Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michèle Capon

Sous-espaces complémentés de $L^p[0,1]$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° 16, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A1_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
17e année, 1977/78, n° 16, 7 p.

9 mars 1978

SOUS-ESPACES COMPLÉMENTÉS DE $L^p(0\ ,\ 1)$

par Michèle CAPON

Résumé. - Nous allons étudier les principales propriétés des sous-espaces complémentés de $L^p(0\ ,\ 1)$. Pour $1 < p < \infty$, cette notion est intimement liée à celle des $\mathcal{L}_p$-espaces que nous étudierons d'abord.

1. Les espaces $\mathcal{L}_p$. Définition et propriétés.

Ces espaces ont été introduits par LINDENSTRAUSS et PEŁCZYŃSKI dans [12].

Définition. - Soient X un Banach, et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. X est un $\mathcal{L}_p$-espace s'il existe un réel $\lambda \geqslant 1$ tel que, pour tout sous-espace de dimension finie F de X, il existe un sous-espace de dimension finie E de X , contenant F , et tel que $d(E\ ,\ \ell_p^{\dim E}) \leqslant \lambda$.

Rappelons que la distance de deux espaces de Banach U et V est

$$d(U\ ,\ V) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|\ ;\ T \text{ isomorphisme entre } U \text{ et } V\}\ .$$

Comme exemple, nous citerons les espaces $L^p(\mu)$ qui sont des $\mathcal{L}_{p,1+\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$, et les espaces $\mathcal{C}(K)$ qui sont $\mathcal{L}_{\infty,1+\varepsilon}$.

Nous allons maintenant énoncer les principales propriétés des $\mathcal{L}_p$-espaces, et voir ainsi le lien avec les sous-espaces complémentés de $L^p(0\ ,\ 1)$.

PROPOSITION. - Si X est un $\mathcal{L}_p$-espace, alors X'' est isomorphe à un sous-espace complémenté d'un $L^p(\mu)$.

Cette proposition est démontrée dans [12]. Nous allons en donner une démonstration par la méthode des ultraproduits qui sont très utiles lorsqu'il s'agit d'étudier des propriétés locales.

On considère la famille $\mathfrak{F}$ des sous-espaces de dimension finie B de X qui sont isomorphes à un ℓ_p^n et $d(B\ ,\ \ell_p^n) \leqslant \lambda$.

Pour chacun d'eux, on peut trouver un isomorphisme φ_B de B sur $\ell_p^{\dim B}$ tel que

$$\|x\| \leqslant \|\varphi_B\, x\| \leqslant \lambda\|x\|\ .$$

La famille $\mathfrak{F}$ est filtrante croissante, et la réunion de ses éléments est X . On prend alors un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur $\mathfrak{F}$, plus fin que le filtre des sections, et l'ultraproduit est défini comme le quotient de $(\bigoplus_{B\in\mathfrak{F}} B)_{\ell_\infty}$ par la relation d'équivalence

$$(x_B) \sim (y_B) \Longleftrightarrow \lim_{B\in\mathfrak{U}}\|x_B - y_B\| = 0\ .$$

On le note $(\bigoplus_{B\in\mathfrak{F}} B)_{\ell_\infty}/\mathfrak{U}$ et la norme sur cet espace de Banach est définie par $\|(\dot{x}_B)\| = \lim_{B\in\mathfrak{U}}\|x_B\|$.

On définit de même l'ultraproduit $(\bigoplus_B \ell_p^{\dim B})_{\ell_\infty}/\mathcal{U}$, et on voit facilement que l'on peut définir sur ce dernier une relation d'ordre en posant

$$x \geqslant 0 \Longleftrightarrow \text{il existe un représentant } (x_B) \text{ avec } x_B \geqslant 0 \text{ , pour tout } B \text{ .}$$

Cette relation vérifie la propriété suivante

$$x \wedge y = 0 \Longrightarrow \|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p \text{ .}$$

Cette dernière propriété caractérise les espaces isométriques à $L^p(\mu)$ $(p < \infty)$. D'autre part, la famille des isomorphismes (φ_B) introduit un isomorphisme entre $(\bigoplus B)_\infty/\mathcal{U}$ et $(\bigoplus \ell_p^{\dim B})_\infty/\mathcal{U} = L^p(\mu)$.

Comme X se plonge de manière évidente dans $(\bigoplus B)_\infty/\mathcal{U}$ par l'isométrie

$$j(x) = \text{classe de } (x_B) \text{ avec } \begin{cases} x_B = x \text{ , si } x \in B \\ x_B = 0 \text{ , si } x \notin B \end{cases} \text{.}$$

On obtient donc un plongement de X dans un espace $L^p(\mu)$. Ceci nous montre déjà que, si $1 < p < \infty$, X est réflexif.

Soit X_1 le sous-espace de $(\bigoplus \ell_p^{\dim B})_\infty/\mathcal{U} = L^p(\mu)$ qui est isomorphe à X : On définit une application Q de $L^p(\mu)$ dans X_1'' en posant

$$Q[\text{classe de } (x_B)] = \lim_{B\in\mathcal{U}} x_B \text{ ,}$$

la limite étant au sens faible $(\sigma(X_1'' , X_1'))$. Il est clair que $Q \circ j = \mathrm{id}_{X_1}$.

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus B)_\infty/\mathcal{U} & \xrightarrow{\varphi} & L^p(\mu) = (\bigoplus \ell_p^{\dim B})/\mathcal{U} \\ j\uparrow & & \uparrow j \\ X & \xrightarrow{\varphi|X} & X_1 \end{array}$$

<u>1er cas</u> : $1 < p < \infty$. - Alors $X_1'' = X_1$, et l'application $j \circ Q$ est une projection de $L^p(\mu)$ sur $j(X_1)$ qui est isomorphe à X .

<u>2e cas</u> : $p = 1$. - En prenant les transposées de j et Q , on obtient le diagramme :

$$X_1 \xrightarrow{j} L'(\mu) \xrightarrow{Q} X_1''$$

$$X_1' \subset X_1''' \xrightarrow{Q^*} L^\infty(\mu) \xrightarrow{j^*} X_1' \text{ .}$$

Il est facile de voir que $j^* \circ Q^*|_{X_1'} = \mathrm{id}_{X_1'}$, et par suite $Q^*|_{X_1'} \circ j^*$ est une projection de $L^\infty(\mu)$ sur un espace isomorphe à X_1' . C'est donc que X_1'' est isomorphe à un sous-espace complémenté du dual de $L^\infty(\mu)$ qui est lui-même un espace $L^1(\nu)$.

Il nous reste à étudier le cas où $p = +\infty$. La proposition 1 sera vérifiée si on démontre que X'' est un espace injectif. D'après LINDENSTRAUSS [10], il suffit pour cela de montrer que, pour tout Banach Z contenant X , on peut plonger l'injection canonique de X dans X'' en un opérateur de norme bornée (indépendemment de Z).

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "T"] & \\ \cup & \\ X \arrow[r, hook, "i"] & X'' \end{tikzcd}$$

Soit F un sous-espace de dimension finie de Z. $F \cap X$ est contenue dans un sous-espace E de X avec

$$d(E\ ,\ \ell_\infty^{\dim E}) \leqslant \lambda\ .$$

On peut donc trouver un opérateur i_F avec

$$\|i_F\| \leqslant \lambda\ ,\quad i_F|_{F\cap X} = \mathrm{id}$$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, "i_F"] & \\ \cup & \\ F \cap X \subset E \approx_\lambda \ell_\infty^{\dim E} \end{tikzcd}$$

Posons, alors,

$$\begin{cases} T_F(x) = i_F(x)\ , & \text{si } x \in F \\ = 0\ , & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur la famille filtrante croissante des sous-espaces de dimension finie de Z. On posera

$$T(x) = \lim_{x\in\mathcal{U}} T_F(x)\ ,\ \text{limite pour } \sigma(X''\ ,\ X')\ .$$

Il est clair que T répond à la question.

C. Q. F. D.

Une conséquence facile de cette proposition est la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - Les espaces $\mathcal{L}_2$ sont exactement ceux qui sont isomorphes à des espaces de Hilbert.

Remarquons aussi que, dans la proposition 1, si X est séparable et $1 < p < \infty$, alors on peut prendre pour $L^p(\mu)$ l'espace $L^p[0\ ,\ 1]$ lui-même.

LINDENSTRAUSS et ROSENTHAL ont montré dans [11] une réciproque à la proposition 1.

PROPOSITION 3. - Tout sous-espace complémenté d'un espace $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, est soit un espace $\mathcal{L}_p$, soit un espace $\mathcal{L}_2$.

Pour $1 < p < \infty$, on peut maintenant caractériser les $\mathcal{L}_p$-espaces. X est un $\mathcal{L}_p$-espace (resp. $\mathcal{L}_p$-espace séparable) ou un $\mathcal{L}_2$-espace (resp. $\mathcal{L}_2$-espace séparable) si, et seulement si, X est isomorphe à un sous-espace complémenté d'un $L^p(\mu)$ (resp. de $L^p[0\ ,\ 1]$).

On pourra trouver dans l'étude de LINDENSTRAUSS et ROSENTHAL des propriétés supplémentaires très interessantes des $\mathcal{L}_p$-espaces. Citons, par exemple, les propriétés suivantes.

PROPOSITION 4. - Tout sous-espace complémenté d'un $\mathcal{L}_p$-espace est, soit $\mathcal{L}_p$, soit $\mathcal{L}_2$.

PROPOSITION 5. - Le dual d'un espace $\mathcal{L}_p$ est un espace $\mathcal{L}_q$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

Nous allons maintenant étudier de manière plus précise les sous-espaces complémentés de $L^p(0\ ,\ 1)$, $1 < p < \infty$.

2. Sous-espaces complémentés de $L^p(0\ ,\ 1)$, $1 < p < \infty$.

L'étude précédente montre que ces espaces sont, soit isomorphes à ℓ_2 , soit des $\mathcal{L}_p$-espaces séparables. L'étude de LINDENSTRAUSS et PELCZYŃSKI [12] ne permettait d'exhiber qu'un nombre fini de tels espaces (à un isomorphisme près), à savoir L^p, ℓ_p , $\ell_2 \oplus \ell_p$ et $(\bigoplus \ell_2)_{\ell_p}$. ROSENTHAL a montré dans [15] que l'espace X_p engendré dans $L^p(0\ ,\ 1)$ par une suite de variables aléatoires symétriques, indépendantes, ne prenant que trois valeurs, n'est isomorphe à aucun des espaces cités plus haut et est un $\mathcal{L}_p$-espace. A partir de cet espace X_p , SCHECHTMAN a montré dans [16] que l'on peut construire une suite de $\mathcal{L}_p$-espaces séparables, deux à deux non isomorphes entre eux. En effet, il a montré que l'espace $X_p^{\otimes n} \subset L^p(0\ ,\ 1)^n$ ne peut contenir aucun isomorphe à $\ell_{p_1} \otimes \ell_{p_2} \dots \otimes \ell_{p_n}$ si $p < p_1 < p_2 \dots < p_n < 2$. Par contre, l'espace $X_p^{\otimes 2n}$ contient toujours un tel espace. On voit alors que la suite $X_p^{\otimes 2^k}$ est donc une suite de $\mathcal{L}_p$-espaces séparables et deux à deux non isomorphes entre eux.

Tous les $\mathcal{L}_p$-espaces séparables que nous connaissons possèdent des bases inconditionnelles. On ne sait pas si cette propriété est générale. ZIPPIN, JOHNSON et ROSENTHAL ont étudié dans [5], les structures des $\mathcal{L}_p$-espaces séparables, et ont obtenu les deux résultats suivants.

THÉORÈME 1. - Les $\mathcal{L}_p$-espaces séparables, $1 < p \leqslant \infty$, possèdent une base.

THÉORÈME 2. - Soit X un $\mathcal{L}_p$-espace, $1 < p \leqslant \infty$, tel que X' soit séparable, alors X possède une "shrinking f. d. d.". C'est-à-dire qu'il existe une suite X_n de sous-espaces de dimension finie de X telle que tout élément x s'écrive de manière unique $x = \sum_n P_n x$, $P_n x \in E_n$, et P_n étant une projection de X sur X_n , les espaces $P_n^*(X^*)$ engendrent X^* .

Le théorème 2 s'applique en particulier aux $\mathcal{L}_p$-espaces séparables, $1 < p < \infty$, et il a permis à JOHNSON et ZIPPIN dans [6] de caractériser les $\mathcal{L}_p$-espaces qui se plongent dans ℓ_p .

THÉORÈME 3. - Tout $\mathcal{L}_p$-espace qui se plonge dans ℓ_p est isomorphe à ℓ_p .

L'étude des sous-espaces de $L^p(0\ ,\ 1)$ qui se plongent dans ℓ_p a été faite par JOHNSON et ODELL, pour $p > 2$. Ils ont démontré dans [4] que tout sous-espace de $L^p(0\ ,\ 1)$, $p > 2$, qui ne contient aucun isomorphe à ℓ_2 est plongeable dans ℓ_p . Ce résultat, joint au théorème 3, montre que, pour $p > 2$, un $\mathcal{L}_p$-espace séparable qui ne contient aucun isomorphe à ℓ_2 est isomorphe à ℓ_p . Pour $2 > p$, on utilise alors un résultat suppémentaire démontré par PELCZYŃSKI et ROSENTHAL dans [14].

PROPOSITION 6. - Si un sous-espace de $L^p(0, 1)$ contient un isomorphe à ℓ_2, alors il contient un sous-espace complémenté isomorphe à ℓ_2.

En appliquant ce résultat au dual X' de X, on voit que, si X ne contient aucun isomorphe à ℓ_2, alors X' n'en contient pas non plus (car X est réflexif). De plus, si X est un $\mathcal{L}_p$-espace, alors X' est un $\mathcal{L}_q$-espace, et $q > 2$. Donc, d'après ce qui précède, X' est ismorphe à ℓ_q, et par conséquent X est isomorphe à ℓ_p. On peut donc énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 4. - Tout sous-espace complémenté de $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, qui ne contient aucun isomorphe à ℓ_2 est isomorphe à ℓ_p.

Signalons encore une dernière propriété des sous-espaces complémentés de $L^p(0, 1)$ démontrée par KADEC et PEŁCZYŃSKI dans [7].

THÉORÈME 5. - Soit X un sous-espace complémenté de $L^p(0, 1)$

1° ou bien X est isomorphe à ℓ_2

2° ou bien X contient un sous-espace isomorphe à ℓ_p et complémenté dans X.

Ayant étudié les sous-espaces complémentés de $L^p(0, 1)$, il est naturel de se demander quels sont les espaces X qui sont plongeables dans $L^p(0, 1)$ et y sont toujours complémentés. La réponse à ce problème est maintenant totale et donnée par le résultat suivant.

THÉORÈME 6. - La classe est vide, si $p < 2$.
La classe est réduite aux espaces de Hilbert pour $p \geqslant 2$.

Il est clair en effet que, si tout plongement de X dans $L^p(0, 1)$ est complémenté dans $L^p(0, 1)$, alors X est, soit isomorphe à ℓ_2, soit un $\mathcal{L}_p$-espace séparable. On sait, d'après le travail de KADEC et PEŁCZYŃSKI [7], que, pour $p \geqslant 2$, tout isomorphe à ℓ_2 est complémenté dans $L^p(0, 1)$. Par contre, le résultat récent de BENNET, DOR, GOODMAN, JOHNSON et NEWMAN [2] montre que ceci est faux pour $1 < p < 2$.

Il est facile de voir que si X est dans la classe étudiée, alors tout sous-espace complémenté de X y est aussi. Par conséquent, la classe ne peut contenir un $\mathcal{L}_p$-espace que si elle contient déjà ℓ_p. Or, on sait qu'il existe dans L^p des sous-espaces isomorphes à ℓ_p et non complémentés. Ce résultat est dû à ROSENTHAL [15] pour $p > 2$, et à BENNET, DOR, GOODMAN, JOHNSON et NEWMAN [2] pour $p < 2$.

On peut toutefois se demander si, dans L^p, un sous-espace suffisamment proche de L^p n'est pas complémenté dans L^p.

Problème. - Existe-t-il une constante λ_p telle que, si X est un sous-espace de L^p qui vérifie $d(X, L^p) \leq \lambda_p$, alors X est complémenté dans L^p ?

Signalons pour conclure que L^p est un espace primaire pour $1 \leq p < \infty$ [1].

Nous allons maintenanr étudier les sous-espaces complémentés de $L^1(0\ ,\ 1)$, mais cette étude ne se ramène pas aux $\mathcal{L}_1$-espaces séparables.

3. Sous-espaces complémentés de $L^1(0\ ,\ 1)$.

Nous avons déjà vu que tout sous-espace complémenté de $L^1(0\ ,\ 1)$ est un $\mathcal{L}_1$-espace, mais la réciproque est fausse. LINDENSTRAUSS a construit un contre-exemple dans [9].

Jusqu'à présent on ne connait que deux types d'isomorphismes pour les sous-espaces complémentés de L^1 , à savoir L^1 et ℓ_1 .

Signalons deux propriétés très intéressantes de ces sous-espaces.

PROPOSITION 7. - Tout sous-espace complémenté de L^1 contient un sous-espace complémenté isomorphe à ℓ_1 .

En effet, un tel espace ne peut être réflexif puisque son dual est un espace injectif. La proposition résulte alors du travail de KADEC et PELCZYŃSKI [7].

PROPOSITION 8. - Tout sous-espace complémenté de L^1 qui possède la propriété de Radon-Nybodim est isomorphe à ℓ_1 .

Ce résultat est dû à LEWIS et STEGALL [8].

Comme au paragraphe précédent, on peut se demander quelle est la classe des Banach X telle que tout plongement de X dans L^1 soit complémenté dans L^1 . En utilisant la proposition 7 et la même remarque que pour L^p , on voit que si la classe n'est pas vide elle contient nécessairement ℓ_1 . Le problème pour ℓ_1 se ramène facilement à la question suivante : "Est-ce-que tout plongement de ℓ_1 dans lui-même est complémenté dans ℓ_1 ?".

En liaison avec ce problème, signalons le résultat de DOR [3] qui donne une réponse partielle.

PROPOSITION 9. - Il existe une constante $\lambda \geq 4/3$ telle que, si X est un sous-espace de L^1 vérifiant $d(X\ ,\ L^1) \leq \lambda$, alors X est complémenté dans L^1 .

Le problème est donc d'augmenter cette constante λ , éventuellement jusqu'à l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALSPACH (D.), ENFLO (P.) and ODELL (E.). - On the structure of $\mathcal{L}_p$-spaces $(1 < p < \infty)$, Studia Math., Warszawa, t. 60, 1977, p. 79-90.

[2] BENNET (G.), DOR (L. E.), GOODMAN (V.), JOHNSON (W. B.) and NEWMAN (C. M.). - On uncomplemented subspaces of L_p , $1 < p < 2$, Israel J. Math., t. 26, 1977, p. 178-187.

[3] DOR (L. E.). - On projections on L_1, Annals of Math., Series 2, t. 102, 1975, p. 463-474.

[4] JOHNSON (W. B.) and ODELL (E.). - Subspaces of L_p which imbed into ℓ_p, Compositio Math., Groningen, t. 28, 1974, p. 37-49.

[5] JOHNSON (W. B.), ROSENTHAL (H. P.) and ZIPPIN (M.). - On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces, Israel J. Math., t. 9, 1971, p. 488-506.

[6] JOHNSON (W. B.) and ZIPPIN (M.). - On subspaces of quotients of $(\sum G_n)_{\ell_p}$ and $(\sum G_n)_{c_0}$, Israel J. Math., t. 13, 1972, p. 311-316.

[7] KADEC (M. I.) and PEŁCZYŃSKI (A.). - Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p, Studia Math., Warszawa, t. 21, 1962, p. 161-176.

[8] LEWIS (D. R.) and STEGALL (C.). - Banach spaces whose duals are isomorphic to $\ell_1(\Gamma)$, J. funct. Analysis, t. 12, 1973, p. 177-187.

[9] LINDENSTRAUSS (J.). - On a certain subspace of ℓ_1, Bull. Acad. polon. Sc., Série Sc. math., astr. et phys., 3e série, t. 12, 1964, p. 539-542.

[10] LINDENSTRAUSS (J.). - Extension of compact operators. - Providence, American mathematical Society, 1964 (Memoirs of the American mathematical Society, 48).

[11] LINDENSTRAUSS (J.) and ROSENTHAL (H. P.). - The $\mathcal{L}_p$-spaces, Israel J. Math., t. 7, 1969, p. 325-349.

[12] LINDENSTRAUSS (J.) and PEŁCZYŃSKI (A.). - Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math., Warszawa, t. 29, 1967, p. 275-326.

[13] PEŁCZYŃSKI (A.). - Projections in certain Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 19, 1960, p. 209-228.

[14] PEŁCZYŃSKI (A.) and ROSENTHAL (H. P.). - Localization techniques in L^p spaces, Studia Math., Warszawa, t. 52, 1974/75, p. 263-289.

[15] ROSENTHAL (H. P.). - On the subspaces of L^p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent Random variables, Israel J. Math., t. 8, 1970, p. 273-303.

[16] SCHECHTMAN (G.). - Examples of $\mathcal{L}_p$-spaces $(1 < p \neq 2 < \infty)$, Israel J. Math., t. 22, 1975, p. 138-147.

(Texte reçu le 3 avril 1978)

Michèle CAPON
9 Résidence Les Côteaux
Chemin du Bois des Rames
91400 ORSAY