Michel Talagrand

Solution d'une question de H. Weizsächer

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, nº 2 (1977-1978), exp. nº C3, p. C1-C2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A8_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 3, 2 p.

SOLUTION D'UNE QUESTION DE H. WEIZSÄCHER

par Michel TALAGRAND

Désignons par X un espace topologique compact, et par $\mathfrak{F}(X)$ l'ensemble des fermés de X muni de la topologie de Haussdorf. Une application σ d'une partie Y de $\mathfrak{F}(X)$ dans X est dite une <u>sélection</u> si, pour $F \in Y$, on a $\sigma(F) \in F$. Lorsque X est hyperstonien, H. WEIZSÄCHER demande s'il existe toujours une sélection continue de $\mathfrak{F}(X)$ dans X. Mais hélas, les miracles n'existent pas (tout au moins en mathématiques !), et on a le résultat suivant.

PROPOSITION. - <u>Désignons par</u> X <u>le spectre de</u> $L^\infty([0\,,\,1]\,,\,\lambda)$, <u>où</u> λ <u>désigne la mesure de Lebesgue, et par</u> Y <u>l'ensemble des parties à deux éléments de</u> X. <u>Alors, il n'existe pas de sélection continue de</u> Y <u>dans</u> X.

<u>Démonstration</u>. - Si une telle sélection existe, on a alors une application continue φ de $X \times X$ dans X telle que $\varphi(x\,,\,y) = \varphi(y\,,\,x)$ et que $\varphi(x,y) \in \{x,y\}$. On va prouver que cette hypothèse conduit à une absurdité.

Pour chaque partie mesurable A de $[0\,,\,1]$, désignons par $\tilde{A}$ l'ouvert-fermé associé de X.

On va construire, par induction, des suites A_n et B_n d'ensembles mesurables de $[0\,,\,1]$ vérifiant les propriétés suivantes, pour tout $n \geqslant 1$:

(a) $$\lambda(A_n) > 0\,,\ \lambda(B_n) > 0\,,\ A_n \cap B_n = \emptyset\,,$$

(b) $$A_n \subset A_{n-1}\,,\ B_n \subset A_{n-1}\,,$$

(c) $$\forall\ (x\,,\,y) \in \tilde{A}_n \times \tilde{B}_n\,,\quad \varphi(x\,,\,y) = x\,.$$

Le premier cas est analogue au cas général, en convenant que $A_0 = B_0 = [0\,,\,1]$. Supposons la construction effectuée jusqu'au rang n.

Soit $(a\,,\,b) \in \tilde{A}_n \times \tilde{A}_n$ avec $a \neq b$. Posons $c = \varphi(a\,,\,b)$ et $d = \{a, b\}\setminus\{c\}$. On a donc $(c\,,\,d) \in \tilde{A}_n \times \tilde{A}_n$ et $\varphi(c\,,\,d) = c$. Puisque φ est continue et que $c \neq d$, il existe alors A_{n+1} et B_{n+1} vérifiant les conditions (a) à (c), ce qui termine la construction.

Reste à obtenir la contradiction cherchée. Posons
$$B = \bigcap_n \widetilde{\bigcup_{p \geqslant n} B_p}\,.$$
C'est un compact de X, dont on sait qu'il n'est pas réduit à un point. Pour tout n, on a
$$B \subset \widetilde{\bigcup_{p \geqslant n+1} B_p} \subset \tilde{A}_n\,.$$
Soit a et b deux points distincts de B. Prouvons que $\varphi(a\,,\,b) = a$. Sinon, il existe des ensembles mesurables C et D de $[0\,,\,1]$ tels que $a \in \tilde{C}$, $b \in \tilde{D}$

et que

$$(x , y) \in \tilde{C} \times \tilde{D} \Longrightarrow \varphi(x , y) = y .$$

Puisque $a \in B$, on a $a \in \tilde{A}_n$, pour tout n , donc $\tilde{C} \cap \tilde{A}_n \neq \emptyset$, pour tout n . Puisque $b \in B$, il existe n tel que $\lambda(D \cap B_n) > 0$, c'est-à-dire que $\tilde{D} \cap \tilde{B}_n \neq \emptyset$. Pour un tel n , on a $(\tilde{C} \times \tilde{D}) \cap (\tilde{A}_n \times \tilde{B}_n) \neq \emptyset$. Pour un couple (x , y) de cet ensemble, on doit avoir $\varphi(x , y) = x$ d'après (c), et $\varphi(x , y) = y$, d'après le choix de C et D , donc $x = y$, ce qui est absurde puisque $\tilde{A}_n \cap \tilde{B}_n = \emptyset$. On a donc bien $\varphi(a , b) = a$.

Le même raisonement appliqué au couple (b , a) montre que $\varphi(b , a) = b$. Mais ceci est absurde puisque $\varphi(a , b) = \varphi(b , a)$ et que $a \neq b$.

c. q. f. d.

Remarque. - Naturellemnt la même démonstration s'applique au spectre de n'importe quel espace probabilisé diffus.

BIBLIOGRAPHIE

WEIZSÄCHER (H). - Some negative résults in the theory of lifting, "Measure theory [1975, Oberwolfach]", p. 159-172. - Berlin, Springer-Verlag, 1976 (Lecture Notes in Mathematics, 541).

(Texte reçu le 9 mars 1978)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05