SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

MICHEL TALAGRAND

Algèbres d'ensembles sur lesquelles toutes les mesures σ-additives sont bornées

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, nº 2 (1977-1978), exp. nº C6, p. C1-C3

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A11_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 6, 3 p.

ALGÈBRES D'ENSEMBLES
SUR LESQUELLES TOUTES LES MESURES σ-ADDITIVES SONT BORNÉES

par Michel TALAGRAND

Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de parties d'un ensemble. Une fonction μ de $\mathfrak{A}$ dans $\underset{\sim}{R}$ est dite une mesure σ-additive, lorsqu'elle est additive et que $\mu(A_n) \longrightarrow 0$, pour toute suite $(A_n) \downarrow 0$. Lorsque $\mathfrak{A}$ est une σ-algèbre, il est bien connu que toute mesure σ-additive sur $\mathfrak{A}$ est bornée. J. DIESTEL demande [1] si la réciproque est exacte. Nous allons voir qu'il n'en est rien. Plus précisément, disons qu'une algèbre possède la propriété d'interpolation si la condition suivante est vérifiée :

(PI) Pour toute suite croissante (A_n) , et toute suite décroissante (B_n) de $\mathfrak{A}$ telles que $A_n \subset B_n$, pour tout n , il existe $C \in \mathfrak{A}$ avec $A_n \subset C \subset B_n$, pour tout n .

Naturellement, si $\mathfrak{A}$ est une σ-algèbre, elle vérifie (PI).

EXEMPLE 1. - Il existe une algèbre $\mathfrak{A}$ qui ne vérifie pas (PI) (donc n'est pas une σ-algèbre), mais telle que toute mesure σ-additive sur $\mathfrak{A}$ soit bornée.

Pour montrer cela, fixons un ultrafiltre non trivial $\mathfrak{U}$ sur $\underset{\sim}{N}$. Considérons l'ensemble $\mathfrak{A}$ des éléments $A \subset \underset{\sim}{Z}$ tels que l'on ait

$$\{n \in \underset{\sim}{N} ;\ n \in A\} \cup \{n \in \underset{\sim}{N} ;\ -n \in A\} \notin \mathfrak{U}$$

ou bien

$$\{n \in \underset{\sim}{N} ;\ n \in A\} \cap \{n \in \underset{\sim}{N} ;\ -n \in A\} \in \mathfrak{U} .$$

Il est bien clair que $\mathfrak{A}$ est une algèbre.

Elle ne possède pas la propriété d'interpolation. En effet, si on pose $A_n = [0 , n]$ et $B_m = \underset{\sim}{Z} \setminus]-m , -1[$, on a $A_n \subset B_n$, pour tout n , la suite (A_n) est croissante et la suite (B_m) décroissante. La seule partie C de $\underset{\sim}{Z}$, telle que $A_n \subset C \subset B_n$, pour tout n , est $\underset{\sim}{N}$, mais on n'a pas $\underset{\sim}{N} \in \mathfrak{A}$.

Montrons que toute mesure σ-additive est bornée sur $\mathfrak{A}$. Soit μ une mesure non bornée sur $\mathfrak{A}$. Alors la construction standard donne une suite (A_n) d'éléments disjoints de $\mathfrak{A}$ tels que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = +\infty$. Pour $A \in \mathfrak{A}$, on a

$$A = \bigcup_n A \cap [-n , n] .$$

On peut donc supposer les A_n finis et même contenus dans $\underset{\sim}{N}$. Posons

$$B_1 = \bigcup_p A_{2p} \quad \text{et} \quad B_2 = \bigcup_p A_{2p+1} .$$

On a, par exemple, $B_1 \notin \mathfrak{U}$, donc $B_1 \in \mathfrak{A}$. Mais, alors $\mu(B_1) = \lim_k \sum_{p=1}^{k} A_{2p}$, ce qui est absurde.

EXEMPLE 2. - Il existe une algèbre $\mathfrak{A}$ vérifiant (PI), et portant une mesure σ-additive non bornée.

On prend, pour $\mathfrak{A}$, l'algèbre des ouverts fermés de $\beta\underset{\sim}{\mathbb{N}}$. Pour $A \subset \underset{\sim}{\mathbb{N}}$, désignons par $\tilde{A}$ l'ouvert fermé associé.

Si $(\tilde{A}_n)$ est une suite croissante, et $(\tilde{B}_n)$ une suite décroissante de $\mathfrak{A}$, et si $\tilde{A}_n \subset \tilde{B}_n$, pour tout n, on a $A_n \subset B_n$, pour tout n, et la suite (A_n) est croissante, la suite (B_n) décroissante. Donc si $C = \bigcup_n A_n$, on a $\tilde{A}_n \subset \tilde{C} \subset \tilde{B}_n$, pour tout n, ce qui montre que $\mathfrak{A}$ possède (PI).

Si, pour $C \in \mathfrak{A}$, on a $C = \bigcup_n C_n$, avec $C_n \in \mathfrak{A}$, par compacité, C est une réunion finie des C_n. Donc, toute mesure additive sur $\mathfrak{A}$ est σ-additive.

L'ensemble des éléments de ℓ_∞ de la forme χ_A, pour $A \subset \underset{\sim}{\mathbb{N}}$, engendre un sous-espace vectoriel de ℓ_∞ de dimension algébrique infinie. Il existe donc une forme linéaire h (non continue) sur ℓ_∞, qui n'est pas bornée sur l'ensemble des χ_A. La mesure μ, définie sur $\mathfrak{A}$ par $\mu(\tilde{A}) = h(\chi_A)$, est alors une mesure σ-additive non bornée sur $\mathfrak{A}$.

Il semble donc que, pour une algèbre $\mathfrak{A}$, la propriété que toutes les mesures σ-additives sur $\mathfrak{A}$ soient bornées est de nature assez nouvelle. Il serait peut être intéressant de l'étudier en détail.

PROPOSITION 3. - Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de parties d'un ensemble. Supposons la condition suivante vérifiée : "Pour toute suite (A_n) d'éléments disjoints de $\mathfrak{A}$, il existe des partitions $(A_n^p)_{1\leq p\leq n}$ des A_n en des éléments de $\mathfrak{A}$ tels que, pour toute suite ℓ d'entiers p_n, avec $1 \leq p_n \leq n$, il existe une sous-suite (p_{n_ℓ}) telle que $\bigcup_\ell A_{n_\ell}^{p_{n_\ell}} \in \mathfrak{A}$."

Alors toute mesure σ-additive sur $\mathfrak{A}$ est bornée.

Preuve. - Soit m une mesure non bornée sur $\mathfrak{A}$. Il existe alors une suite disjointe (A_n) de $\mathfrak{A}$, avec $|m(A_n)| \geq n$ (on le voit à l'aide du procédé d'extraction classique). Soit alors $(A_n^p)_{p\leq n}$ les partitions des A_n fournies par la condition de l'énoncé. Alors, pour chaque n, existe p_n tel que $|m(A_n^{p_n})| \geq 1$. En particulier, si $B_\ell = A_{n_\ell}^{p_{n_\ell}}$, on a $|m(B_\ell)| = 1$. Mais, puisque les B_ℓ sont disjoints et que leur réunion est dans $\mathfrak{A}$, m n'est pas σ-additive.

C. Q. F. D.

Problème 4. - La condition de la proposition 3 est-elle nécessaire pour que toute mesure σ-additive sur $\mathfrak{A}$ soit bornée ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIESTEL (J.). - Problems in vector measure, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 17e année, 1977/78, n° 21.

(Texte reçu le 19 juin 1978)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05