Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gilles Godefroy

Éléments alternés dans les sous-espaces de $C(K)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° 18, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, n° 18, 3 p.

6 avril 1978

ÉLÉMENTS ALTERNÉS DANS LES SOUS-ESPACES DE $\mathcal{C}(K)$

par Gilles GODEFROY

(d'après J. VOIGT [2])

Je résume brièvement ici le travail de J. VOIGT [2] qui a été exposé dans ce séminaire.

Soit $E_k = [-1, +1]^k$ le cube unité de $\underset{\sim}{R}^k$, et

$$F^+_{k,n} = \{x \in E_k \ ; \ \exists\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_n \leqslant k \text{ tels que } x_{j_r} = (-1)^{n-r} \ (r = 1, 2, \dots, n)\} .$$

On pose $F^-_{k,n} = -F^+_{k,n}$, et $F_{k,n} = F^-_{k,n} \cup F^+_{k,n}$.

J. VOIGT commence par établir, à l'aide d'une démonstration combinatoire, le résultat suivant, intuitivement clair si on fait une figure.

PROPOSITION 1. - *Pour tout* $k \in \underset{\sim}{N}$, *il existe un homéomorphisme*

$$g_k : E_k \longrightarrow F^+_{k+1,1}$$

qui possède les propriétés

(a) $g_k(-x) = -g_k(x)$, *pour tout* $x \in F_{k,1}$.

(b) *Pour tout* $n \in \underset{\sim}{N}$, *l'application* g_k *induit des homéomorphismes*

$$g_{k|F^+_{k,n}} : F^+_{k,n} \longrightarrow F^+_{k+1,n+1} .$$

On en déduit alors, à l'aide d'une récurrence, le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. - *Pour tout* $n, k \in \underset{\sim}{N}$, $1 \leqslant n \leqslant k$, *il existe un homéomorphisme* $f_{k,n} : F_{k-n+1,1} \longrightarrow F_{k,n}$ *qui satisfait* $f_{k,n}(-x) = -f_{k,n}(x)$, *pour tout* $x \in F_{k-n+1,1}$.

Ce dernier résultat permet d'établir, à l'aide du théorème de BORSUK, le très intéressant résultat suivant.

THÉORÈME 3. - *Soit* $k \in \underset{\sim}{N}$, *et* $L \subseteq \underset{\sim}{R}^k$ *un sous-espace de dimension* n. *Alors, il existe* $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in L$ *tels que* $\|x\|_\infty \leqslant 1$ *et* $1 \leqslant j_1 < \dots < j_n \leqslant k$ *tels que* $x_{j_r} = (-1)^r$, *pour tout* $r = 1, 2, \dots, n$.

A l'aide d'un argument de compacité et d'un passage à la limite, on obtient alors le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - *Soit* J *compact totalement ordonné. Soit* $L \subseteq \mathcal{C}(J)$ *un sous-espace vectoriel,* $\dim L \geqslant n$. *Alors, il existe* $f \in L$ *qui a les propriétés suivantes :*

1° $\|f\|_\infty = 1$.

2° $\exists\ t_1, t_2, \dots, t_n \in J$, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tels que $f(t_r) = (-1)^r$.

Remarque. - Le rôle de l'hypothèse " J totalement ordonné" est intéressant : En effet, cette hypothèse permet d'assurer que les $(t_r)_{1\leq r\leq n}$ sont tous distincts. La propriété ci-dessus est d'ailleurs, dans certains cas, caractéristique des compacts ordonnés. J. SAINT-RAYMOND et moi-même avons démontré qu'un compact K métrisable, connexe et localement connexe vérifie la propriété ci-dessus si, et seulement si, il est homéomorphe à $[0, 1]$.

On va maintenant donner quelques applications du résultat ci-dessus. On s'intéresse à la situation suivante : Soit Y un Banach, X un sous-espace de Y non fermé tel qu'il existe une norme $\| \|_X$ sur X qui fasse de X un Banach. J. VOIGT définit les propriétés :

(P3) Si $L \subseteq X$ est un sous-espace fermé de X , alors $\dim L < +\infty$.

(P1) L'injection canonique de $(X, \| \|_X)$ dans $(Y, \| \|_Y)$ est compacte.

(P2) Dans (P3), la dimension de L peut être estimée à l'aide de la norme de l'application Id : $(L, \| \|_Y) \longrightarrow (L, \| \|_X)$.

L'implication (P1) $\Longrightarrow$ (P3) se déduit aisément du théorème de Riesz. On définit la fonction $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par

$$\varphi(K) = \sup\{\dim L \ ; \ L \subseteq X , \ \|x\|_X \leq K\|x\|_Y \ \ \forall\, x \in L\} ,$$

$$\varphi(K) = \sup\{\dim L \ ; \ L \subseteq X , \ N_L \leq K\} ,$$

où N_L est la norme de l'application identité de $(L, \| \|_Y)$ dans $(L, \| \|_X)$. On définit aussi $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ par

$$\psi(n) = \inf\{N_L \ ; \ L \subseteq X , \ \dim L \geq n\} .$$

On voit aisément que

$$(P2) \Longleftrightarrow \varphi(K) < +\infty , \ \ \forall\, K \in [0, +\infty[\Longleftrightarrow \psi(n) \longrightarrow +\infty \ \text{ quand } \ n \longrightarrow +\infty .$$

Les résultats précédents permettent alors à J. VOIGT d'estimer les fonctions φ et ψ dans quelques cas concrets.

1° Soit h un modèle de continuité, et soit $\mathrm{Lip}_h [0, 1]$ l'espace des fonctions lipchitziennes relativement au module de continuité h . L'injection canonique $\mathrm{Lip}_h [0, 1] \hookrightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ est compacte, et on a (P2) ; en effet, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - _Soit_ h _un module de continuité. Soit_ $X = \mathrm{Lip}_h [0, 1]$, $Y = \mathcal{C}([0, 1])$. _On a_ $\psi(n) \geq 1 + 2[h(1/(n-1))]^{-1}$, $n \geq 2$.

En utilisant le fait que tout Banach séparable est isométrique à un sous-espace de $\mathcal{C}([0, 1])$, on déduit du cas particulier ci-dessus le théorème suivant.

THÉORÈME 6. - (P1) implique (P2).

Remarque. - Ce résultat peut s'établir directement par un raisonnement d'équicontinuité élémentaire, ce qui, bien sûr, n'enlève rien à l'intérêt de ce travail, et en particulier du théorème 4.

2° Soit J un compact totalement ordonné, soit $X = CVB(J)$ l'espace des fonctions continues à variation bornée sur J, et soit $Y = \mathcal{C}(J)$. Alors (X , Y) satisfait (P2) et non (P1). Plus précisément, on a $\psi(n) \geqslant 2n - 1$. On retrouve un résultat de ROGALSKI et MOKOBODZKI [1].

3° Soit $X = W_p^1([0 , 1])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[0 , 1]$ à dérivée dans L^h, soit $Y = \mathcal{C}([0 , 1])$. (P1) est satisfaite si, et seulement si, $p > 1$; on a (P2), et plus précisément $\varphi(K ; p) = [(K + 1)/2]$.

4° Soit $X = \ell_p(I)$, $Y = \ell_q(I)$, $1 \leqslant p < \infty$. (P1) n'est pas satisfaite ; mais (P2) est satisfaite ; plus précisément $\psi(n) = n^{(1/p)-(1/q)}$.

5° Soit μ une mesure de probabilité, $X = L^\infty(\mu)$, $Y = L^p(\mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Si μ n'est pas atomique, (X , Y) ne possède pas (P1). La propriété (P2) est satisfaite ; plus précisément, $\psi(n) \geqslant n^{1/p}$ pour $p \geqslant 2$, et $\psi(n) \geqslant n^{1/2}$ pour $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Remarque. - Dans tous les exemples ci-dessus, la propriété (P3) implique la propriété (P2), que (P1) soit vérifiée ou non. Ceci amène la question suivante : Les propriétés (P2) et (P3) sont-elles équivalentes ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] MOKOBODZKI (G.) et ROGALSKI (M.). - Sur les espaces uniformément fermés de fonctions à variation bornée, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 1225-1228.

[2] VOIGT (J.). - On Y-closed subspaces of X, for Banach spaces $X \subset Y$; existence of alternating elements in subspaces of $\mathcal{C}(J)$

(Texte reçu le 20 juin 1978)

Gilles GODEFROY
Equipe d'analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05