Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Doïtchin Doïtchinov

Les espaces topologiques, les espaces de proximité et les espaces uniformes d'un point de vue général

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, nº 2 (1977-1978), exp. nº C4, p. C1-C4

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A9_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 4, 4 p.

LES ESPACES TOPOLOGIQUES, LES ESPACES DE PROXIMITÉ ET LES ESPACES UNIFORMES D'UN POINT DE VUE GÉNÉRAL.

par Doïtchin DOÏTCHINOV

Parmi les notions les plus étroitement liées à la notion d'espace topologique, celle d'espace de proximité et celle d'espace uniforme semblent être les plus connues, sinon les plus importantes. Plusieurs mathématiciens, dont Á. CSÁSZÁR [1], M. HACQUE [4], M. KATĚTOV [6], H. HERRLICH [5], ont donné des constructions englobant ces trois notions dans une théorie unique. Dans l'article [2] (voir aussi [3]), une autre méthode pour parvenir à ce but, différente de celles des auteurs mentionnés ci-dessus, a été proposée. Ici, on rappellera, sous une forme un peu simplifiée, cette méthode. Elle peut être caractérisée par le fait que, d'une part, elle suit de tout près l'axiomatique classique de Hausdorff (qui était d'ailleurs la première) des espaces topologiques et que, d'autre part, elle conserve pour la notion d'uniformité la conception traditionnelle qu'on connait de l'analyse classique.

Commençons par évoquer l'axiomatique de Hausdorff des espaces topologiques sous la forme donnée par BOURBAKI. Comme on le sait, un ensemble X devient un espace topologique quand, à tout point x, on fait correspondre un filtre $\mathcal{U}(x)$ sur X (le filtre des voisinages de x) tel que :

1° Si $x \in X$ et $U \in \mathcal{U}(x)$, alors $x \in U$;

2° Si $x \in X$ et $U \in \mathcal{U}(x)$, alors il existe un $V \in \mathcal{U}(x)$ tel que $U \in \mathcal{U}(y)$, pour chaque $y \in V$.

Soit maintenant X un ensemble quelconque. On désignera par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de X, et par $\mathfrak{I}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X réduits à un seul point. Etant donnée $\mathfrak{M}$, une famille de sous-ensembles de X, telle que $\mathfrak{I}(X) \subset \mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$, on dira qu'une <u>topologie généralisée</u>, ou plus précisément une <u>topologie par rapport à</u> $\mathfrak{M}$, est donnée sur X si à tout $A \in \mathfrak{M}$ correspond un filtre $\mathcal{U}(A)$ sur X (appelons ces éléments des <u>entourages</u> de A) tel que

(G1) Si $A \in \mathfrak{M}$ et $U \in \mathcal{U}(A)$, alors $A \subset U$;

(G2) Si $A \in \mathfrak{M}$ et $U \in \mathcal{U}(A)$, alors il existe un $V \in \mathcal{U}(A)$ pour lequel $U \in \mathcal{U}(B)$, quand $B \in \mathfrak{M}$ et $B \subset V$.

Il est clair que, dans le cas où $\mathfrak{M} = \mathfrak{I}(X)$, la notion d'espace topologique généralisé défini ci-dessus coïncide avec la notion classique d'espace topologique (les entourages de tout point x de X sont dans ce sens les voisinages de x). De plus, compte tenu de l'inclusion $\mathfrak{I}(X) \subset \mathfrak{M}$, toute topologie généralisée sur X induit de manière évidente une topologie ordinaire (c'est-à-dire dans le cas classique) sur X, et elle sera dite un prolongement de cette topologie ordinaire.

Ensuite, si une topologie par rapport à $\mathfrak{M}$ est donnée sur X, et si $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$, alors on dira que A <u>est près de</u> B, quand tout entourage de A rencontre B. La topologie généralisée donnée sera dite <u>symétrique</u> quand la relation de proximité que l'on vient de définir est symétrique, autrement dit quand la condition suivante est vérifiée :

(GS) Si $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ et si $U \cap B = \emptyset$ pour un $U \in \mathcal{U}(A)$, alors il existe un $V \in \mathcal{U}(B)$ tel que $V \cap A = \emptyset$.

Maintenant, on peut voir que la relation de proximité introduite dans un espace topologique généralisé coïncide dans le cas où $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$, et où elle est symétrique avec la relation de proximité traditionnelle d'Efremovitch-Smirnov.

De cette manière, on obtient les espaces topologiques et les espaces de proximité comme des cas particuliers d'une notion générale. Pour qu'on puisse, cependant, y inclure aussi les espaces uniformes, il faut qu'on traduise les axiomes (G1) et (G2) d'une façon convenable qui, les rendant un peu plus compliqués, permet en revanche d'atteindre ce but.

Soit toujours X un ensemble quelconque, et $\mathfrak{J}(X) \subset \mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$. On considère une famille Σ d'applications de $\mathfrak{M}$ dans $\mathcal{P}(X)$ telle que :

(G1') Si $A \in \mathfrak{M}$ et $U \in \Sigma$, alors $A \subset U(A)$;

(G2') Si $A \in \mathfrak{M}$ et $U \in \Sigma$, alors il existe une $V \in \Sigma$ pour laquelle on a $V(B) \subset U(A)$, quand $B \in \mathfrak{M}$ et $B \subset V(A)$.

Il n'est pas difficile de voir que, si l'on désigne par $\mathcal{U}(A)$ le filtre sur X engendré par l'ensemble de tous les $U(A)$, où A est fixé et U parcourt toute Σ, alors les axiomes (G1) et (G2) seront vérifiés. Inversement, quand les filtres $\mathcal{U}(A)$, où A parcourt $\mathfrak{M}$ satisfont à (G1) et (G2), la famille Σ vérifie (G1') et (G2') si elle est composée de toutes les applications U faisant correspondre à chaque $A \in \mathfrak{M}$ un élément $U(A)$ de $\mathcal{U}(A)$.

Cela montre que les axiomes (G1') et (G2'), étant équivalents à (G1) et (G2), peuvent être pris comme base dans la définition de la notion d'espace topologique généralisé. L'axiome de symétrie (GS) se traduit alors comme suit :

(GS') Si $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ et si $U(A) \cap B = \emptyset$ pour une $U \in \Sigma$, alors il existe une $V \in \Sigma$ telle que $V(B) \cap A = \emptyset$.

On s'aperçoit maintenant que, dans l'axiome (G2'), on exige l'existence d'une application $V \in \Sigma$ qui peut dépendre du choix de l'élément A de $\mathfrak{M}$. Evidement, on obtiendra un cas spécial si l'on exige que V ne doit pas dépendre de ce choix, c'est-à-dire si l'on remplace l'axiome (G2') par la condition suivante plus forte :

(UG2') Si $U \in \Sigma$, alors il existe une $V \in \Sigma$ telle que l'on a $V(B) \subset U(A)$ quand A, $B \in \mathfrak{M}$ et $B \subset V(A)$.

Dans ce cas, on dira que la topologie généralisée donnée sur X par rapport à $\mathfrak{M}$ est <u>uniforme</u>. Ainsi, la notion de la topologie uniforme est introduite par une exigence d'indépendance, conformément à l'idée classique de l'analyse (exprimée, par exemple, dans les définitions de la continuité uniforme, de la convergence uniforme, etc.).

On dira ensuite qu'une topologie généralisée, uniforme sur X par rapport à $\mathfrak{M}$, est symétrique quand elle vérifie la variante uniforme de l'axiome de symétrie (GS'), et notamment la suivante :

($\mathfrak{U}$GS') Si $U \in \Sigma$, alors il existe une $V \in \Sigma$ telle que, quand $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$, la relation $U(A) \cap B = \emptyset$ implique $V(B) \cap A = \emptyset$.

On verra, alors, que la notion de topologie généralisée uniforme symétrique, dans le cas où $\mathfrak{M} = \mathfrak{J}(X)$, coïncide essentiellement avec la notion de structure uniforme habituelle. En effet, si une topologie généralisée uniforme symétrique sur X par rapport à $\mathfrak{J}(X)$ est donnée par une famille Σ d'applications de $\mathfrak{J}(X)$ dans $\mathfrak{P}(X)$ (ou, ce qui revient au même, de X dans $\mathfrak{P}(X)$), et si on désigne par $\tilde{U}$ la partie de $X \times X$ composée de tous les couples (x , y) pour lesquels on a $y \in U(x)$, alors le filtre sur $X \times X$ engendré par toutes les $\tilde{U}$ quand U parcourt Σ sera une structure uniforme sur X. D'autre part, toute structure uniforme sur X peut être obtenue de cette manière.

Ainsi, on obtient les trois notions d'espace topologique, d'espace de proximité et d'espace uniforme comme des cas spéciaux d'une seule notion générale (celle d'espace topologique généralisé introduite par les axiomes (G1') et (G2')).

Comme application, montrons comment, en utilisant la notion de topologie généralisée, on peut donner une solution assez simple au problème, posé depuis longtemps, de trouver une caractérisation interne des espaces complètement réguliers (c'est-à-dire une caractérisation qui ne s'appuie pas sur une notion de fonction numérique). On voit, en effet, qu'un espace topologique séparé X est complètement régulier si, et seulement si, sa topologie peut être prolongée en une topologie généralisée symétrique par rapport à un ensemble $\mathfrak{M}$ comprenant à la fois tous les sous-ensembles ouverts et tous les sous-ensembles fermés de X (tandis que, par exemple, pour qu'un espace séparé X soit régulier, il faut et il suffit que sa topologie soit prolongeable en une topologie généralisée symétrique par rapport à l'ensemble $\mathfrak{M}$ composé de tous les sous-ensembles ouverts de X).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CSÁSZÁR (Ákos). - Fondements de la topologie générale. - Paris, Gauthier-Villars, 1960.

[2] DOÏTCHINOV (Doïtchin). - Sur la théorie unique des espaces topologiques, des espaces de proximité et des espaces uniformes [en russe], Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 156, 1964, p. 21-24.

[3] DOÏTCHINOV (Doïtchin). - Une généralisation des espaces topologiques et des espaces uniformes, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 5e année, 1965/66, exposé n° 8, 4 p.

[4] HACQUE (Michel). - Sur les E-structures, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 1905-1907 et p. 2120-2122.

[5] HERRLICH (Horst). - A concept of nearness, Gener. Topologt and its Appl., t. 4, 1974, p. 191-212.

[6] KATĚTOV (Miroslav). - On continuity structures and spaces of mappings, Comment. Math. Univ. Carolinae, Praha, t. 6, 1965, p. 257-278.

(Texte reçu le 12 mai 1978)

Doïtchin DOÏTCHINOV
Institut de Mathématiques et Mécanique
P. O. Box 373
1000 SOFIA (Bulgarie)