $\frac{p_k}{q_k}$ et $\frac{p_k + xp_{k-1}}{q_k + xq_{k-1}}$, ce qui entraîne

$$M_0(x) = \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + xp_{k-1}}{q_k + xq_{k-1}}\right| = \frac{x}{q_k(q_k + xq_{k-1})} \tag{27}$$

Posons

$$M_n(x) = \mathfrak{M}\mathrm{E}\begin{pmatrix}1 , 2 , \ldots , k \\ r_1 , r_2 , \ldots , r_k\end{pmatrix} \eta_n(x) \qquad (n \geqslant 0 , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1)$$

mais

$$\mathfrak{M}\mathrm{E}\begin{pmatrix}1 , 2 , \ldots , k \\ r_1 , r_2 , \ldots , r_k\end{pmatrix} = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})} = \mathrm{Cte}$$

donc les fonctions $\eta_n'(x)$ vérifient aussi (17) et on a

$$\eta_0(x) = \frac{(q_k + q_{k-1})x}{q_k + q_{k-1}\, x} \qquad \eta_0'(x) = \frac{q_k(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1}\, x)^2}$$

$$\eta_0''(x) = \frac{-2q_k\, q_{k-1}(q_k + q_{k-1})}{(q_k + xq_{k-1})^3}$$

donc

$$\frac{1}{2} < \eta_0'(x) < 2 \qquad |\eta_0''(x)| < 4$$

ce qui montre que les conditions du théorème 5 sont vérifiées. On peut donc trouver deux constantes absolues A et λ telles que

$$\eta_n'(x) = \frac{M_n'(x)}{\mathfrak{M}\mathrm{E}\begin{pmatrix}1 , 2 , \ldots , k \\ r_1 , r_2 , \ldots , r_k\end{pmatrix}} = \frac{1}{(1 + x)\log 2} + \theta A \exp(-\lambda\sqrt{n}) \qquad |\theta| < 1 .$$

r étant un entier naturel quelconque, une intégration entre les limites $\frac{1}{r+1}$ et $\frac{1}{r}$ entraîne

$$\frac{M_n(\frac{1}{r}) - M_n(\frac{1}{r+1})}{\mathbb{M}\mathbb{E}\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots, & k\\ r_1, & r_2, & \dots, & r_k\end{pmatrix}} = \frac{\log\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\}}{\log 2} + \frac{\theta' A}{r(r+1)} \exp(-\lambda\sqrt{n}) , \quad |\theta'| < 1 ;$$

mais

$$M_n(\tfrac{1}{r}) - M_n(\tfrac{1}{r+1}) = \mathbb{M}\mathbb{E}\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots, & k, & k+n+1\\ r_1, & r_2, & \dots, & r_k, & r\end{pmatrix}$$

donc

$$\mathbb{M}\mathbb{E}\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots, & k, & k+n+1\\ r_1, & r_2, & \dots, & r_k, & r\end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\log\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\}}{\log 2} + \frac{\theta' A \exp(-\lambda\sqrt{n})}{r(r+1)}\right) \mathbb{M}\mathbb{E}\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots, & k\\ r_1, & r_2, & \dots, & r_k\end{pmatrix} .$$

En faisant une sommation des deux membres entre les limites 1 et ∞ sur un certain (arbitraire) des nombres $r_1 , r_2 , \dots , r_k$ on fait disparaître les indices correspondants, tandis que les éléments essentiels de la relation ne changent pas et on trouve le résultat cherché.

7. Valeurs moyennes.

THÉORÈME 7 (KHINČIN [10]). - Soit $f(r)$ une fonction non négative de l'entier naturel r , telle qu'on puisse trouver deux constantes positives C et δ vérifiant

$$f(r) < Cr^{(1/2)-\delta} ,$$

alors pour tous les nombres de $(0 , 1)$, à l'exception, au plus, d'un ensemble de mesure nulle on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_k) = \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\log\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\}}{\log 2} . \tag{28}$$

Posons

$$\int_0^1 f(a_k)\, d\alpha = u_k , \qquad \int_0^1 \{f(a_k) - u_k\}^2\, d\alpha = b_k$$

$$\int_0^1 \{f(a_i) - u_i\}\{f(a_k) - u_k\}\, d\alpha = g_{ik} \,, \qquad \sum_{k=1}^{n} \{f(a_k) - u_k\} = s_n(\alpha) \qquad ;$$

on a

$$\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\, d\alpha = \sum_{r=1}^{\infty} \{f(r)\}^2\, \mathfrak{M}E\binom{k}{r} < 2C^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^{1-2\delta}}{r^2} = C_1 \qquad \text{(d'après (5))}$$

$$b_k = \int_0^1 \{f(a_k)\}^2\, d\alpha - u_k^2 < C_1$$

et l'inégalité de Schwartz entraîne

$$(29) \qquad u_k = \int_0^1 f(a_k)\, d\alpha < \sqrt{\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\, d\alpha} < \sqrt{C_1}$$

et pour $k > i$:

$$(30) \quad g_{ik} = \int_0^1 f(a_i)\, f(a_k)\, d\alpha - u_i\, u_k = \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)\, f(s)\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\,;\,\binom{k}{s} - u_i\, u_k \qquad .$$

D'après le théorème 6 et la relation (5) on a

$$(31) \qquad \left| \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\,;\,\binom{k}{s} - \frac{\log\{1 + \frac{1}{s(s+2)}\}}{\log 2}\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r} \right| < \frac{A\, \exp(-\lambda\sqrt{k-i-1})}{s(s+1)}\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}$$

$$< 3A\, \exp(-\lambda\sqrt{k-i-1})\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s}$$

et

$$(32) \quad \left| \mathfrak{M}E\binom{k}{s} - \frac{\log\{1 + \frac{1}{s(s+2)}\}}{\log 2} \right| < \frac{A\, \exp(-\lambda\sqrt{k-1})}{s(s+1)} < 3A\, \exp(-\lambda\sqrt{k-1})\ \ \mathfrak{M}E\binom{k}{s} \quad ;$$

multiplions les deux membres de (32) par $\mathfrak{M}\binom{i}{r}$ et comparons avec (31) on trouve

$$\left| \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\,;\,\binom{k}{s} - \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s} \right| < 6A\, \exp(-\lambda\sqrt{k-i-1})\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s} \qquad ;$$

alors (30) entraîne

$$|g_{ik} - \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)\ f(s)\ \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\ \mathfrak{M}E\binom{k}{s} + u_i\ u_k|$$

$$< 6A\ \exp(-\lambda\sqrt{k-i-1}) \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)\ f(s)\ \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\ \mathfrak{M}E\binom{k}{s} \ .$$

En remarquant que

$$\sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)\ f(s)\ \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\ \mathfrak{M}E\binom{k}{s} = u_i\ u_k$$

la relation (29) entraîne

(33) $$|g_{ik}| < 6A\ \exp(-\lambda\sqrt{k-i-1})\ u_i\ u_k < 6AC_1\ \exp(-\lambda\sqrt{k-i-1}) \quad ;$$

(29) et (33) entraînent pour $n > m > 0$,

(34) $$\int_0^1 (s_n - s_m)^2\ d\alpha = \int_0^1 \{\sum_{k=m+1}^{n} (f(a_k) - u_k)\}^2\ d\alpha = \sum_{k=m+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_k - u_k\}^2\ d\alpha$$

$$+ 2 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_i - u_i)\}\{f(a_k - u_k)\}\ d\alpha = \sum_{k=m+1}^{n} b_k + 2 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} g_{ik}$$

$$< C_1(n-m) + 12AC_1 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} \exp(-\lambda\sqrt{k-i-1}) < C_2(n-m) \ .$$

Soit e_n l'ensemble des nombres de $(0\ ,\ 1)$ vérifiant $|s_n| \geqslant \varepsilon n$, $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$\int_0^1 s_n^2\ d\alpha \geqslant \int_{e_n} s_n^2\ d\alpha \geqslant \varepsilon^2\ n^2\ \mathfrak{M}e_n$$

et (34) entraîne, pour $m = 0$,

$$\mathfrak{M}e_n \quad \frac{\int_0^1 s_n^2\ d\alpha}{\varepsilon^2\ n^2} < \frac{C_2}{\varepsilon^2\ n}$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}e_{n^2}$ est convergente c'est-à-dire presque tous les nombres de $(0\ ,\ 1)$ appartiennent, au plus, à un nombre fini d'ensembles e_{n^2} $(n = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots)$, autrement dit, pour n assez grand, on a, pour presque tous les nombres de $(0\ ,\ 1)$

$$\frac{s_{n^2}}{n^2} < \varepsilon$$

donc

(35) $$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n^2}}{n^2} = 0 \quad .$$

D'ailleurs (34) entraîne, pour $n^2 \leqslant N < (n+1)^2$;

(36) $$\int_0^1 (S_N - s_{n^2})^2\, d\alpha < C_2 (N - n^2) < C_2 (2n+1) \leqslant 3C_2\, n \quad .$$

Soit $e_{n,N}$ l'ensemble des nombres de $(0\ ,\ 1)$ pour lesquels $|S_N - s_{n^2}| \geqslant \varepsilon n^2$ et soit

$$\sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} e_{n,N} = E_n \quad ;$$

on a, pour $n^2 \leqslant N < (n+1)^2$,

$$\int_0^1 (S_N - s_{n^2})\, d\alpha \geqslant \int_{e_{n,N}} (S_N - s_{n^2})^2\, d\alpha > \varepsilon^2\, n^4\, \mathfrak{M} e_{n,N}$$

donc

$$\mathfrak{M} e_{n,N} < \frac{3C_2}{\varepsilon^2\, n^3} \qquad \text{(d'après (36))}$$

et

$$\mathfrak{M} E_N \leqslant \sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} \mathfrak{M} e_{n,N} < \frac{3C_2 (2n+1)}{\varepsilon^2\, n^3} \leqslant \frac{9C_2}{\varepsilon^2\, n^2} \quad ;$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n$ est convergente c'est-à-dire presque tous les nombres de $(0\ ,\ 1)$ appartiennent, au plus, à un nombre fini d'ensembles E_n, donc, au plus, à un nombre fini d'ensembles $e_{n,N}$, donc, pour presque tous ces nombres, on a, pour n assez grand et $n^2 \leqslant N < (n+1)^2$,

$$|S_N - s_{n^2}| < \varepsilon n^2 \quad \text{ou bien} \quad \left|\frac{S_N - s_{n^2}}{n^2}\right| < \varepsilon$$

donc

$$\frac{s_N}{n^2} - \frac{s_{n^2}}{n^2} \to 0\ [n \to \infty,\ \ n^2 \leqslant N < (n+1)^2]$$

et (35) entraîne

$$\frac{s_N}{n^2} \to 0\ [n \to \infty,\ \ n^2 \leqslant N < (n+1)^2]$$

donc

$$\frac{s_N}{N} \to 0 \qquad (N \to \infty) \qquad ;$$

on a donc presque partout :

$$\text{(37)} \qquad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k \to 0 \qquad (N \to \infty) \qquad ;$$

mais

$$\left| u_k - \sum_{r=1}^{\infty} f(r)\, \frac{\log\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\}}{\log 2} \right| = \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \left| \mathfrak{M}E\binom{k}{r} - \frac{\log(1 + \frac{1}{r(r+2)})}{\log 2} \right|$$

$$< A \exp(-\lambda\sqrt{k-1}) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(r)}{r(r+1)} < A_1 \exp(-\lambda\sqrt{k}) \qquad \text{(d'après (26))}$$

où $A_1 > 0$ est une constante, donc

$$u_k \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r)\, \frac{\log\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\}}{\log 2} \quad \text{pour} \quad (k \to \infty)$$

et

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r)\,\frac{\log\{1+\frac{1}{r(r+2)}\}}{\log 2} \qquad (N\to\infty)$$

et d'après (37) on a presque partout :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k) \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r)\,\frac{\log\{1+\frac{1}{r(r+2)}\}}{\log 2} \qquad (N\to\infty) \qquad .$$

Applications.

1° Posons

$$\left.\begin{array}{ll} f(r) = 1 & r = k \\ f(r) = 0 & r \neq k \end{array}\right\} \qquad k \text{ entier } > 0 \text{ quelconque}$$

$f(r)$ vérifie les conditions du théorème 7.

Alors

$$\psi_n(k) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

représente le nombre de fois où k apparaît entre les n premiers éléments de la fraction continue et

$$\frac{\psi_n(k)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

représente d'une certaine manière la densité du nombre k parmi les n premiers éléments et enfin

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_n(k)}{n} = d(k)$$

qui existe d'après le théorème 7 représente la densité du nombre k parmi l'ensemble des éléments de la fraction continue.

D'après le théorème 7, pour k arbitraire, $d(k)$ existe presque partout et est le même presque partout

$$d(k) = \frac{\log\{1 + \frac{1}{k(k+2)}\}}{\log 2} \quad .$$

2° $f(r) = \log r$ vérifie les conditions du théorème 7, donc

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \log a_i \longrightarrow \sum_{r=1}^{\infty} \log r \frac{\log\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\}}{\log 2} \qquad (n \to \infty)$$

ou bien

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \prod_{r=1}^{\infty} \{1 + \frac{1}{r(r+2)}\}^{(\log r)/(\log 2)} = 2,6, \ldots$$

3° La fonction $f(r) = r$ ne vérifie pas les conditions du théorème 7, donc cette méthode ne permet pas de calculer $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} a_i$; mais comme on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty$$

d'après le théorème 2 pour une infinité de valeurs de n,

$$a_n > n \log n$$

donc a fortiori

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > n \log n$$

donc

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i > \log n$$

donc

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \to \infty \quad \text{pour} \quad n \to \infty \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSTEIN (Felix). - Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem, Math. Annalen, t. 71, 1912, p. 417-439.

[2] BOREL (Emile). - Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Circ. math. Palermo, t. 27, 1909, p. 247-271.

[3] BOREL (Emile). - Leçons sur la théorie de la croissance. - Paris, Gauthier-Villars, 1910 (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions).

[4] CASSELS (J. W. S.). - Some metrical theorems in diophantine approximation, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 46, 1960, p. 209-218.

[5] CASSELS (J.). - An introduction to diophantine approximation. - Cambridge, at the University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 45).

[6] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, 3rd edition. - Oxford, Clarendon Press, 1954.
[Voir en particulier : p. 165-169.]

[7] KHINČIN (A.). - Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der diophantischen Approximation, Math. Annalen, t. 92, 1924, p. 115-125.

[8] KHINČIN (A.). - Bemerkung zur metrischen Theorie der Kettenbrühe, Mat. Sborn., t. 32, 1925, p. 326-329.

[9] KHINČIN (A.). - Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Z., t. 24, 1926, p. 706-714.

[10] KHINČIN (A.). - Metrische Kettenbruchprobleme, Compositio Math., t. 1, 1935, p. 361-382.

[11] KHINČIN (A.). - Zur metrischen Kettenbruchtheorie, Compositio Math., t. 3, 1936, p. 276-285.

[12] KHINČIN (A.). - Kettenbrüche. - Leipzig, B. G. Teubner, 1956.

[13] KOKSMA (J. F.). - Diophantische Approximationen. - Berlin, J. Springer, 1936, (Ergebnisse der Mathematik, 4).
[Voir en particulier : chap. 3, § 5, p. 43-49.]

[14] USPENSKIJ (J. V.). - Introduction to mathematical probability. - New York, London, McGraw-Hill, 1937.