Gilles Godefroy

Une remarque sur les isomorphismes entre $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$ et $L^{\infty}([0,1];dx)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, nº 2 (1977-1978), exp. nº C8, p. C1-C2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A13_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 8, 2 p.

UNE REMARQUE SUR LES ISOMORPHISMES ENTRE $\ell^\infty(\underset{\sim}{N})$ ET $L^\infty([0\ ,\ 1]\ ;\ dx)$

par Gilles GODEFROY

Il est bien connu que les espaces $\ell^\infty(\underset{\sim}{N})$ et $L^\infty([0\ ,\ 1]\ ;\ dx)$, que nous désignerons par ℓ^∞ et L^∞ , sont isomorphes. Rappelons la démonstration : On explicite aisément un plongement φ_1 de ℓ^∞ dans L^∞ , un plongement φ_2 de L^∞ dans ℓ^∞ . On montre ensuite, en utilisant une recurrence transfinie, que chacun de ces espaces est facteur direct dans tout Banach le contenant. Enfin, après avoir remarqué que chacun d'eux est isomorphe à son carré, on utilise le "lemme d'accordéon" de Pelczinski.

On veut, ici, souligner que, dans un sens qui sera précisé ci-dessous, <u>il n'y a pas d'isomorphisme explicitable entre</u> ℓ^∞ <u>et</u> L^∞ .

En effet, soit $\varphi : \ell^\infty \longrightarrow L^\infty$ un isomorphisme. On peut, bien sûr, supposer que $\|\varphi\| \leqslant 1$. Soient $B_1(\ell^\infty)$ et $B_1(L^\infty)$ les boules unités fermées. On munit ces ensembles des topologies $\sigma(\ell^\infty\ ,\ \ell^1)$ et $\sigma(L^\infty\ ,\ L^1)$, et on pose

$$k = (B_1(\ell^\infty)\ ,\ \sigma(\ell^\infty\ ,\ \ell^1))\ ,\quad K = (B_1(L^\infty)\ ,\ \sigma(L^\infty\ ,\ L^1))\ .$$

Les espaces k et K sont des compacts métrisables. Il est raisonnable d'affirmer que, si φ est donnée de façon explicite, alors l'application $\varphi_{|k} : k \longrightarrow K$ a la propriété de Baire faible. Supposons donc que ce soit le cas. Soit alors $f \in L^1$. La restriction de $f \circ \varphi$ à k a alors la propriété de Baire faible. Or, d'après un résultat de TALAGRAND [2], $f \circ \varphi_{|k}$ est alors continue. Donc, d'après le théorème de Banach-Dieudonné, $(f \circ \varphi) \in \ell^1$. L'isomorphisme φ serait alors continu de $(\ell^\infty\ ,\ \sigma(\ell^\infty\ ,\ \ell^1))$ dans $(L^\infty\ ,\ \sigma(L^\infty\ ,\ L^1))$, et serait alors le transposé d'un isomorphisme entre ℓ^1 et L^1 . Or, ces deux espaces ne sont pas isomorphes.

<u>Remarque</u>. - Une démonstration analogue, utilisant cette fois un résultat de CHRISTENSEN ([1], théorème 4.10), montre que l'isomorphisme inverse $\varphi^{-1} : L^\infty \longrightarrow \ell^\infty$, n'a pas la propriété de Baire forte relativement aux topologies préfaibles.

Examinons plus attentivement l'"obstacle à l'explicitabilité" qui se présente. Les propriétés $\ell^\infty \simeq \ell^\infty \times \ell^\infty$ et $L^\infty \simeq L^\infty \times L^\infty$, ainsi que le "lemme d'accordéon" de Pelczinski, se démontrent de façon directe. Considérons, de plus, le plongement

$$\begin{aligned} \varphi_1 :\ & \ell^\infty \longrightarrow L^\infty \\ & (a_n) \longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^\infty a_n\, \chi_{A_n} \end{aligned},$$

où $(A_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ est une famille d'ouverts disjoints de $[0\ ,\ 1]$. L'application

$$\pi : L^\infty \longrightarrow L^\infty$$

$$f \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{A_n} f(x)\,dx\right) \times \frac{\chi_{A_n}}{\int_{A_n} dx}$$

est une projection de L^∞ sur $\varphi_1(\ell^\infty)$.

La démonstration classique de l'existence d'un isomorphisme entre ℓ^∞ et L^∞, jointe aux remarques ci-dessus, permet alors d'affirmer <u>qu'on ne peut expliciter à la fois un plongement</u> ψ <u>de</u> L^∞ <u>dans</u> ℓ^∞ <u>et une projection</u> π <u>de</u> ℓ^∞ <u>sur</u> $\psi(L^\infty)$.

Lorsque π est explicitée, par exemple si φ est un isomorphisme et $\pi = \mathrm{Id}(\ell^\infty)$, le plongement ψ ne pourra être explicité.

Inversement, considérons un plongement ψ explicité. Par exemple,

$$\psi : L^\infty \longrightarrow \ell^\infty$$

$$f \longmapsto \frac{1}{b_n - a_n} \int_{a_n}^{b_n} f(t)\,dt ,$$

où $\{(a_n\ b_n)\}_{n\in\underset{\sim}{N}} = \{(p, q) \in (\underset{\sim}{Q} \cap [0 , 1]) \times (\underset{\sim}{Q} \cap [0 , 1])\ ;\ p < q\}$. Alors, l'espace $\psi(L^\infty)$ sera facteur direct dans ℓ^∞, mais on ne pourra expliciter aucun de ses supplémentaires topologiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHRISTENSEN (J. P. R.). - Topology and Borel structure. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1974 (North-Holland Mathematics Studies, 10 ; Notas de Matematica, 51).

[2] TALAGRAND (M.). - Les fonctions affines sur $[0 , 1]^{\underset{\sim}{N}}$ ayant la propriété de Baire faible sont continues, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 15e année, 1975/76, Communication n° 7, 3 p.

(Texte reçu le 29 juin 1978)

Gilles GODEFROY
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05