

# SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GILLES GODEFROY

## Éléments alternés dans les sous-espaces de $C(K)$

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° 18, p. 1-3

<[http://www.numdam.org/item?id=SC\\_1977\\_\\_17\\_2\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A3_0)>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉLÉMENTS ALTERNÉS DANS LES SOUS-ESPACES DE  $C(K)$

par Gilles GODEFROY

(d'après J. VOIGT [2])

Je résume brièvement ici le travail de J. VOIGT [2] qui a été exposé dans ce séminaire.

Soit  $E_k = (-1, +1)^k$  le cube unité de  $\mathbb{R}^k$ , et

$$F_{k,n}^+ = \{x \in E_k ; \exists 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq k \text{ tels que } x_{j_r} = (-1)^{n-r} \text{ (} r = 1, 2, \dots, n \text{)}\} .$$

On pose  $F_{k,n}^- = -F_{k,n}^+$ , et  $F_{k,n} = F_{k,n}^- \cup F_{k,n}^+$ .

J. VOIGT commence par établir, à l'aide d'une démonstration combinatoire, le résultat suivant, intuitivement clair si on fait une figure.

PROPOSITION 1. - Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un homéomorphisme

$$g_k : E_k \longrightarrow F_{k+1,1}^+$$

qui possède les propriétés

(a)  $g_k(-x) = -g_k(x)$ , pour tout  $x \in F_{k,1}$ .

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'application  $g_k$  induit des homéomorphismes

$$g_k|_{F_{k,n}^+} : F_{k,n}^+ \longrightarrow F_{k+1,n+1}^+ .$$

On en déduit alors, à l'aide d'une récurrence, le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. - Pour tout  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq n \leq k$ , il existe un homéomorphisme  
 $f_{k,n} : F_{k-n+1,1} \longrightarrow F_{k,n}$  qui satisfait  $f_{k,n}(-x) = -f_{k,n}(x)$ , pour tout  
 $x \in F_{k-n+1,1}$ .

Ce dernier résultat permet d'établir, à l'aide du théorème de BORSUK, le très intéressant résultat suivant.

THÉOREME 3. - Soit  $k \in \mathbb{N}$ , et  $L \subseteq \mathbb{R}^k$  un sous-espace de dimension  $n$ . Alors, il existe  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in L$  tels que  $\|x\|_\infty \leq 1$  et  $1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq k$  tels que  $x_{j_r} = (-1)^r$ , pour tout  $r = 1, 2, \dots, n$ .

A l'aide d'un argument de compacité et d'un passage à la limite, on obtient alors le théorème suivant.

THÉOREME 4. - Soit  $J$  compact totalement ordonné. Soit  $L \subseteq C(J)$  un sous-espace vectoriel,  $\dim L \geq n$ . Alors, il existe  $f \in L$  qui a les propriétés suivantes :

$$1^\circ \quad \|f\|_\infty = 1 .$$

$$2^\circ \quad \exists t_1, t_2, \dots, t_n \in J, \quad t_1 < t_2 < \dots < t_n \quad \text{tels que} \quad f(t_r) = (-1)^r .$$

Remarque. - Le rôle de l'hypothèse " J totalement ordonné " est intéressant : En effet, cette hypothèse permet d'assurer que les  $(t_r)_{1 \leq r \leq n}$  sont tous distincts. La propriété ci-dessus est d'ailleurs, dans certains cas, caractéristique des compacts ordonnés. J. SAINT-RAYMOND et moi-même avons démontré qu'un compact K métrisable, connexe et localement connexe vérifie la propriété ci-dessus si, et seulement si, il est homéomorphe à  $(0, 1)$  .

On va maintenant donner quelques applications du résultat ci-dessus. On s'intéresse à la situation suivante : Soit Y un Banach, X un sous-espace de Y non fermé tel qu'il existe une norme  $\| \cdot \|_X$  sur X qui fasse de X un Banach. J. VOIGT définit les propriétés :

(P3) Si  $L \subseteq X$  est un sous-espace fermé de X, alors  $\dim L < +\infty$  .

(P1) L'injection canonique de  $(X, \| \cdot \|_X)$  dans  $(Y, \| \cdot \|_Y)$  est compacte.

(P2) Dans (P3), la dimension de L peut être estimée à l'aide de la norme de l'application  $\text{Id} : (L, \| \cdot \|_Y) \rightarrow (L, \| \cdot \|_X)$  .

L'implication  $(P1) \implies (P3)$  se déduit aisément du théorème de Riesz. On définit la fonction  $\varphi : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  par

$$\varphi(K) = \sup\{\dim L ; L \subseteq X, \|x\|_X \leq K\|x\|_Y \quad \forall x \in L\} ,$$

$$\varphi(K) = \sup\{\dim L ; L \subseteq X, N_L \leq K\} ,$$

où  $N_L$  est la norme de l'application identité de  $(L, \| \cdot \|_Y)$  dans  $(L, \| \cdot \|_X)$  . On définit aussi  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty[$  par

$$\psi(n) = \inf\{N_L ; L \subseteq X, \dim L \geq n\} .$$

On voit aisément que

$$(P2) \iff \varphi(K) < +\infty, \quad \forall K \in [0, +\infty[ \iff \psi(n) \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty .$$

Les résultats précédents permettent alors à J. VOIGT d'estimer les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  dans quelques cas concrets.

1° Soit h un module de continuité, et soit  $\text{Lip}_h(0, 1)$  l'espace des fonctions lipchitziennes relativement au module de continuité h . L'injection canonique  $\text{Lip}_h(0, 1) \hookrightarrow \mathcal{C}([0, 1])$  est compacte, et on a (P2) ; en effet, nous avons le théorème suivant.

**THÉOREME 5.** - Soit h un module de continuité. Soit  $X = \text{Lip}_h(0, 1)$ ,  $Y = \mathcal{C}([0, 1])$  . On a  $\psi(n) \geq 1 + 2[h(1/(n-1))]^{-1}$ ,  $n \geq 2$  .

En utilisant le fait que tout Banach séparable est isométrique à un sous-espace de  $\mathcal{C}([0, 1])$ , on déduit du cas particulier ci-dessus le théorème suivant.

THÉOREME 6. - (P1) implique (P2).

Remarque. - Ce résultat peut s'établir directement par un raisonnement d'équicontinuité élémentaire, ce qui, bien sûr, n'enlève rien à l'intérêt de ce travail, et en particulier du théorème 4.

2° Soit  $J$  un compact totalement ordonné, soit  $X = \text{CVB}(J)$  l'espace des fonctions continues à variation bornée sur  $J$ , et soit  $Y = C(J)$ . Alors  $(X, Y)$  satisfait (P2) et non (P1). Plus précisément, on a  $\psi(n) \geq 2n - 1$ . On retrouve un résultat de ROGALSKI et MOKOBODZKI [1].

3° Soit  $X = W_p^1((0, 1))$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) l'espace des fonctions absolument continues sur  $(0, 1)$  à dérivée dans  $L^h$ , soit  $Y = C((0, 1))$ . (P1) est satisfaite si, et seulement si,  $p > 1$ ; on a (P2), et plus précisément  $\varphi(K; p) = [(K + 1)/2]$ .

4° Soit  $X = \ell_p(I)$ ,  $Y = \ell_q(I)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . (P1) n'est pas satisfaite; mais (P2) est satisfaite; plus précisément  $\psi(n) = n^{(1/p) - (1/q)}$ .

5° Soit  $\mu$  une mesure de probabilité,  $X = L^\infty(\mu)$ ,  $Y = L^p(\mu)$  ( $1 \leq p < \infty$ ). Si  $\mu$  n'est pas atomique,  $(X, Y)$  ne possède pas (P1). La propriété (P2) est satisfaite; plus précisément,  $\psi(n) \geq n^{1/p}$  pour  $p \geq 2$ , et  $\psi(n) \geq n^{1/2}$  pour  $1 \leq p \leq 2$ .

Remarque. - Dans tous les exemples ci-dessus, la propriété (P3) implique la propriété (P2), que (P1) soit vérifiée ou non. Ceci amène la question suivante: Les propriétés (P2) et (P3) sont-elles équivalentes?

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] MOKOBODZKI (G.) et ROGALSKI (M.). - Sur les espaces uniformément fermés de fonctions à variation bornée, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 1225-1228.
- [2] VOIGT (J.). - On  $Y$ -closed subspaces of  $X$ , for Banach spaces  $X \subset Y$ ; existence of alternating elements in subspaces of  $C(J)$

(Texte reçu le 20 juin 1978)

Gilles GODEFROY  
 Equipe d'analyse, Tour 46  
 Université Pierre et Marie Curie  
 4 place Jussieu  
 75230 PARIS CEDEX 05