Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean Ecalle

Un analogue des fonctions automorphes : les fonctions résurgentes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, nº 1 (1977-1978), exp. nº 11, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_1_A5_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, n° 11, 9 p.

2 février 1978

UN ANALOGUE DES FONCTIONS AUTOMORPHES : LES FONCTIONS RÉSURGENTES

par Jean ECALLE

Résumé. - On introduit ici des algèbres de fonctions analogues aux fonctions automorphes, en ce sens qu'elles sont définies sur une surface de Riemann équivalente au demi-plan de Poincaré et qu'elles présentent, par rapport à l'action d'un certain groupe fuchsien, des propriétés d'invariance plus faibles que celles des fonctions automorphes classiques. On esquisse ensuite quelques applications, notamment aux problèmes de l'analyse et de la synthèse harmoniques dans certains groupes importants.

1. L'algèbre $\underline{A}(\Omega)$ et les opérateurs autogènes.

Soit $\mathbf{\Omega}$ un sous-groupe additif discret de $\mathbb{C}$. On se limitera ici aux sous-groupes de dimension 1. Prenons donc $\mathbf{\Omega} = \omega_0 \mathbb{Z}$, et $\mathbf{\Omega}^* = \omega_0 \mathbb{Z}^*$. Soit $\mathcal{R}$ la surface de Riemann recouvrement universel de $\mathbb{C} -^{\bullet} \mathbf{\Omega}$, et soit $P^{\bullet}$ la projection sur $\mathbb{C} -^{\bullet} \mathbf{\Omega}$ du point courant P de $\mathcal{R}$. Soit enfin $\mathbf{\Gamma}$ le groupe des automorphismes $\Gamma : P \longrightarrow \Gamma(P)$ de $\mathcal{R}$ qui se projettent en des automorphismes

$$\Gamma^{\bullet} : z \longrightarrow \Gamma^{\bullet}(z) = z + \omega \text{ de } \mathbb{C} -^{\bullet} \mathbf{\Omega} .$$

Alors $\omega \in \mathbf{\Omega}$, et on assimile la translation $\Gamma^{\bullet}$ à son pas ω. $\mathbf{\Gamma}$ est un groupe fuchsien, sans éléments elliptiques. On peut trouver dans $\mathbf{\Gamma}$ trois éléments paraboliques R, S, T

(i) de projections $R^{\bullet} = 0$, $S^{\bullet} = \omega_0$, $T^{\bullet} = -\omega_0$,

(ii) soumis à la seule relation $RST = 1_{\mathbf{\Gamma}}$,

(iii) engendrant, ensemble, le groupe $\mathbf{\Gamma}$.

Le triplet (R, S, T) est unique à un automorphisme interne près dans $\mathbf{\Gamma}$. Supposons-le fixé. Désignons par Q_0 le point frontière de $\mathcal{R}$ invariant par R. $\mathbf{\Gamma} Q_0$ est situé au-dessus de Ω. Supposons Q_0 situé au-dessus de 0 (i. e. $Q_0^{\bullet} = 0$).

Remarque. - Soit λ la fonction automorphe classique. Alors l'application

$$z \longrightarrow \frac{\omega_0}{2\pi i} \log(1 - \lambda(z))^{-1} = \frac{4\omega_0}{\pi i} \sum_k \log \frac{(1 + \exp k\pi i z)}{(\pi - \exp k\pi i z)} \quad (k \text{ impair } \geqslant 1)$$

est conforme du demi-plan de Poincaré $\mathcal{P} = \{z ; \operatorname{Im} z > 0\}$ sur la surfade $\mathcal{R}$, et elle transforme le groupe des homographies de $\mathcal{P}$: $z \longrightarrow (az + b)/(cz + d)$ (a, d entiers impairs ; c, b pairs) en le groupe $\mathbf{\Gamma}$ d'automorphismes de $\mathcal{R}$.

Introduisons maintenant l'algèbre $\underline{D}(\mathbf{\Omega}) = \mathbb{C} \oplus (1 - R)\, \mathbb{C}[\mathbf{\Gamma}]$ formée des combinaisons linéaires finies de la forme

(1) $$D = \gamma_0 + \sum_i \gamma_i (1 - R) \Gamma_i \quad (\gamma_0 , \gamma_i \in \mathbb{C} ; \ \Gamma_i \in \mathbf{\Gamma}) ,$$

et munie de la multiplication induite par la loi de $\mathbf{\Gamma}$.

PROPOSITION 1. - Soient φ et ψ deux germes de fonctions analytiques en 0 (supposés intégrables en 0 s'ils sont multiformes), et soit $\varphi * \psi$ le germe défini au voisinage de 0 par :

(2) $$(\varphi * \psi)(z) = \int_0^z \varphi(z - \zeta)\, \psi(\zeta)\, d\zeta .$$

(a) Alors, si φ et ψ se prolongent lytiquement le long de tout chemin de $\underset{\sim}{C} -^{\bullet} \underset{\sim}{\Omega}$, il en est de même de $\varphi * \psi$.

(b) Si on outre, pour tout $\omega \in \underset{\sim}{\Omega}$ et tout chemin $\mathfrak{J}$ partant de 0, évitant $\underset{\sim}{\Omega}$ et aboutissant en ω, les prolongements selon $\mathfrak{J}$ de φ et ψ sont intégrables en ω, il en est de même de $\varphi * \psi$.

Par suite, interprètés comme fonctions holomorphes uniformes sur $\mathbb{R}$ (1) et munis de la loi $*$, les germes qui vérifient (a) et (b) forment une algèbre commutative, qu'on notera provisoirement $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega})$. Les éléments de $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega})$ sont dits fonctions résurgentes.

Or, on a une action naturelle $\Gamma : \varphi \longrightarrow \Gamma\varphi = \varphi \circ \Gamma^{-1}$ de $\underset{\sim}{\Gamma}$ dans $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega})$, laquelle induit par linéarité une action $\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{\Omega})$ dans $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega})$.

PROPOSITION 2. - Il existe une application linéaire unique de $\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{\Omega})$ dans $\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{\Omega}) \otimes \underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{\Omega})$

(3) $$D \longrightarrow \sigma(D) = \sum_i D_i \otimes D'_i$$

telle qu'on ait, pour tout $D \in \underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{\Omega})$ et toute paire $\varphi , \psi \in \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega})$:

(4) $$D(\varphi * \psi) = \sum_i (D_i\, \varphi) * (D'_i\, \psi) .$$

On dit que les $D \in \underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{\Omega})$ définissent des opérateurs autogènes sur $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega})$.

Exemple 1. - $\sigma(R) = R \otimes R$ (R définit donc un automorphisme de $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega})$).

Exemple 2. - Soit $D = (1 - R)SR^2 S$. On peut alors montrer que

$$\begin{aligned}\sigma(D) = &- (1 - R)S \otimes (1 - R)S + 1 \otimes (1 - R)SRS + (1 - R)SRS \otimes 1 \\ &+ R \otimes (1 - R)SR^2 S + (1 - R)SR^2 S \otimes R - R \otimes (1 - R)SRS \\ &- (1 - R)SRS \otimes R - (1 - R)SR \otimes (1 - R)RS - (1 - R)RS \otimes (1 - R)SR .\end{aligned}$$

Exemple 3. - Posons $D_0 = 1$ et, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}^*$, $D_{n\omega_0} = (1 - R)S^n$, $D_{-n\omega_0} = (1 - R)T^n$. Alors

$$\sigma(D_\omega) = \sum_{\omega_i + \omega_j = \omega} D_{\omega_i} \otimes D_{\omega_j} \quad (\omega, \omega_i , \omega_j \in \underset{\sim}{\Omega} ; \ \omega_i/\omega \text{ et } \omega_j/\omega \geqslant 0).$$

Exemple 4. - Posons $\Delta_0 = 0$ et, pour tout $\omega \in \underset{\sim}{\Omega}^*$, définissons Δ_ω au moyen des fonctions génératrices formelles suivantes :

---

(1) Pour fixer sans ambiguité la correspondance : germes $\longrightarrow$ fonctions, on convient que le voisinage du point Q_0 relève le voisinage de 0 qui sert à définir la convolution $*$, et que le voisinage du point SQ_0 soit contenu dans le relèvement du domaine $0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

(5) $$\sum_{n\geq 1} t^n \Delta_{n\omega_0} = \log(\sum_{n\geq 0} t^n D_{n\omega_0}) = \log\{(1 - tRS)(1 - tS)^{-1}\} \quad ({}^2),$$

(5 bis) $$\sum_{n\geq 1} t^n \Delta_{-n\omega_0} = \log(\sum_{n\geq 0} t^n D_{-n\omega_0}) = \log\{(1 - tRT)(1 - tT)^{-1}\} \quad ({}^2).$$

On montre alors que, pour tout $\omega \in \underset{\sim}{\Omega}^*$,

(6) $$\sigma(\Delta_\omega) = \Delta_\omega \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_\omega ,$$

ou encore

(6 bis) $$\Delta_\omega(\varphi * \psi) = (\Delta_\omega \varphi) * \psi + \varphi * (\Delta_\omega \psi) .$$

Autrement dit, les Δ_ω, et par suite aussi les $\Delta_{\omega,n} = R^{-n} \Delta_\omega R^n$, définissent des dérivations de l'algèbre $\underset{\sim}{A}(\Omega)$. Inversement, on montre que l'algèbre de Lie formée des $\Delta \in \underset{\sim}{D}(\Omega)$, qui sont des dérivations de $\underset{\sim}{A}(\Omega)$, est engendré librement par les $\Delta_{\omega,n}$ ($\omega \in \underset{\sim}{\Omega}^*$, $n \in \underset{\sim}{Z}$). Quant à la sous-algèbre de $\underset{\sim}{D}(\Omega)$, formée des dérivations d'ordre quelconque, on la note $\underset{\sim}{\Delta}(\Omega)$. Elle a pour base les

$$\Delta_{\tilde\omega,\tilde n} = \Delta_{\omega_r,n_r} \cdots \Delta_{\omega_1,n_1} \quad (\ \tilde\omega \text{ et } \tilde n \text{ multiindices}).$$

Remarque. - Munis de leur multiplication et de la loi σ, les espaces $\underset{\sim}{D}(\Omega)$ et $\underset{\sim}{\Delta}(\Omega)$ sont pourvus chacun d'une structure de bigèbre (au sens de BOURBAKI [1]).

Unitarisation de $\underset{\sim}{A}(\Omega)$. - On est conduit à ajouter à $\underset{\sim}{A}(\Omega)$ une unité, qu'on note δ et qu'il est naturel d'assimiler au Dirac de masse 1 concentrée au point-frontière Q_0. On ajoute également à $\underset{\sim}{A}(\Omega)$ les φ qui admettent des pôles simples ([3]) aux points-frontière $Q \neq Q_0$. Autrement dit, pour $P \in \mathcal{R}$ voisin de $Q \in \{\underset{\sim}{\Gamma} Q_0\} -^{\bullet} \{Q_0\}$, on a :

(7) $$\varphi(P) = (P^\bullet - Q^\bullet)^{-1} A_Q + \psi(P) \quad (\ A_Q \in \underset{\sim}{C} ,\ \ \psi \text{ intégrable en } Q\ ),$$

où $P^\bullet$ (resp. $Q^\bullet$) désigne la projection de P (resp. Q) sur $\underset{\sim}{C} -^{\bullet} \underset{\sim}{\Omega}$ (resp. $\underset{\sim}{\Omega}$).

C'est l'algèbre ainsi élargie qu'on notera $\underset{\sim}{A}(\Omega)$. Elle vérifie encore les propositions 1 et 2 à condition de poser :

(8) $$(1 - R)\Gamma\varphi = 2\pi i . A_Q . \delta + (1 - R)\Gamma\psi ,$$

pour tout φ de la forme (7) et tout $\Gamma \in \underset{\sim}{\Gamma}$ vérifiant $\Gamma Q = Q_0$.

Sous-algèbres $\underset{\sim}{A}(p , \Omega)$. - Pour tout $p \in \underset{\sim}{N}^*$, les φ de $\underset{\sim}{A}(\Omega)$ vérifiant

(9) $$(1 - R^p)\varphi = 0 \quad \text{et} \quad (1 - R)(1 - R^p)\Gamma\varphi = 0 \qquad (\forall\ \Gamma \in \underset{\sim}{\Gamma})$$

forment une sous-algèbre de $\underset{\sim}{A}(\Omega)$, notée $\underset{\sim}{A}(p , \Omega)$, et dans laquelle agit la bigèbre d'opérateurs $\underset{\sim}{D}(p , \Omega) = \underset{\sim}{D}(\Omega)/(1 - R^p)$ qui est égale (comme algèbre) au quotient de $\underset{\sim}{D}(\Omega)$ par l'idéal bilatère engendré par $(1 - R)$. On désigne de même par

---

([2]) En développant $\log\{\ldots\}$, bien tenir compte de la non-commutativité de R, S, T.

([3]) Plus proprement, ce sont les projections des φ sur $\underset{\sim}{C} -^{\bullet} \underset{\sim}{\Omega}$ qui admettent des pôles simples aux points $Q^\bullet = \omega \in \underset{\sim}{\Omega}$.

$\underset{\sim}{\Delta}(p\ ,\ \underset{\sim}{\Omega}) = \underset{\sim}{\Delta}(\underset{\sim}{\Omega})/(1 - R^p)$ la bigèbre des dérivations d'ordre quelconque.

C'est l'algèbre $\underset{\sim}{A}(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$ qui est la plus simple. En effet, au voisinage de tout point frontière $Q \neq Q_0$, les φ de $\underset{\sim}{A}(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$ sont de la forme :

(10) $$\varphi(P) = \psi_1(P^\bullet - Q^\bullet) + (P^\bullet - Q^\bullet)^{-1} A_Q + \psi_2(P^\bullet - Q^\bullet).\log(P^\bullet - Q^\bullet)\ ,$$

où A_Q est scalaire et où les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont <u>holomorphes en</u> 0 . De plus, si $\Gamma Q = Q_0$, on a :

(11) $$((1 - R)\Gamma\varphi)(P) = 2\pi i.A_Q.\delta + 2\pi i.\psi_2(P^\bullet)\ .$$

Enfin, $\underset{\sim}{\Delta}(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega}) = \underset{\sim}{D}(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$, mais $\underset{\sim}{\Delta}(p\ ,\ \underset{\sim}{\Omega}) \subset \underset{\sim}{D}(p\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$ strictement pour $p \geqslant 2$.

2. Fonctions résurgentes, pseudovariables et représentations parfaites.

En général, si $\mathcal{A}$ désigne une algèbre de fonctions de n variables, le $\mathcal{A}$-module à gauche des dérivations de $\mathcal{A}$ est de dimension n . Par exemple, si $\mathcal{A}$ est l'algèbre des fonctions holomorphes sur un domaine $\mathcal{D} \subset \underset{\sim}{C}^n$, toute dérivation de $\mathcal{A}$ est de la forme $\sum \varphi_i(\partial/\partial z_i)$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\varphi_i \in \mathcal{A}$. Il en va autrement pour l'algèbre $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega})$: Ses éléments (c'est-à-dire les fonctions résurgentes) sont des fonctions holomorphes d'une seule variable et pourtant le $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega})$-module à gauche des dérivations de $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega})$ est de dimension infinie. Ceci suggère, chez les fonctions résurgentes, l'existence d'une infinité de "pseudo-variables". En fait, cette intuition peut être précisée.

Soient, en effet, $\underset{\sim}{\Delta}'(\underset{\sim}{\Omega})$ et $\underset{\sim}{\Delta}'(p\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$ <u>les algèbres commutatives</u> duales des espaces $\underset{\sim}{\Delta}(\underset{\sim}{\Omega})$ et $\underset{\sim}{\Delta}(p\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$ considérés comme <u>coalgèbres</u>. $\underset{\sim}{\Delta}'(\underset{\sim}{\Omega})$ et $\underset{\sim}{\Delta}'(p\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$ sont dites algèbres de <u>pseudo-variables</u> de $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega})$ et $\underset{\sim}{A}(p\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$. Soient $\{D_J\}$ une base de l'espace vectoriel $\underset{\sim}{\Delta}(\underset{\sim}{\Omega})$, et $\{Z^J\}$ la famille duale de $\underset{\sim}{\Delta}'(\underset{\sim}{\Omega})$. Alors les applications (où $\nu(\varphi)$ désigne la masse du Dirac de φ en Q_0) :

$$\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega}) \longrightarrow \underset{\sim}{\Delta}'(\underset{\sim}{\Omega}) \otimes \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega}) \ :\ \ \varphi \longrightarrow [\varphi] = \sum Z^J.D_J\ \varphi$$

$$\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Omega}) \longrightarrow \underset{\sim}{\Delta}'(\underset{\sim}{\Omega}) \ :\ \ \varphi \longrightarrow \langle\varphi\rangle = \sum Z^J.\nu(D_J\ \varphi)$$

ne dépendent pas du choix de la base $\{D_J\}$. En outre, ce sont des homomorphismes d'algèbres (qui correspondent aux "developpements en série de Taylor" classiques).

<u>Représentations parfaites</u>. - Bornons-nous pour simplifier à l'algèbre $\underset{\sim}{A}(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$. Dans les applications, on a besoin de construire des systèmes

$$W^{\tilde{\omega}} = W^{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r}$$

d'éléments de $\underset{\sim}{A}(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$ tels que

(12) $\Delta_\omega W^{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r} = W^{\omega_2,\ldots,\omega_r}$ (resp. $= 0$), si $\omega = \omega_1$ (resp. $\neq \omega_1$)

(bien-sûr $\omega\ ,\ \omega_1\ ,\ \ldots\ ,\ \omega_2 \in \underset{\sim}{\Omega}^*$) et tels que les $W^{\tilde{\omega}}$ vérifient la même "table de multiplication" que les éléments $Z^{\tilde{\omega}}$ de $\underset{\sim}{\Delta}'(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$ qui constituent la famille duale des éléments $\Delta_{\tilde{\omega}} = \Delta_{\omega_r} \ldots \Delta_{\omega_1}$ de $\underset{\sim}{\Delta}(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$. Un tel système de $W^{\tilde{\omega}}$ est dit (un peu improprement) une représentation parfaite de $\underset{\sim}{\Delta}'(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$ dans $\underset{\sim}{A}(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$. Le sytème $U^{\tilde{\omega}}$, défini par

$$(13)\quad U^{\omega_1,\dots,\omega_r}(P) = \frac{1}{(2\pi i)^r}\,\frac{1}{(\omega_1+\dots+\omega_r+P^\bullet)}$$
$$\times\int_0^{P^\bullet}\frac{dz_{r-1}}{\omega_1+\dots+\omega_{r-1}+Z_{r-1}}\int_0^{z_{r-1}}\frac{dz_{r-2}}{\omega_1+\dots+\omega_{r-2}+z_{r-2}}\cdots\int_0^{z_2}\frac{dz_1}{\omega_1+z_1}$$

vérifie bien la "table de multiplication" des $Z^{\tilde{\omega}}$, mais au lieu de (12) on a :

$$(12\text{ bis})\quad \Delta_{\omega_1+\dots+\omega_j}\,U^{\omega_1,\dots,\omega_r}$$
$$= U_{\omega_1,\dots,\omega_j}\,U^{\omega_{j+1},\dots,\omega_r}\qquad(\text{où les } U_{\tilde{\omega}} \text{ sont scalaires}).$$

Toutefois, en prenant des combinaisons linéaires judicieuses des $U^{\tilde{\omega}}$ (au moyen justement des coefficients $U_{\tilde{\omega}}$) on obtient une représentation parfaite $V^{\tilde{\omega}}$, dite représentation parfaite canonique (caractérisée par le fait que $V^{\tilde{\omega}}(P)\longrightarrow 0$ quand $P^\bullet\longrightarrow\infty$), et permettant de construire très facilement toutes les autres représentations parfaites.

3. Application aux groupes $\underset{\sim}{G}_t$ et $\underset{\sim}{G}_{t-}$. Position du problème.

Soit $\underset{\sim}{G}$ l'ensemble des séries formelles du type

$$(14)\qquad f(z) = z(1+\textstyle\sum_{n\geqslant 1} a_n\, z^{-n})\ ;\quad a_n\in\underset{\sim}{C}\ .$$

$\underset{\sim}{G}$ est un groupe pour la substitution des séries formelles :

$$f\ ,\ g\longrightarrow f\circ g = f(g)\ .$$

Considérons les sous-ensembles :

$$\underset{\sim}{G}_t\ :\ \limsup(|a_n|^{1/n}\, n^{-t})<\infty\ ;\quad \underset{\sim}{G}_{t-}\ :\ \lim(|a_n|^{1/n}\, n^{-t}) = 0\ .$$

$\underset{\sim}{G}_t$ (resp. $\underset{\sim}{G}_{t-}$) est un sous-groupe de $\underset{\sim}{G}$ si, et seulement si, $t\geqslant 0$ (resp. $t>0$). L'examen révèle que les groupes $\mathcal{G}$ ci-dessus sont de deux types, fort différents.

<u>Cas trivial</u>. - $\underset{\sim}{G}_1\subseteq\mathcal{G}\subseteq\underset{\sim}{G}$.

On montre [2] que les classes de conjugaison (pour les automorphismes internes) dans le groupe $\underset{\sim}{G}$ et dans chacun des sous-groupes $\underset{\sim}{G}_t$ (resp. $\underset{\sim}{G}_{t-}$) pour $t\geqslant 1$ (resp. $t>1$) peuvent être caractérisées au moyen de trois paramètres, à savoir :

l'entier $p = p(f)$, égal à l'indice du premier a_n non nul dans (14),

le complexe $\alpha = \alpha(f)$, égal à l'inverse de a_p ,

le complexe $\rho = \rho(f)$, égal à $\{((1-p)/2)$ + le coefficient de z^{-1} dans $(f(z)-z)^{-1}\}$ (4).

---

(4) $\rho(f)$ est un polynôme en a_p , a_{p+1} , ... , a_{2p} .

On a donc, pour chacun de ces groupes $\mathcal{G}$, une partition immédiate en classes de conjugaison $\mathcal{G}^{(p,\alpha,\rho)}$.

Cas interessant. - $\underset{\sim}{G}_0 \subseteq \mathcal{G} \subseteq \underset{\sim}{G}_{1-}$.

Au contraire, lorsque $t < 1$ (resp. $t \leqslant 1$), on montre [2] que chacun des ensembles $\underset{\sim}{G}_t^{(p,\alpha,\rho)}$ (resp. $\underset{\sim}{G}_{t-}^{(p,\alpha,\rho)}$) se scinde en une infinité de classes de conjugaison qu'il est impossible de paramétrer au moyen de scalaires tels que p,α,ρ , fonctions chacun d'un nombre fini de coefficients a_n de f . D'où l'existence, sur chacun de ces groupes $\mathcal{G}$, de fonctions centrales (i. e. invariantes par automorphisme interne) non triviales, qu'il s'agit de déterminer.

Un système $\Theta = \{\theta_i \ , \ i \in I\}$ de fonctions centrales sur $\mathcal{G}$ sera dit complet si :

$$\theta_i(f) = \theta_i(g) \text{ , pour tout } i \text{ ,} \Longrightarrow f \text{ et } g \text{ conjugués par automorphisme interne dans } \mathcal{G} .$$

De même, le système Θ sera dit libre si, pour tout i , il existe f , $g \in \mathcal{G}$ tels que

$$\theta_i(f) \neq \theta_i(g) \quad \text{et} \quad \theta_j(f) = \theta_j(g) \text{ , pour tout } j \neq i .$$

Méthode. - On peut bien doter ces groupes $\mathcal{G}$ d'une topologie naturelle, mais comme celle-ci n'est pas localement compacte et que les groupes $\mathcal{G}$ ne sont pas de Lie ([5]), aucune des méthodes classiques (représentations unitaires, caractères etc.) ne s'applique ici. Ce qu'il faut, en fait, c'est recourir aux fonctions résurgentes. Le plus simple consiste à étudier séparément les fonctions centrales sur chacun des ensembles $\mathcal{G}^{(p,\alpha,\rho)}$. C'est ainsi que nous procéderons, en nous limitant au groupe $\mathcal{G} = \underset{\sim}{G}_{1-}$ (le plus grand) puis en indiquant thès brièvement comment passer aux $\mathcal{G}$ généraux, et notamment au groupe $\underset{\sim}{G}_0$ (le plus petit), dont les éléments sont des séries convergentes.

4. Résurgence et autorésurgence.

Soit f l'élément générique de $\underset{\sim}{G}_{1-}^{(1,\alpha,0)}$.

(15) $f(z) = z(1 + \sum_{n\geq 1} a_n z^{-n})$; $\alpha(f) = (a_1)^{-1} \neq 0$; $\rho(f) = - a_2(a_1)^{-2} = 0$.

Soit f^* l'unique série de la forme

$$f^*(z) = z + \sum_{n\geq 1} \alpha_n z^{-n} \tag{16}$$

et solution de l'équation d'Abel

$$f^* \circ f(z) = a_1 + f^*(z) . \tag{17}$$

Enfin, introduisons l'original formel de Laplace de la série $f(z) - z$:

([5]) en effet, tout voisinage de l'élément neutre contient des f qui ne sont insérables dans aucun sous-groupe continu à un paramètre réel.

(17) $$\Phi(z) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} .$$

PROPOSITION 3.

(a) La série f^* est en général divergente, mais la série Φ qu'on en déduit a un rayon de convergence non nul. Elle définit au voisinage de 0 un germe analytique qui se prolonge selon tout chemin de $\underset{\sim}{C} -^{\bullet} \underset{\sim}{\Omega}$, où $\underset{\sim}{\Omega} = 2\pi i \alpha \underset{\sim}{Z}$. Par suite, la série Φ détermine une fonction holomorphe (encore notée Φ) sur la surface de Riemann $\mathcal{R}$, recouvrement universel de $\underset{\sim}{C} -^{\bullet} \underset{\sim}{\Omega}$.

(b) Cette fonction Φ est en fait une fonction résurgente, élément de l'algèbre $\underset{\sim}{A}(1, \underset{\sim}{\Omega})$.

(c) En outre, Φ vérifie les équations d'autorésurgence suivantes :

(19) $$\Delta_\omega \Phi = A_\omega \exp_*(\omega\Phi) \qquad (\forall\ \omega \in \underset{\sim}{\Omega}^*)$$

où les Δ_ω sont les dérivations de $\underset{\sim}{A}(1, \underset{\sim}{\Omega})$ introduites au § 1, où les $A_\omega = A_\omega(f)$ sont des scalaires complexes fonctions de f, et où $\exp_*$ désigne l'exponentielle de l'algèbre $\underset{\sim}{A}(1, \underset{\sim}{\Omega})$.

Remarque. - Par itération de (19), et compte tenu de $\underset{\sim}{\Delta}(1, \underset{\sim}{\Omega}) = \underset{\sim}{D}(1, \underset{\sim}{\Omega})$, on montre que, pour tout $\Gamma \in \underset{\sim}{\Gamma}$ (différent de $1_{\underset{\sim}{\Gamma}}$), on a

(20) $$(1 - R)\Gamma\Phi = B_\Gamma \exp_*(\omega\Phi) , \text{ avec } B \in \underset{\sim}{C} \text{ et } \omega = \Gamma^{\bullet} \in \underset{\sim}{\Omega} .$$

En rapprochant (20) de (10) et (11), on voit que le "facteur régulier" de la "partie singulière" de Φ au point $Q = \Gamma^{-1} Q_0$ est lié de manière simple à la fonction Φ elle-même. En d'autres termes, Φ "resurgit", légèrement modifiée, en ses "sihgularités" [6]. D'où l'expression de fonction autorésurgente.

5. Analyse et synthèse harmonique.

PROPOSITION 4 (analyse harmonique). - Chacune des applications

$$f \longrightarrow A_{\omega_1}(f) \ldots A_{\omega_r}(f) ,$$

où $\omega_1 + \ldots + \omega_r = 0$, est une fonction centrale sur $\underset{\sim}{G}_{1-}^{(1,\alpha,0)}$. Quant aux $A_\omega(f)$, ce sont des fonctions centrales généralisées, en ce sens que

$$A(h^{-1} \circ f \circ h) = \chi(h)\ A(f) ,$$

où le scalaire $\chi(h)$ ne dépend pas de f, et l'ensemble des $\{A_\omega(f)\}$ constitue un système complet et libre de fonctions centrales généralisées sur $\underset{\sim}{G}_{1-}^{(1,\alpha,0)}$.

PROPOSITION 5.(synthèse harmonique). - Inversement, soit un système $\{A_\omega , \omega \in \underset{\sim}{\Omega}^*\}$ de scalaires, et soit une solution Φ du système (19). Alors, il correspond à Φ

---

(6) En fait $Q = \Gamma^{-1} Q_0$ est un point frontière de $\mathcal{R}$. A strictement parler, il s'agit donc des singularités, non pas de Φ, mais de sa projection multiforme sur $\underset{\sim}{C}$.

<u>un élément unique</u> $f \in \underset{\sim}{G}_{1-}^{(1,\alpha,0)}$, <u>et l'on a</u> $A_\omega(f) = A_\omega$, <u>pour tout</u> ω .

Comme la correspondance entre f et Φ est très simple (cf. (15), (16), (17), (18)), on voit que le problème de la synthèse harmonique se ramène à la solution du système (19), qui comprend une infinité d'équations aux "dérivés partielles" dans l'algèbre de résurgence $\underset{\sim}{A}(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$.

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> $W^{\tilde{\omega}}$ <u>une représentation parfaite de</u> $\underset{\sim}{\Delta}'(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{A}'(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$ (cf. § 2). <u>Alors, si la série</u> (<u>étendue à tous les multiindices</u> $\tilde{\omega} = \{\omega_1\ ,\ \dots\ ,\ \omega_r\}$, $r \in \underset{\sim}{N}$)

$$\Phi = \sum A_{\omega_1} \dots A_{\omega_r}\ \omega_1(\omega_1 + \omega_2)\dots(\omega_1 + \dots + \omega_{r-1})W^{\omega_1,\dots,\omega_r} \tag{21}$$

<u>converge uniformément sur tout compact de</u> $\mathcal{R}$, Φ <u>est solution de</u> (19) <u>et, inversement, toutes les solutions de</u> (19) <u>sont de la forme</u> (21) (<u>pour d'autres</u> $W^{\tilde{\omega}}$).

PROPOSITION 6 bis. - <u>Soient</u> $U^{\tilde{\omega}}$ <u>et</u> $U_{\tilde{\omega}}$ <u>comme au</u> § 2. <u>Alors, si les scalaires</u> B_ω <u>sont tels que</u> $\sum_\omega |B_\omega| < \infty$, <u>la série</u>

$$\Phi = \sum B_{\omega_1} \dots B_{\omega_r}\ \omega_1(\omega_1 + \omega_2)\dots(\omega_1 + \dots + \omega_{r-1})U^{\omega_1,\dots,\omega_r} \tag{21 bis}$$

<u>converge uniformément sur tout compact de</u> $\mathcal{R}$, <u>et elle est solution du système</u> (19) <u>avec</u>

$$A_\omega = \sum_{\omega_1+\dots+\omega_r=\omega} B_{\omega_1} \dots B_{\omega_r}\ \omega_1(\omega_1 + \omega_2)\dots(\omega_1 + \dots + \omega_{r-1})U_{\omega_1,\dots,\omega_r} .$$

On traite le cas $\rho = 0$, $p \neq 1$ de la même manière, en remplaçant $\underset{\sim}{A}(1\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$ par $\underset{\sim}{A}(p\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$. Enfin, on passe au cas général (ρ et p quelconque, $\mathcal{G}$ quelconque $\subset \underset{\sim}{G}_{1-}$) en se plaçant dans certaines extensions adéquates de $\underset{\sim}{A}(p\ ,\ \underset{\sim}{\Omega})$.

6. Aperçu sur d'autres applications des fonctions résurgentes.

(a) <u>Itération et équations fonctionnelles</u>. - De même que nous avons associé une fonction autorésurgente Φ à la solution de l'équation d'Abel (17), on peut associer d'autres fonctions autorésurgentes aux solutions des équations d'itération

$$g \circ g = f \tag{22}$$

ou

(22 bis) $g \circ g \circ g = f$ etc. (f donnée dans $\mathcal{G} \subseteq \underset{\sim}{G}_{1-}$; g inconnue dans $\underset{\sim}{G}$),

ou d'équations fonctionnelles encore plus générales, telles que

$$g \circ f_1 \circ g \circ f_2 \circ \dots \circ g \circ f_n(z) \equiv z \tag{23}$$

(f_i données dans $\mathcal{G} \subseteq \underset{\sim}{G}_{1-}$; g inconnue dans $\underset{\sim}{G}$),

et en tirer des renseignements très fins sur ces solutions.

(b) <u>Théorie de la transcendance</u>. - Soit $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie formelle du groupe $\mathcal{G}$. Le générateur infinitésimal f_* de f est défini par la relation

$$f_* \circ f = f_*(d/dz)f ,$$

jointe à une condition fixant le premier coefficient. Quant au crochet de Lie de $\mathcal{L}$, il est donné par

$$[f_* , g_*] = f_* \frac{d}{dz} g_* - g_* \frac{d}{dz} f_* .$$

Cela étant, lorsque $\underset{\sim}{G}_0 \subseteq \mathcal{G} \subseteq \underset{\sim}{G}_{1-}$, en utilisant des fonctions autorésurgentes Ψ associées aux éléments de $\mathcal{L}$, on montre que si $f_* , g_* \in \mathcal{L}$, alors ni $f_* + g_*$ ni $[f_* , g_*]$ n'appartiennent jamais à $\mathcal{L}$, sauf dans deux cas triviaux :

(i) f_*/g_* = constante rationnelle,

(ii) les coefficients des séries f_* et g_* satisfont aux mêmes propriétés de croissance que ceux des éléments de $\mathcal{G}$.

Autre exemple. - On montre que, cas triviaux mis à part, si les solutions g_1, g_2, ..., g_r d'équations du type (22) ou (22 bis) ne sont pas dans $\mathcal{G}$, alors leur produit $g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_r$ lui non plus n'est jamais dans $\mathcal{G}$. Ceci permet de préciser la structure des extensions transcendantes des groupes $\mathcal{G}$, obtenus par adjonction des racines carrées, cubiques, etc. d'itération.

(c) Lien avec la théorie des graphes. - Soit $\varphi , \psi \in \underset{\sim}{A}(\Omega)$. Comme conséquence de la proposition 2, la partie singulière du produit $\varphi * \psi$ en un point donné $Q \in \delta\mathcal{R}$ ne dépend que des parties singulières des facteurs φ et ψ en un nombre fini de points $Q_i \in \delta\mathcal{R}$, qui sont fonctions de Q seul. On déduit de là une relation d'ordre sur l'ensemble $\delta\mathcal{R}$, laquelle se ramène, moyennant une certaine notion d'homotopie symétrique, à des considérations de théorie des graphes (Voir à ce sujet [3]).

(d) Représentations des algèbres de Lie finies. - On montre que, pour toute algèbre de Lie $\underset{\sim}{U}$ sur $\underset{\sim}{C}$ de base finie $\{e_1 , \dots , e_n\}$, et pour tout choix $\{\omega_1 , \dots , \omega_n\}$ de n éléments distincts de $\underset{\sim}{\Omega}^*$, il existe une sous-algèbre $\underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{A}(1 , \underset{\sim}{\Omega})$ telle que l'application $e_i \longrightarrow \Delta_{\omega_i}$ soit une représentation de rang n de l'algèbre de Lie $\underset{\sim}{U}$ dans $\mathrm{End}(\underset{\sim}{B})$.

7. Références.

[1] BOURBAKI (N.). - Groupes et algèbres de Lie, Chapitre II : Algèbres de Lie libres. - Paris, Hermann, 1972 (Act. scient. et ind., 1349 ; Bourbaki, 37).

[2] ECALLE (J.). - Théorie des invariants holomorphes, Publications mathématiques d'Orsay, N67 (74-09).

[3] ECALLE (J.). - Théorie des fonctions résurgentes, Publications mathématiques d'Orsay (à paraître).

(Texte reçu le 31 mai 1978)

Jean ECALLE
125 rue Marceau
91120 PALAISEAU