

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MICHEL TALAGRAND

Solution d'une question de H. Weizsächer

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° C3,
p. C1-C2

http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A8_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION D'UNE QUESTION DE H. WEIZSÄCHER
 par Michel TALAGRAND

Désignons par X un espace topologique compact, et par $\mathfrak{F}(X)$ l'ensemble des fermés de X muni de la topologie de Hausdorff. Une application σ d'une partie Y de $\mathfrak{F}(X)$ dans X est dite une sélection si, pour $F \in Y$, on a $\sigma(F) \in F$. Lorsque X est hyperstonien, H. WEIZSÄCHER demande s'il existe toujours une sélection continue de $\mathfrak{F}(X)$ dans X . Mais hélas, les miracles n'existent pas (tout au moins en mathématiques !), et on a le résultat suivant.

PROPOSITION. - Désignons par X le spectre de $L^\infty([0, 1], \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue, et par Y l'ensemble des parties à deux éléments de X . Alors, il n'existe pas de sélection continue de Y dans X .

Démonstration. - Si une telle sélection existe, on a alors une application continue φ de $X \times X$ dans X telle que $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ et que $\varphi(x, y) \in \{x, y\}$. On va prouver que cette hypothèse conduit à une absurdité.

Pour chaque partie mesurable A de $[0, 1]$, désignons par \tilde{A} l'ouvert-fermé associé de X .

On va construire, par induction, des suites A_n et B_n d'ensembles mesurables de $[0, 1]$ vérifiant les propriétés suivantes, pour tout $n \geq 1$:

- (a) $\lambda(A_n) > 0$, $\lambda(B_n) > 0$, $A_n \cap B_n = \emptyset$,
- (b) $A_n \subset A_{n-1}$, $B_n \subset A_{n-1}$,
- (c) $\forall (x, y) \in \tilde{A}_n \times \tilde{B}_n$, $\varphi(x, y) = x$.

Le premier cas est analogue au cas général, en convenant que $A_0 = B_0 = [0, 1]$. Supposons la construction effectuée jusqu'au rang n .

Soit $(a, b) \in \tilde{A}_n \times \tilde{A}_n$ avec $a \neq b$. Posons $c = \varphi(a, b)$ et $d = \{a, b\} \setminus \{c\}$. On a donc $(c, d) \in \tilde{A}_n \times \tilde{A}_n$ et $\varphi(c, d) = c$. Puisque φ est continue et que $c \neq d$, il existe alors A_{n+1} et B_{n+1} vérifiant les conditions (a) à (c), ce qui termine la construction.

Reste à obtenir la contradiction cherchée. Posons

$$B = \bigcap_n \overline{\bigcup_{p \geq n} B_p}.$$

C'est un compact de X , dont on sait qu'il n'est pas réduit à un point. Pour tout n , on a

$$B \subset \overline{\bigcup_{p \geq n+1} B_p} \subset \tilde{A}_n.$$

Soit a et b deux points distincts de B . Prouvons que $\varphi(a, b) = a$. Sinon, il existe des ensembles mesurables C et D de $[0, 1]$ tels que $a \in \tilde{C}$, $b \in \tilde{D}$

et que

$$(x, y) \in \tilde{C} \times \tilde{D} \implies \varphi(x, y) = y.$$

Puisque $a \in B$, on a $a \in \tilde{A}_n$, pour tout n , donc $\tilde{C} \cap \tilde{A}_n \neq \emptyset$, pour tout n .
 Puisque $b \in B$, il existe n tel que $\lambda(D \cap B_n) > 0$, c'est-à-dire que $\tilde{D} \cap \tilde{B}_n \neq \emptyset$.
 Pour un tel n , on a $(\tilde{C} \times \tilde{D}) \cap (\tilde{A}_n \times \tilde{B}_n) \neq \emptyset$. Pour un couple (x, y) de cet ensemble, on doit avoir $\varphi(x, y) = x$ d'après (c), et $\varphi(x, y) = y$, d'après le choix de C et D , donc $x = y$, ce qui est absurde puisque $\tilde{A}_n \cap \tilde{B}_n = \emptyset$. On a donc bien $\varphi(a, b) = a$.

Le même raisonnement appliqué au couple (b, a) montre que $\varphi(b, a) = b$. Mais ceci est absurde puisque $\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$ et que $a \neq b$.

c. q. f. d.

Remarque. - Naturellement la même démonstration s'applique au spectre de n'importe quel espace probabilisé diffus.

BIBLIOGRAPHIE

WEIZSÄCHER (H). - Some negative results in the theory of lifting, "Measure theory [1975, Oberwolfach]", p. 159-172. - Berlin, Springer-Verlag, 1976 (Lecture Notes in Mathematics, 541).

(Texte reçu le 9 mars 1978)

Michel TALAGRAND
 Equipe d'Analyse, Tour 46
 Université Pierre et Marie Curie
 4 place Jussieu
 75230 PARIS CEDEX 05
