Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

HUBERT DELANGE

Distribution des nombres premiers et fonction $\zeta(s)$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 1 (1959-1960), exp. nº 1, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1959-1960__1__A1_0>

DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS ET FONCTION $\zeta(s)$

par Hubert DELANGE

1. - Il est bien connu depuis Euclide qu'il existe une infinité de nombres premiers. Donc, si l'on désigne par $\varpi(x)$ le nombre des nombres premiers $\leq x$, $\varpi(x)$ tend vers $+\infty$ avec x.

Dès lors se pose le problème d'étudier la croissance de $\varpi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

C'est essentiellement à ce problème que nous nous limiterons ici.

Le résultat fondamental, connu sous le nom de "<u>théorème des nombres premiers</u>", et démontré simultanément et indépendamment l'un de l'autre, en 1896, par HADAMARD et de LA VALLEE POUSSIN, est le suivant :

<u>Quand</u> x <u>tend vers</u> $+\infty$, $\varpi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$.

(Nous verrons d'ailleurs que l'on sait davantage).

HADAMARD et de LA VALLEE POUSSIN utilisent les propriétés de la fonction $\zeta(s)$ dans le domaine complexe. Un bon nombre d'autres démonstrations, utilisant aussi les propriétés de la fonction $\zeta(s)$, ont été données ultérieurement, notamment par LANDAU, HARDY et LITTLEWOOD, WIENER. Pendant plus de 50 ans, on a cru impossible de donner une démonstration ne faisant pas appel à la fonction $\zeta(s)$ et à la théorie des fonctions de variable complexe. Ce n'est qu'en 1948 qu'une telle démonstration a été obtenue par Atle SELBERG, ce qui produisit à l'époque une grosse impression dans le monde mathématique.

A vrai dire, la démonstration "élémentaire" de SELBERG n'est pas particulièrement simple et ne permet pas d'aller aussi loin que les méthodes utilisant $\zeta(s)$. Aussi je n'en parlerai pas davantage.

2. - Par contre, il me paraît intéressant d'indiquer comment on peut démontrer très simplement que $\varpi(x)$ est de l'ordre de $\dfrac{x}{\log x}$, ce qui a été établi pour la première fois par ČEBYŠEV.

2.1. - ČEBYŠEV introduit les fonctions suivantes :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{, avec } p \text{ premier, } k \text{ entier } > 0 \ ; \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas de cette forme ;} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad .$$

On voit aisément que les plus petite et plus grande limites de $\frac{\varpi(x)\log x}{x}$ sont les mêmes que celles de $\frac{\psi(x)}{x}$.

Posons $\ell_1 = \underline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x}$, $\qquad \ell_2 = \underline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{\varpi(x)\log x}{x}$,

$\qquad\quad L_1 = \overline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x}$, $\qquad L_2 = \overline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{\varpi(x)\log x}{x}$,

Observons d'abord que, dans l'expression de $\psi(x)$, apparaissent les logarithmes des nombres premiers $\leq x$, le logarithme de p apparaissant autant de fois qu'il y a de puissances de $p \leq x$, soit $E\left[\frac{\log x}{\log p}\right]$ fois [1].

Donc $\psi(x) = \sum_{p \leq x} E\left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p \leq \sum_{p \leq x} \log x = \varpi(x) \log x$. [2]

Par suite, $\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\varpi(x)\log x}{x}$, ce qui donne

$$\ell_1 \leq \ell_2 \qquad \text{et} \qquad L_1 \leq L_2 \quad .$$

Maintenant, soit α satisfaisant à $0 < \alpha < 1$.

Pour $x > 1$, on a

$$\psi(x) \geq \sum_{x^\alpha \leq p < x} \log p \geq [\varpi(x) - \varpi(x^\alpha)] \log x^\alpha \geq [\varpi(x) - x^\alpha] \alpha \log x \quad ,$$

d'ou $\frac{\psi(x)}{x} \geq \alpha \frac{\varpi(x)\log x}{x} - \frac{\alpha \log x}{x^{1-\alpha}}$.

Le second terme du second membre tendant vers 0 pour x infini, ceci entraîne

$$\ell_1 \geq \alpha\, \ell_2 \qquad \text{et} \qquad L_1 \geq \alpha\, L_2$$

En faisant tendre α vers 1 , on obtient $\ell_1 \geq \ell_2$ et $L_1 \geq L_2$.
On a donc $\ell_1 = \ell_2$ et $L_1 = L_2$.

---

(1) Nous désignons par $E[u]$ le plus grand entier $\leq u$.

(2) Nous employons la lettre p comme symbole générique d'un nombre premier.

2.2. - Nous désignerons maintenant par ℓ la valeur commune de ℓ_1 et ℓ_2, et par L la valeur commune de L_1 et L_2.

Dire que $\varpi(x)$ est de l'ordre de $\frac{x}{\log x}$ signifie que l'on a

$$0 < \ell \leq L < +\infty \quad .$$

Nous allons montrer en fait que

$$\log 2 \leq \ell \leq L \leq 2 \log 2 \quad .(^3)$$

2.3. - Posons $T(x) = \sum_{m \leq x}' \log m$.

On voit immédiatement que, pour x infini,

$$T(x) = x \log x - x + O[\log x] \quad .$$

Il suffit par exemple d'additionner les égalités $\log x - \log m = \int_m^x \frac{dt}{t}$, où m prend toutes les valeurs entières $\leq x$. On obtient ainsi

$$E[x] \log x - T(x) = \int_1^x \frac{E[t]}{t}\, dt = x - 1 - \int_1^x \frac{t-E[t]}{t}\, dt \quad ,$$

c'est-à-dire $x \log x + O[\log x] - T(x) = x + O[\log x]$.

Par ailleurs, on voit aisément que $\log m = \sum_{n/m} \Lambda(n)$.(4)

Ceci donne

$$T(x) = \sum_{m \leq x} \sum_{n/m} \Lambda(n) = \sum_{qn \leq x} \Lambda(n) = \sum_{q \leq x} \sum_{n \leq \frac{x}{q}} \Lambda(n) = \sum_{q \leq x} \psi(\tfrac{x}{q}) \quad .$$

On en déduit

$$T(x) - 2T(\tfrac{x}{2}) = \sum_{q \leq x} \psi(\tfrac{x}{q}) - 2\sum_{2q \leq x} \psi(\tfrac{x}{2q}) = \psi(x) - \psi(\tfrac{x}{2}) + \psi(\tfrac{x}{3}) - \psi(\tfrac{x}{4}) + \ldots$$

Comme les termes du second membre sont de valeur absolue non croissante, on a

$$\psi(x) - \psi(\tfrac{x}{2}) \leq T(x) - 2T(\tfrac{x}{2}) \leq \psi(x) \quad .$$

D'après ce qui a été dit plus haut,

$$T(x) - 2T(\tfrac{x}{2}) = x \log 2 + O[\log x] \quad .$$

La deuxième inégalité donne alors $\ell \geq \log 2$.

D'après la première, si ε est un nombre positif quelconque, il existe un $x_0 > 0$ tel que, pour $x \geq x_0$,

$$\psi(x) - \psi(\tfrac{x}{2}) \leq (\log 2 + \varepsilon)\, x \quad .$$

---

(3) ČEBYŠEV a obtenu par sa méthode des bornes plus serrées.

(4) " n/m " signifie, comme il est d'usage, " n divise m ".

Pour $x > x_0$, on a, en désignant par q le plus petit entier n tel que $\frac{x}{2^n} < x_0$,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{j=1}^{q} \left[\psi\left(\frac{x}{2^{j-1}}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^j}\right)\right] + \psi\left(\frac{x}{2^q}\right) , \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{q} (\log 2 + \varepsilon)\, \frac{x}{2^{j-1}} + \psi(x_0) , \\ &< 2(\log 2 + \varepsilon)\, x + \psi(x_0) .\end{aligned}$$

Il en résulte que $L \leqslant 2(\log 2 + \varepsilon)$.

3. Notons en passant que la formule

$$T(x) = \sum_{qn \leqslant x} \Lambda(n) ,$$

écrite plus haut, conduit à d'autres résultats intéressants. Elle donne

$$T(x) = \sum_{n \leqslant x} E\left[\frac{x}{n}\right] \Lambda(n) = x \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O[\psi(x)] = x \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O[x] ,$$

ce qui entraîne $\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O[1]$.

Comme $\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p} + \sum_{\substack{p^k \leqslant x \\ k > 1}} \frac{\log p}{p^k}$, et que la seconde somme du second membre est manifestement bornée par $\sum \frac{\log p}{p(p-1)}$, on voit que

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p} = \log x + O[1] .$$

De là on déduit sans peine

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \log \log x + A + O\left[\frac{1}{\log x}\right] ,$$

A étant une certaine constante.

A partir de là, on peut prouver encore que

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log x} , \quad \gamma \text{ étant la constante d'Euler.}$$

(Mais ici, il faut utiliser la fonction $\zeta(s)$ pour trouver la valeur de la constante).

Ces différentes formules sont dues à MERTENS.

4. - Revenons maintenant au théorème des nombres premiers énoncé au début.

Il résulte de ce qui a été vu plus haut (paragraphe 2.1) qu'il est équivalent à la relation

$$\psi(x) \sim x \quad \text{pour } x \text{ infini.}$$

En fait, dans toutes les démonstrations auxquelles j'ai fait allusion, c'est cette relation que l'on établit d'abord.

J'indiquerai néanmoins une autre relation équivalente au théorème des nombres premiers :

Définissons une fonction $\mu(n)$ (fonction de Möbius) par $\mu(1) = 1$ et, pour $n > 1$,

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^q & \text{si } n \text{ est le produit de } q \text{ facteurs premiers tous différents,} \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas de cette forme.} \end{cases}$$

Soit $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$.

Alors le théorème des nombres premiers est équivalent à

$$M(x) = o[x] \qquad \text{pour } x \text{ infini.}$$

5. - Parlons maintenant de la fonction $\zeta(s)$.

Avant de commencer, je précise une fois pour toutes que, dans toute la suite, je poserai

$$s = \sigma + it \quad .$$

Ceci dit, la série $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, où n^s est pris avec sa valeur principale, est convergente pour $\sigma > 1$, et sa somme est une fonction holomorphe dans ce demi-plan.

Par prolongement, on obtient à partir de cette fonction une fonction analytique, qui est, par définition, $\zeta(s)$.

Nous allons voir que $\zeta(s)$ est une fonction uniforme, qui est holomorphe dans tout le plan, sauf au point 1 , lequel est un pôle simple de résidu 1 .

Auparavant, remarquons que le lien entre la fonction $\zeta(s)$ et les nombres premiers apparaît immédiatement si l'on observe que, pour $\sigma > 1$,

$$\zeta(s) = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \text{ . (Formule déjà considérée par EULER).}$$

D'ailleurs, en prenant la dérivée logarithmique, on obtient

$$- \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad ,$$

ce qui montre le lien avec $\Lambda(n)$, donc avec $\psi(x)$.

On a aussi

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \quad .$$

6. - La méthode la plus simple pour montrer que la somme de la série $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est prolongeable analytiquement dans tout le plan, sauf au point 1 , est sans doute d'appliquer la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin. On obtient ainsi le prolongement dans le demi-plan $\sigma > -m$, moins le point 1 , m étant un entier $\geqslant 0$ quelconque.

Si l'on veut seulement prouver que la fonction est prolongeable dans le demi-plan $\sigma > 0$ - sauf au point 1 -, cela se fait très facilement de la façon suivante :

Si $\sigma > 1$, on a pour chaque $n \leqslant x$

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} = s \int_n^x \frac{du}{u^{s+1}} ,$$

d'où, par addition,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} - \frac{E[x]}{x^s} = s \int_1^x \frac{E[u]}{u^{s+1}} du .$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = s \int_1^{+\infty} \frac{E[u]}{u^{s+1}} du$$

$$= s \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^s} - s \int_1^{+\infty} \frac{u-E[u]}{u^{s+1}} du ,$$

$$= 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{u-E[u]}{u^{s+1}} du .$$

Comme $0 \leqslant u - E[u] < 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{u-E[u]}{u^{s+1}} du$ est convergente pour $\sigma > 0$; et représente une fonction holomorphe dans ce demi-plan.

7. - J'indiquerai ici une autre méthode pour obtenir le prolongement, méthode qui a l'avantage de conduire à l'équation fonctionnelle.

En partant de l'égalité

$$\frac{u^{s-1}}{e^u - 1} = \sum_{1}^{+\infty} u^{s-1} e^{-nu} ,$$

valable pour $u > 0$, et intégrant terme à terme, on trouve que, pour $\sigma > 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = \sum_{1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^{s-1} e^{-nu} du = \sum_{1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} ,$$

d'où
$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}\, du \quad .$$

Considérons maintenant l'expression
$$I(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\, dz \quad ,$$

où z^{s-1} est pris avec sa détermination principale dans le plan coupé suivant le demi-axe réel négatif, et C est le contour formé du bord inférieur de la coupure entre l'infini et le point $-r$, du cercle $|z| = r$ parcouru dans le sens direct du point $-r$ à ce même point, et du bord supérieur de la coupure entre $-r$ et l'infini, le nombre positif r étant $< 2\pi$.

On voit que $I(s)$ est une fonction entière, et que, pour $\sigma > 1$,
$$I(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}\, du \quad .$$

On a donc, pour $\sigma > 1$,
$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi}{\Gamma(s) \sin \pi s} I(s) = \Gamma(1-s)\, I(s) \quad .$$

$\Gamma(1 - s)$ étant une fonction méromorphe dans tout le plan, il en est de même de $\Gamma(1 - s)\, I(s)$.

De plus, les pôles de $\Gamma(1 - s)$ sont les entiers > 0 , qui sont des pôles simples. Mais $I(s) = 0$ pour s entier > 1 , car alors $\frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}$ est une fonction entière. $\Gamma(1 - s)\, I(s)$ a donc pour seul pôle le point $s = 1$, qui est un pôle simple de résidu $I(1) = 1$.

8. - On obtient l'équation fonctionnelle à laquelle satisfait $\zeta(s)$ en remarquant que, pour $\sigma < 0$, $I(s)$ est la limite quand l'entier N tend vers $+\infty$ de
$$I_N(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\, dz \ ,$$

où C_N est le contour formé d'un segment du bord inférieur de la coupure allant du point $-(2N + 1)\pi$ au point $-r$, du cercle $|z| = r$ parcouru dans le sens direct du point $-r$ à ce même point, d'un segment du bord supérieur de la coupure allant du point $-r$ au point $-(2N + 1)\pi$, et du cercle $|z| = (2N + 1)\pi$ parcouru dans le sens rétrograde du point $-(2N + 1)\pi$ à ce même point.

$I_N(s)$ se calcule aisément par la méthode des résidus.

On trouve :

$$I_N(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \sum_1^N \frac{1}{n^{1-s}} .$$

Donc, pour $\sigma < 0$,

$$I(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \zeta(1 - s) \quad ,$$

et par suite

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s \sin \frac{\pi s}{2} \zeta(1 - s)}{\Gamma(s) \sin \pi s} .$$

Par prolongement analytique, ceci est vrai pour tout $s \neq 1$, et on en tire :

$$\zeta(1 - s) = 2(2\pi)^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s) .$$

8.1. - Ceci étant, on introduit la fonction

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s - 1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\tfrac{s}{2}) \zeta(s) .$$

C'est une fonction méromorphe comme produit de fonctions méromorphes.

On voit qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\xi(1 - s) = \xi(s) .\text{[5]}$$

Comme elle n'a pas de pôle dans le demi-plan $\sigma > 0$, elle n'en a aucun et c'est une fonction entière.

Elle ne s'annule pas pour $\sigma > 1$, car l'expression de $\zeta(s)$ sous forme de produit infini montre que $\zeta(s) \neq 0$ dans ce demi-plan, et $\Gamma(\frac{s}{2})$ ne s'annule jamais. Elle ne s'annule donc pas non plus pour $\sigma < 0$. Il ne peut donc y avoir de zéros que dans la bande $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Il y a effectivement une infinité de zéros car, si l'on pose

$$M(r) = \max_{|s|=r} |\xi(s)| \quad ,$$

on voit sans peine que, pour r infini, $\log M(r) \sim \frac{1}{2} r \log r$. Ceci entraîne que $\xi(s)$ est d'ordre 1 . Mais alors, si elle n'avait pas de zéros ou n'en avait qu'un nombre fini, on devrait avoir

$$\log M(r) = O[r] .$$

---

[5] Il faut utiliser ici la formule connue : $\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-1/2} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2})$.

Ces zéros sont d'ailleurs symétriques par rapport à l'axe réel et à la droite $\sigma = \frac{1}{2}$. Ils sont symétriques par rapport à l'axe réel parce que $\xi(s)$ est réelle pour s réel, et par rapport à la droite $\sigma = \frac{1}{2}$ parce qu'ils sont aussi symétriques par rapport au point $\frac{1}{2}$, à cause de l'équation fonctionnelle.

9. - Maintenant, on peut écrire

$$\zeta(s) = h(s)\,\xi(s) \qquad , \text{ avec } \quad h(s) = \frac{2\pi^{s/2}}{s(s-1)\,\Gamma(\frac{s}{2})} = \frac{\pi^{s/2}}{(s-1)\,\Gamma(1+\frac{s}{2})} \quad .$$

Les zéros de $\zeta(s)$ sont ceux de $\xi(s)$ et ceux de $h(s)$.

On voit donc que $\zeta(s)$ <u>a d'une part des zéros simples aux points</u> -2 , -4 , -6 , ... , $-2m$, ... , <u>d'autre part une infinité de zéros situés dans la bande</u> $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, <u>lesquels sont symétriques par rapport à l'axe réel et à la droite</u> $\sigma = \frac{1}{2}$.

10. - On peut d'ailleurs évaluer assez facilement le nombre $N(T)$ des zéros situés dans le rectangle $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$. On trouve que, pour T infini,

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O[\log T] \qquad . \quad \text{(Formule de von MANGOLDT)}$$

11. - RIEMANN a conjecturé que tous les zéros de $\zeta(s)$ dans la bande $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ sont situés sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$. C'est la célèbre "hypothèse de Riemann".

Jusqu'à présent, on ne sait pas si cette hypothèse est vraie ou non.

BOHR et LANDAU ont prouvé que, si $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$, le nombre des zéros situés dans le rectangle $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$ est $o[T]$ quand T tend vers $+\infty$.

HARDY a prouvé qu'il y a une infinité de zéros sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$. Puis HARDY et LITTLEWOOD ont prouvé que le nombre des zéros situés sur le segment $[\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2} + iT]$ est au moins de l'ordre de T quand T tend vers $+\infty$. Enfin Atle SELBERG a montré que ce nombre est de l'ordre de $T\log T$, comme $N(T)$.

Par ailleurs, si l'on range les zéros de la bande $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, par ordre de t croissants, on a pu prouver qu'un grand nombre de termes au début de la suite obtenue sont sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$.

12. - Pour démontrer le théorème des nombres premiers, il suffit de savoir que $\zeta(s)$ <u>n'a aucun zéro sur la droite $\sigma = 1$</u> .

La méthode de démonstration la plus simple à partir de ce fait consiste à utiliser le théorème taubérien de IKEHARA :

Soit $\alpha(u) \geqslant 0$ et non décroissante pour $u \geqslant 0$, et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-su}\,\alpha(u)\,du$ soit convergente pour $\sigma > a > 0$ et égale à $f(s)$.
Si $f(s) - \frac{A}{s-a}$ (ou $A > 0$) est holomorphe sur la droite $\sigma = a$, on a pour u infini :

$$\alpha(u) \sim A e^{au} \quad .$$

Pour $\sigma > 1$, on a

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx \quad .$$

Pour le voir, il suffit par exemple de remarquer que l'on a pour chaque $n \leqslant X$

$$\frac{\Lambda(n)}{n^s} - \frac{\Lambda(n)}{X^s} = s \int_n^X \frac{\Lambda(n)}{x^{s+1}}\,dx \quad ,$$

ce qui donne par addition

$$\sum_{n \leqslant X} \frac{\Lambda(n)}{n^s} - \frac{\psi(X)}{X^s} = s \int_1^X \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx \quad ,$$

puis de faire tendre X vers $+\infty$.

En faisant le changement de variable $x = e^u$, on obtient

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_0^{+\infty} e^{-su}\,\psi(e^u)\,du \quad ,$$

ou

$$\int_0^{+\infty} e^{-su}\,\psi(e^u)\,du = -\frac{1}{s}\cdot\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \quad .$$

$\zeta(s)$ n'ayant pas de zéros sur la droite $\sigma = 1$, la fonction $-\frac{1}{s}\cdot\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ a comme seule singularité sur cette droite un pôle simple de résidu 1 au point 1, provenant du pôle de $\zeta(s)$.

Le théorème de Ikehara donne alors

$$\psi(e^u) \sim e^u \qquad \text{pour } u \text{ infini,}$$

d'où

$$\psi(x) \sim x \qquad \text{pour } x \text{ infini.}$$

13. - L'absence de zéros de $\zeta(s)$ sur la droite $\sigma = 1$ est un résultat équivalent au théorème des nombres premiers, car on peut inversement la déduire de celui-ci.

Considérons en effet la fonction

$$g(s) = -\frac{1}{s}\cdot\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \quad .$$

On a pour $\sigma > 1$

$$g(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{s+1}}\, dx \quad .$$

Mais le théorème des nombres premiers implique que, pour x infini, $\psi(x) - x = o[x]$, et ceci entraîne que, lorsque σ tend vers 1 par valeurs supérieures, avec t fixe, $(\sigma - 1)\, g(s)$ tend vers 0.

En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \geqslant 1$ tel que, pour $x \geqslant x_0$, $|\psi(x) - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} x$. Il en résulte que, pour $\sigma > 1$,

$$|g(s)| \leqslant \int_1^{x_0} \frac{|\psi(x) - x|}{x^2}\, dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\sigma} \quad ,$$

$$\leqslant \int_1^{x_0} \frac{|\psi(x) - x|}{x^2}\, dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\sigma} = K + \frac{\varepsilon}{2(\sigma-1)} \quad .$$

Alors, pour $1 < \sigma \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2K}$,

$$|(\sigma - 1)\, g(s)| \leqslant \varepsilon \quad .$$

Si le point $1 + it_0$ était un zéro de $\zeta(s)$, il serait un pôle simple de $g(s)$ et le produit $(\sigma - 1)\, g(\sigma + it_0)$ tendrait vers le résidu de ce pôle, donc vers une limite non nulle, quand σ tend vers 1 par valeurs supérieures.

14. - On obtient un résultat plus précis que le théorème des nombres premiers en utilisant le fait que $\zeta(s)$ n'a aucun zéro à droite d'une certaine courbe asymptote à la droite $\sigma = 1$ du côté gauche.

C'est ainsi que de LA VALLÉE POUSSIN avait démontré dès 1899 que, pour x infini,

$$\varpi(x) = \mathrm{Li}\, x + O[x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}] \quad (6) \quad ,$$

---

(6) La fonction $\mathrm{Li}\, x$ (logarithme intégral de x) est définie pour $x > 1$ par $\mathrm{Li}\, x = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{du}{\log u}\right]$. On a donc $\mathrm{Li}\, x = \int_2^x \frac{du}{\log u} + \text{constante}$. Pour x infini, $\mathrm{Li}\, x \sim \frac{x}{\log x}$.

α étant une constante positive convenable.

De LA VALLÉE POUSSIN utilise le fait que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\sigma \geqslant 1 - \frac{a}{\log|t|}$, $|t| \geqslant t_0$, où a et t_0 sont des constantes positives convenables.

Il se sert d'une expression de $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ déduite de l'expression de $\zeta(s)$ à l'aide de $\xi(s)$ et du développement de $\xi(s)$ en facteurs primaires de Weierstrass.

La démonstration a été considérablement simplifiée par LANDAU, qui la rend totalement indépendante de la théorie des fonctions entières.

Dans cette nouvelle méthode, le résultat sur les zéros découle de théorèmes simples de théorie des fonctions et de majorations faciles de $|\zeta(s)|$ pour $\sigma > 0$.

Ensuite, comme dans la méthode de de La Vallée Poussin, on utilise la formule d'inversion de la transformation de Mellin pour obtenir une expression sous forme d'intégrale soit de $\psi_1(x) = \int_0^x \psi(u)\,du$, soit de $\Psi(x) = \int_1^x \frac{\psi(u)}{u}\,du$.

En effet, on a vu plus haut que, pour $\sigma > 1$,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx .$$

Par intégration par parties, on obtient

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s(s+1)\int_1^{+\infty} \frac{\psi_1(x)}{x^{s+2}}\,dx = s^2\int_1^{+\infty} \frac{\Psi(x)}{x^{s+1}}\,dx ,$$

d'où

$$\int_1^{+\infty} \frac{\psi_1(x)}{x^{s+2}}\,dx = \frac{-1}{s(s+1)}\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\Psi(x)}{x^{s+1}}\,dx = \frac{-1}{s^2}\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} .$$

En partant par exemple de la première de ces deux formules, on obtient

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\cdot\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds \quad , \quad (c > 1)$$

le signe $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}$ signifiant que l'intégrale est prise sur la droite $\sigma = c$ parcourue dans le sens des t croissants.

On déforme ensuite le chemin d'intégration en remplaçant un segment $[c - iT , c + iT]$, où T varie convenablement en fonction de x, pour un contour allant passer à gauche de la droite $\sigma = 1$ tout en laissant à sa gauche tous les zéros de $\zeta(s)$. La fonction sous le signe $\int$ a ainsi comme seul point singulier entre le segment et le nouveau contour le pôle 1 . On compense donc le changement de chemin d'intégration en ajoutant au second membre le résidu de ce pôle, soit $\frac{x^2}{2}$. L'intérêt de ce décalage du chemin d'intégration vers la gauche vient de ce qu'en diminuant σ on diminue le module de x^{s+1} .

Ayant obtenu une évaluation de $\psi_1(x)$, on passe à $\psi(x)$ en remarquant que, comme ψ est non décroissante, on a pour $h > 0$ et $< x$

$$\frac{\psi_1(x) - \psi_1(x-h)}{h} \leqslant \psi(x) \leqslant \frac{\psi_1(x+h) - \psi_1(x)}{h} \quad ,$$

et choisissant convenablement h en fonction de x .

On passe de $\psi(x)$ à $\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$, en utilisant le fait que

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \theta(x^{1/3}) + \dots + \theta(x^{1/q}) \quad , \text{ où } \quad q = E[\frac{\log x}{\log 2}] \quad ,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \theta(x) + O[\theta(x^{1/2}) \log x] \quad , \\ &= \theta(x) + O[x^{1/2} \log x] \quad , \end{aligned}$$

puisque $\theta(x) \leqslant \psi(x) = O[x]$.

On arrive enfin à l'évaluation de $\varpi(x)$ par la formule

$$\varpi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(u)\, du}{u(\log u)^2} \quad ,$$

que l'on peut obtenir par exemple par addition à partir de

$$1 - \frac{\log p}{\log x} = \log p[\frac{1}{\log p} - \frac{1}{\log x}] = \int_p^x \frac{\log p}{u(\log u)^2}\, du \quad .$$

Si $\theta(x) = x + \eta(x)$, on trouve

$$\begin{aligned} \varpi(x) &= \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{du}{(\log u)^2} + \frac{\eta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\eta(u)}{u(\log u)^2}\, du \quad , \\ &= \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{2}{\log 2} + \frac{\eta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\eta(u)}{u(\log u)^2}\, du \quad , \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \varpi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} \right| \leqslant \frac{2}{\log 2} + \frac{1}{\log 2} \sup_{2 \leqslant u \leqslant x} |\eta(u)| \quad .$$

15. - La méthode de Landau peut être systématisée de la façon suivante :

Supposons établi que

$$|\zeta(s)| \leqslant Me^{\varphi(t)} \qquad \text{pour } 1 - \theta(t) \leqslant \sigma \leqslant 2 \text{ et } t \geqslant t_0 \geqslant 1 \quad , \text{(7)}$$

avec φ continue non-décroissante et θ continue non croissante pour $t \geqslant t_0$, $\varphi(t) > 0$, $0 < \theta(t) \leqslant \frac{1}{2}$,

$$\log \frac{1}{\theta(t)} = O[\varphi(t)] \qquad \text{pour } t \text{ infini,}$$

$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$;

et $\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\theta(\lambda t)}{\theta(t)} = 1$ pour tout $\lambda > 0$.

On en déduit d'abord qu'il existe une constante positive A telle que $\zeta(s)$ n'ait aucun zéro dans la région

$$\sigma \geqslant 1 - A\frac{\theta(t)}{\varphi(t)} \quad , \quad t \geqslant t_0 \quad ,$$

et que, dans cette région, $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O[\frac{\varphi(t)}{\theta(t)}]$.

On démontre ensuite, à partir de là, que pour x infini

$$\varpi(x) = \text{Li } x + O[xe^{-\alpha\,\omega(x)}] \quad ,$$

où α est une constante positive quelconque $< A$ et

$$\omega(x) = \min_{t \geqslant t_0} \left[\frac{\theta(t)}{\varphi(t)} \log x + \log t\right] \quad .$$

Le résultat de La Vallée Poussin s'obtient en prenant

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \quad , \quad \varphi(t) = \frac{1}{2} \log t \quad .$$

16. - On peut obtenir des résultats meilleurs en utilisant la théorie des "sommes trigonométriques".

On appelle ainsi des sommes de la forme

$$\sum_{N}^{N'} e^{if(n)} \quad ,$$

où $f(n)$ est une fonction réelle.

---

(7) Il suffit de considérer les valeurs > 0 de t puisque $\zeta(s)$ prend des valeurs imaginaires conjuguées pour des s imaginaires conjugués.

Il est évident que cette somme est de module au plus égal à $N' - N + 1$, mais si la fonction f satisfait a des conditions de **régularité convenables, on** peut trouver des majorations bien meilleures. Des méthodes pour obtenir de telles majorations ont été élaborées par WEYL, VAN DER CORPUT et VINOGRADOV.

Cette théorie s'introduit de la façon suivante dans le problème qui nous occupe :

En utilisant un calcul fait plus haut (paragraphe 6), on voit que, pour $\sigma > 1$ et $x > 0$,

$$\zeta(s) - \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} = -\frac{E[x]}{x^s} + s\int_x^{+\infty} \frac{E[u]}{u^{s+1}}\,du ,$$

$$= \frac{-E[x]}{x^s} + s\int_x^{+\infty} \frac{du}{u^s} - s\int_x^{+\infty} \frac{u - E[u]}{u^{s+1}}\,du ,$$

$$= \frac{x^{1-s}}{s-1} + \frac{x - E[x]}{x^s} - s\int_x^{+\infty} \frac{u - E[u]}{u^{s+1}}\,du .$$

Comme la dernière intégrale est convergente pour $\sigma > 0$ et représente donc une fonction holomorphe dans ce demi-plan, et que les deux termes qui la précèdent sont holomorphes pour $s \neq 1$, le résultat est valable pour $\sigma > 0$ et $s \neq 1$. Donc, pour $\sigma > 0$, $t \neq 0$ et $x > 0$,

$$\left|\zeta(s) - \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s}\right| \leqslant \frac{x^{1-\sigma}}{|t|} + x^{-\sigma} + \frac{\sigma + |t|}{\sigma} x^{-\sigma} = |t|\, x^{-\sigma}\left[\frac{x}{t^2} + \frac{2}{|t|} + \frac{1}{\sigma}\right] .$$

En particulier, pour $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2$ et $|t| \geqslant 2$ par exemple,

$$\left|\zeta(s) - \sum_{n \leqslant t^2} \frac{1}{n^s}\right| \leqslant 4 ,$$

de sorte que

$$|\zeta(s)| \leqslant \left|\sum_{n \leqslant t^2} \frac{1}{n^s}\right| + 4 .$$

La majoration de $|\zeta(s)|$ pour $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2$ et $|t| \geqslant 2$ se ramène donc à celle de $\left|\sum_{n \leqslant t^2} \frac{1}{n^s}\right|$.

La somme $\sum_{n \leqslant t^2} \frac{1}{n^s}$ peut se décomposer en sommes telles que $\sum_{N_1}^{N_2} \frac{1}{n^s}$.

Comme $\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma} \cdot \frac{1}{n^{it}}$, et que $\frac{1}{n^\sigma}$ est positif et décroît quand n croît, on a

$$\left|\sum_{N_1}^{N_2} \frac{1}{n^s}\right| \leqslant \frac{1}{N_1^{\sigma}} \max_{N_1 \leqslant N \leqslant N_2} \left|\sum_{N_1}^{N} \frac{1}{n^{it}}\right| \quad .$$

On est ainsi ramené finalement à majorer en module des sommes de la forme

$$\sum_{N}^{N'} \frac{1}{n^{it}} = \sum_{N}^{N'} e^{-it \log n} \quad .$$

La méthode de Vinogradov permet ainsi de prouver par exemple que, pour

$$1 - \frac{(\log \log t)^{9/4}}{(\log t)^{3/4}} \leqslant \sigma \leqslant 2 \ , \quad t \geqslant t_0 \ ,$$

$|\zeta(s)| \leqslant e^{c(\log \log t)^3}$, avec $c > 0$ convenable et t_0 convenable $> e$,

d'ou il résulte que, pour x infini,

$$\varpi(x) = \text{Li } x + O\left[x \exp\left(-\alpha \frac{(\log x)^{4/7}}{(\log \log x)^{3/7}}\right)\right] \quad ,$$

où α est une constante positive convenable.

Ceci était le résultat le plus précis obtenu avant 1958. [8]

Le progrès n'est pas considérable par rapport à LA VALLÉE POUSSIN.

17. - On aurait des résultats bien meilleurs si l'on savait que l'hypothèse de Riemann est vraie.

Ceci se déduit aisément de formules donnant des expressions exactes de $\psi_1(x)$, ou de $\psi_0(x) = \frac{1}{2}[\psi(x + 0) + \psi(x - 0)]$, à l'aide des zéros de $\zeta(s)$:

En désignant par $\rho = \beta + i\gamma$ les zéros de $\zeta(s)$ dans la bande $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, on a

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \sum \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - x\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} - \sum_{1}^{+\infty} \frac{x^{1-2j}}{2j(2j-1)}$$

et

$$\psi_0(x) = x - \lim_{T \to +\infty} \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad .$$

---

(8) Au congrès international d'Edimbourg, VINOGRADOV a annoncé une amélioration de sa méthode permettant d'obtenir un résultat un peu plus précis.

La première de ces deux formules se déduit de l'expression de $\psi_1(x)$ sous forme d'intégrale donnée plus haut (paragraphe 14), en déformant encore le chemin d'intégration. On fait cette fois pénétrer ce chemin dans le demi-plan $\sigma < 0$, en passant convenablement entre les zéros de $\zeta(s)$.

La deuxième formule s'établit de façon analogue, et l'on peut en même temps obtenir une majoration de la différence entre la somme $\sum_{|\gamma|\leqslant T} \frac{x^\rho}{\rho}$ et sa limite pour T infini.

Si l'on désigne par Θ la borne supérieure des parties réelles des zéros de $\zeta(s)$ dans la bande $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, la formule donnant $\psi_1(x)$ montre immédiatement que, pour x infini,

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} + O[x^{1+\Theta}] \quad ,$$

car $\sum \frac{1}{|\rho|^2} < +\infty$.

On peut déduire de là, ou bien de la formule donnant $\psi_0(x)$, en tenant compte alors de la majoration à laquelle je viens de faire allusion, que

$$\psi(x) = x + O[x^{\Theta}(\log x)^2] \quad .$$

Ceci entraîne $\varpi(x) = \mathrm{Li}\, x + O[x^{\Theta}\log x]$.

En particulier, si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a

$$\varpi(x) = \mathrm{Li}\, x + O[x^{\frac{1}{2}} \log x] \quad ,$$

comme il avait déjà été démontré par von KOCH en 1901.

18. - Pour terminer, j'indiquerai que l'on a des résultats en sens opposé des précédents, c'est-à-dire qui limitent la précision avec laquelle $\varpi(x)$ est approché par Li x .

Ainsi LITTLEWOOD a démontré en 1914 que, k étant une constante positive convenable, il existe des valeurs de x aussi grandes que l'on veut pour lesquelles

$$\varpi(x) > \mathrm{Li}\, x + k\,\frac{x^{\frac{1}{2}} \log\log\log x}{\log x} \quad ,$$

et d'autres pour lesquelles

$$\varpi(x) < \mathrm{Li}\, x - k\,\frac{x^{\frac{1}{2}} \log\log\log x}{\log x} \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE.

Pour un exposé d'ensemble simple (mais datant de 1932) :

INGHAM (A. E.). - The distribution of prime numbers. - Cambridge, at the University Press, 1932 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 30).

Pour la théorie de la fonction $\zeta(s)$:

TITCHMARSH (E. C.). - The theory of the Riemann Zeta-function. - Oxford, at the Clarendon Press, 1951.

Voir en particulier les chapitres 1, 2, 3, 6, 9, 10.

Pour un exposé détaillé et récent sur la distribution des nombres premiers :

PRACHAR (Karl). - Primzahlverteilung. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 91).

Voir en particulier les chapitres 1, 3 et 8.

Pour la démonstration du théorème des nombres premiers à l'aide du théorème de Ikehara :

WIDDER (David Vernon). - The Laplace transform. - Princeton, Princeton University Press, 1946 (Princeton mathematical Series, 6).

Voir le chapitre V.