

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GILLES GODEFROY

Préduaux d'espaces de Banach

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. n° C3, p. C1-C8

http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A8_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PREDUAUX D'ESPACES DE BANACH

par Gilles GODEFROY

Soit E un espace de Banach. Je dirai que " F est un prédual de E " ou que " E a pour prédual F ", si F est un espace de Banach tel que F' soit isométrique à E .

Je dirai que " E a un unique prédual" ou que " F est l'unique prédual de E " si tout espace de Banach G , tel que G' soit isométrique à E , est isométrique à F .

Le but de ce travail est d'établir des conditions d'existence ou d'unicité du prédual pour certains espaces de Banach.

1. Existence du prédual.

Soit E un Banach, E' son dual, E'' son bidual. Soit

$$\mathcal{S}_E = \{F \text{ s. e. v. de } E'' ; F \text{ est } \sigma(E'', E')\text{-fermé, } E \oplus F = E''\},$$

où on identifie, comme dans toute la suite, E à un sous-espace de E'' .

On a la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Soit E un espace de Banach. On a l'équivalence

1° E est isomorphe au dual d'un espace de Banach.

2° $\mathcal{S}_E \neq \emptyset$.

Démonstration.

1° \Rightarrow 2°. - Supposons que E soit isomorphe à G' , où G est considéré comme un sous-espace fortement fermé, et $\sigma(E', E)$ dense de E' . On a alors $E \oplus G^\perp = E''$, d'où $G^\perp \in \mathcal{S}_E$. Par conséquent $\mathcal{S}_E \neq \emptyset$.

2° \Rightarrow 1°. - Soit $F \in \mathcal{S}_E$. Soit G s. e. v. de E' tel que $G^\perp = F$. L'espace G' est isomorphe à $E''/G^\perp = E''/F$, donc à E .

C. Q. F. D.

Remarque. - La condition $\mathcal{S}_E \neq \emptyset$ n'est pas suffisante pour que E soit isométrique au dual d'un espace de Banach.

Soit alors $F \in \mathcal{S}_E$. L'orthogonal F^\perp de F dans E' est $\sigma(E', E)$ -dense. On pose

$$\alpha(F) = \left(\sup \{ \varepsilon ; \beta_\varepsilon(E') \subseteq F^\perp \cap B_1(E') \} \right)^{-1} \sigma(E', E)$$

On a $1 \leq \alpha(F) < +\infty$. En effet, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2. - Soit $F \in \mathcal{S}_E$, et soit F^\perp l'orthogonal de F dans E' . L'application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow (F^\perp)' \\ f &\longmapsto f|_{F^\perp} \end{aligned}$$

est un isomorphisme. On a $\|\varphi^{-1}\| = \alpha(F)$, et $\|\varphi\| \leq 1$.

Démonstration. - On a $E'' = E \oplus F$. L'application

$$\begin{aligned} \psi : E'' &\longrightarrow (F^\perp)' \\ f &\longmapsto f|_{F^\perp} \end{aligned}$$

induit donc un isomorphisme φ entre $E = E''/F = E''/(F^\perp)^\perp$ et $(F^\perp)'$. On a évidemment $\|\varphi\| \leq 1$, où on a muni $(F^\perp)'$ de la norme duale de la norme induite sur F^\perp par E' .

φ est un isomorphisme ; cela signifie que toute forme linéaire continue h sur F^\perp se prolonge en une forme linéaire \tilde{h} de E . On a

$$\|\varphi^{-1}\| = \sup_{\|h\|=1} \|\tilde{h}\|.$$

On a $\|\varphi^{-1}\| \leq \alpha(V)$. En effet, si $|h| \leq 1$ sur $F^\perp \cap B(E')$, alors $|\tilde{h}| \leq 1$ sur $\overline{F^\perp \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)}$, donc $|\tilde{h}| \leq 1$ sur $B_{1/\alpha(V)}(E')$. Et, par conséquent, $|\tilde{h}| \leq \alpha(V)$ sur $B_1(E')$.

De plus, soit

$$\frac{1}{\alpha(V)} + \varepsilon > \eta > \frac{1}{\alpha(V)} \quad \text{et} \quad x \in B_\eta(E') \setminus \overline{F^\perp \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)}.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $h_0 \in E$ tel que $h_0(x) > 1$, et $|h_0| \leq 1$ sur $\overline{F^\perp \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)}$. On a alors $h_0 = \tilde{h}$, avec $\|h\| \leq 1$. De plus,

$$h_0\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \frac{1}{\frac{1}{\alpha(V)} + \varepsilon};$$

donc

$$\|\varphi^{-1}\| \geq \frac{1}{\frac{1}{\alpha(V)} + \varepsilon}.$$

Ceci étant vrai pour tout ε , on a $\|\varphi^{-1}\| = \alpha(V)$.

C. Q. F. D.

On peut à présent énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Soit E un espace de Banach. On a les équivalences :

- (i) E est isométrique au dual d'un espace de Banach,
- (ii) $\exists F \in \mathcal{S}_E$ tel que $\alpha(F) = 1$,
- (iii) $\exists V \subseteq E'$ tel que

$$\begin{cases} (a) & E \oplus V^\perp = E'' , \\ (b) & \overline{V \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)} = B_1(E') . \end{cases}$$

Démonstration. - (ii) et (iii) sont évidemment équivalents ; en effet, (iii) n'est qu'une ré-écriture de (ii), où $V^\perp = F$.

On a (i) \Rightarrow (iii). En effet, si E est isométrique à V^\perp , alors l'image canonique $i(V)$ de V dans E' vérifie (a) et (b).

Enfin (ii) \Rightarrow (i). En effet, soit $F \in \mathcal{S}_E$ tel que $\alpha(F) = 1$. La proposition 3 montre que l'application $\varphi : E \longrightarrow (F^\perp)'$, qui vérifie $\|\varphi\| \leq 1$ et $\|\varphi^{-1}\| = 1$, est une isométrie.

C. Q. F. D.

Parenthèse. - Soit \mathcal{C} l'ensemble des tonneaux $\sigma(E', E)$ -compacts de E' . Soit \mathcal{N} l'ensemble des normes sur E' , équivalentes à la norme duale ; pour toute $N \in \mathcal{N}$, soit $B_1^N(E')$ la boule unité de (E', N) . Pour tout $K \in \mathcal{C}$, soit $\alpha_0(K)$ l'espace de Banach des applications affines continues sur K , nulles en 0. On déduit des méthodes précédentes le résultat suivant : Soit $K \in \mathcal{C}$. On a l'équivalence :

- (i) $\alpha_0(K)$ est isométrique à un dual,
 (ii) $\exists F \in \mathcal{S}_E$, $N \in \mathcal{N}$ tels que $K = F^\perp \cap B_1^N(E')$ $\sigma(E', E)$.

Par conséquent, l'application

$$\Psi : \mathcal{S} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\sigma(E', E)} \\ (F, N) \longmapsto F^\perp \cap B_1^N(E')$$

est une surjection de $\mathcal{S}_E \times \mathcal{N}$ sur l'ensemble des tonneaux $K \in \mathcal{C}$ tels que $\alpha_0(K)$ soit isométrique à un dual.

Les résultats obtenus dans la suite du travail montrent que, sous certaines hypothèses, E' a la propriété de Radon-Nikodym, ou bien E est séparable et $E \neq \mathcal{L}^1(N)$, l'application Ψ est injective.

On déduit immédiatement de ce résultat l'équivalence :

- (i) $\exists K \in \mathcal{C}$ tel que $\alpha_0(K)$ soit isométrique à un dual,
 (ii) $\mathcal{S}_E \neq \emptyset$.

Cette équivalence se déduit également de la proposition 1.

Montrons à présent que, dans un cas particulier, on peut obtenir un résultat plus maniable que le théorème 3.

PROPOSITION 4. - Soit E un Banach tel que E' soit séparable. Soit

$$\mathcal{R} = \{f \in E'' ; \text{Ker } f \cap B_1(E') \text{ soit } \sigma(E', E)\text{-dense dans } B_1(E')\}.$$

\mathcal{R} est un s. e. v. $\sigma(E'', E')$ -fermé de E'' .

Démonstration. - Remarquons que si E' est séparable, toute $f \in E''$ est de 1re classe pour $\sigma(E', E)$. Par conséquent, $\text{Ker } f \cap B_1(E')$ est \mathcal{S}_δ dans $B_1(E')$. On a donc

$$f \in \mathcal{R} \iff \text{Ker } f \cap B_1(E') \text{ est } \sigma(E', E)\text{-résiduel dans } B_1(E').$$

Or, on a

$$\text{Ker} (\lambda f_1 + \mu f_2) \supseteq \text{Ker} f_1 \cap \text{Ker} f_2 .$$

L'intersection de deux résiduels étant un résiduel, \mathcal{R} est un s. e. v. de E'' .

Pour démontrer que \mathcal{R} est $\sigma(E'', E')$ -fermé, il suffit de démontrer, d'après le théorème de Banach-Dieudonné, que $\mathcal{R} \cap B_1(E'')$ est $\sigma(E'', E')$ -fermé ; E' étant séparable, $B_1(E'')$ est métrisable. Il suffit donc de vérifier que si

$$f_n \in \mathcal{R}, f_n \longrightarrow f \text{ pour } \sigma(E'', E'), \text{ alors } f \in \mathcal{R} .$$

Or, on a

$$\text{Ker} f \cap B_1(E') \supseteq B_1(E') \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker} f_n \right) .$$

Une intersection dénombrable de résiduels étant un résiduel, on a $f \in \mathcal{R}$.

C. Q. F. D.

On a alors, avec les mêmes notations, le résultat suivant.

THÉOREME 5. - Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. On a l'équivalence

- (i) E est isométrique au dual d'un Banach,
- (ii) $E'' = E \oplus \mathcal{R}$.

Démonstration.

(i) \Rightarrow (ii). Soit F tel que F' soit isométrique à E . L'espace F s'identifie à un sous-espace de E' , tel que $F \cap B_1(E')$ soit $\sigma(E', E)$ -dense dans $B_1(E')$. Soit F^\perp l'orthogonal de F dans E'' . On a les relations suivantes

$$\left. \begin{array}{l} E \oplus F^\perp = E'' \\ \mathcal{R} \supseteq F^\perp \\ \mathcal{R} \text{ e. v.} \\ E \cap \mathcal{R} = \{0\} \end{array} \right\} \Longrightarrow \mathcal{R} = F^\perp ,$$

et, par conséquent, $E \oplus \mathcal{R} = E''$.

(ii) \Rightarrow (i). Supposons que $E \oplus \mathcal{R} = E''$. Soit F l'orthogonal de \mathcal{R} dans E' . L'espace E' étant séparable, il existe un ensemble dénombrable $D = \{f_n\}$ dans \mathcal{R} , qui est $\sigma(E'', E')$ -dense dans \mathcal{R} . On a $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker} f_n$, ce qui montre que $F \cap B_1(E')$ est résiduel, donc dense dans $B_1(E')$. L'espace \mathcal{R} appartient donc à \mathfrak{S}_E , et vérifie $\alpha(\mathcal{R}) = 1$. D'après le théorème 4, l'espace F' est isométrique à E .

C. Q. F. D.

Remarquons que l'implication (i) \Rightarrow (ii) ci-dessus n'utilise pas l'hypothèse " E' séparable", mais simplement le fait que \mathcal{R} soit un espace vectoriel. Ceci va nous permettre, dans la deuxième partie, d'établir des résultats d'unicité du préduel.

2. Unicité du préduel.

Soit E un espace de Banach, E' son dual, E'' son bidual. Nous noterons, dans

cette partie, $i(E)$ l'image de E par l'injection canonique de E dans E'' .

Dans l'esprit du théorème 5, on a le lemme suivant.

LEMME 6. - Soit E un Banach. Soit \mathcal{R} le sous-ensemble de E''' , défini par

$$\mathcal{R} = \{ \varphi \in E''' ; \text{Ker } \varphi \cap B_1(E'') \text{ est } \sigma(E'', E')\text{-dense dans } B_1(E'') \} .$$

On a les équivalences :

- (i) \mathcal{R} est un espace vectoriel,
- (ii) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{R}$, $\text{Ker } \varphi_1 \cap \text{Ker } \varphi_2 \cap B_1(E'')$ est dense dans $B_1(E'')$,
- (iii) $\mathcal{R} = i(E)^\perp$.

Si ces conditions sont vérifiées, E est l'unique préduel de E' .

Démonstration. - $i(E) \cap B_1(E'')$ est $\sigma(E'', E')$ -dense dans $B_1(E'')$. On a donc (iii) \Rightarrow (ii).

Il est, de plus, immédiat que (ii) \Rightarrow (i).

Montrons que (i) \Rightarrow (iii). On a toujours $\mathcal{R} \subseteq i(E)^\perp$. De plus, $\mathcal{R} \cap E' = \{0\}$, et $E''' = E' \oplus i(E)^\perp$. Donc

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{R} \text{ espace vectoriel} \\ \mathcal{R} \cap E' = \{0\} \\ E''' = E' \oplus i(E)^\perp \\ \mathcal{R} \supseteq i(E)^\perp \end{array} \right\} \Longrightarrow \mathcal{R} = i(E)^\perp .$$

De plus, si les conditions équivalentes (i), (ii), (iii) sont réalisées, on a $\mathcal{R} = i(E)^\perp$, d'où $i(E) = \mathcal{R}^\perp$ (orthogonal dans E''), d'après le théorème des bipolaires. L'espace $i(E)$, isométrique à E , est donc bien déterminé ; d'où l'unicité du préduel de E' .

C. Q. F. D.

Remarques. - Voilà un exemple où \mathcal{R} n'est pas un espace vectoriel. Soit $E = c_0(\mathbb{N})$. On a $E'' = \ell^\infty(\mathbb{N})$. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre non trivial sur \mathbb{N} . Soit

$$\begin{aligned} \varphi_1 \in \ell^\infty(\mathbb{N})' : \varphi_1(u) &= \lim_{\mathcal{U}} u(n) , \\ \varphi_2 \in \ell^\infty(\mathbb{N})' : \varphi_2(u) &= u(1) - \lim_{\mathcal{U}} u(n) . \end{aligned}$$

On voit aisément que φ_1 et $\varphi_2 \in \mathcal{R}$, mais $\varphi_1 + \varphi_2 \notin \mathcal{R}$.

Les conditions (i), (ii), (iii) du lemme 4 montrent en fait que l'espace E a une "unique position" dans son bidual, c'est-à-dire que si F est un préduel de E' , on a $i(F) = i(E)$.

Nous allons à présent appliquer le lemme 6 à montrer l'unicité de certains préduaux.

THÉORÈME 7. - Soit E un espace de Banach dont le dual E' est séparable et ne contient pas $\ell^1(\mathbb{N})$. Alors E est l'unique préduel de E' .

Démonstration. - Vérifions la condition (ii) du lemme 6. Si E' est séparable et ne contient pas $\ell^1(\mathbb{N})$, d'après la caractérisation de Rosenthal, toute $\varphi \in E'''$

est $\sigma(E'', E')$ de 1re classe. On a donc

$$\varphi \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \text{Ker } \varphi \cap B_1(E'') \text{ est résiduel dans } B_1(E'').$$

L'intersection de deux résiduels étant un résiduel, la condition (ii) est vérifiée.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 8. - Soit E un espace de Banach localement uniformément convexe. Alors E est l'unique préduel de E'.

Démonstration. - Dire que E est l. u. c. c'est dire que :

Si $x_\alpha \rightarrow x$ pour $\sigma(E, E')$, avec $x_\alpha \in B_1(E)$ et $\|x\| = 1$, alors $\|x_\alpha - x\| \rightarrow 0$.

On voit alors aisément que l'on a :

Si $x \in i(E)$, $\|x\| = 1$, $x_\alpha \in B_1(E'')$, $x_\alpha \rightarrow x$ pour $\sigma(E'', E') \Rightarrow \|x_\alpha - x\| \rightarrow 0$.

Vérifions alors la condition (iii). Si $\varphi \in E'''$ est nulle sur un ensemble $\sigma(E'', E')$ -dense de $B_1(E'')$, pour tout $x \in i(E)$, $\|x\| = 1$, il existe

$$(x_\alpha) \in B_1(E'') \cap \varphi^{-1}(0) \text{ tels que } x_\alpha \rightarrow x \text{ pour } \sigma(E'', E').$$

On a alors $\|x_\alpha - x\| \rightarrow 0$, d'où $\varphi(x) = 0$. φ est alors nulle sur $i(E)$, d'où $\mathcal{R} = i(E)^\perp$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 9. - Soit E un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym. Alors E est l'unique préduel de E'.

Démonstration. - Si E a la propriété de Radon-Nikodym, la boule unité de E est l'enveloppe convexe fortement fermée de ses points fortement exposés.

Or, on voit aisément que si x est fortement exposé dans $B_1(E)$, le point $i(x)$ est fortement exposé dans $B_1(E'')$, au moyen d'un élément de E' . Il existe donc $f \in E'$ telle que, $\forall \varepsilon$, $\exists \delta$ tel que

$$C = \{y \in B_1(E'') ; |f(y) - f(i(x))| < \delta\} \subseteq B_1(E'') \cap B(i(x), \varepsilon),$$

où $B(i(x), \varepsilon)$ désigne la boule fermée de E'' de centre $i(x)$ et de rayon ε .

On voit, comme précédemment, que si φ est nulle sur un ensemble $\sigma(E'', E')$ -dense de $B_1(E'')$, elle est nulle en tout point de $B_1(E)$ fortement exposé, et donc nulle sur E. La condition (iii) est donc vérifiée.

C. Q. F. D.

Remarques. - Michèle CAPON a démontré que, dans le théorème 7, l'hypothèse "E' séparable" était superflue.

Les hypothèses des propriétés 7, 8 et 9 sont vérifiées par les sous-espaces des espaces considérés, mais pas par les quotients.

Ces théorèmes permettent d'établir qu'un certain nombre d'espaces de Banach sont l'unique préduel de leur dual. Par exemple :

1° Les espaces à bidual séparable (théorème 7),

2° Les sous-espaces des espaces duaux WCG (théorème 9), et en particulier les sous-espaces des duaux séparables.

On retrouve par exemple le fait que $\mathcal{L}^1(\Gamma)$ est l'unique préduel de $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)$, ou que $\mathcal{K}(h)'$ est l'unique préduel de $\mathcal{E}(h)$. Et, de plus, leurs sous-espaces seront également des "préduaux uniques".

Remarquons de plus que si on renorme un espace E ayant la propriété de Radon-Nikodym, ou tel que $E' \neq \mathcal{L}^1(\mathbb{N})$, on obtient encore un tel espace, tandis que ce n'est pas vrai en général pour E l. u. c.

Enfin, les espaces L^1 , par exemple $L^1(\mathbb{R}, dt)$, qui sont unique préduel de leur dual (et ont même une "unique position" dans $(L^\infty)'$), n'entrent pas dans les classes définies par les théorèmes 7, 8 et 9 ; il serait intéressant de voir, si, dans le cas $E = L^2$, l'ensemble \mathcal{R} est un espace vectoriel.

On peut employer les théorèmes 8 et 9 de la façon suivante : soit F un Banach ; si on trouve un préduel de E l. u. c., ou ayant la propriété de Radon-Nikodym, ce sera nécessairement l'unique préduel.

Poursuivons par un énoncé plus géométrique.

PROPOSITION 10. - Soit E un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym, ou ayant un dual séparable ne contenant pas $\mathcal{L}^1(\mathbb{N})$. Soit K un tonneau $\sigma(E', E)$ -compact de E' . Alors, pour toute topologie \mathcal{C} d'e. l. c. s. sur E' telle que (K, \mathcal{C}) soit compact, on a $\mathcal{C}|_K = \sigma(E', E)|_K$.

Démonstration. - Soit \mathcal{C} une topologie d'e. l. c. s. sur E' telle que (K, \mathcal{C}) soit compact. L'hypothèse faite sur K montre qu'il existe une norme N sur E , équivalente à la norme initiale, telle que K soit la boule unité de $(E, N)'$.

Soit $\alpha_0^{\mathcal{C}}(K)$ l'espace des fonctions affines sur K , nulles en 0, et \mathcal{C} -continues. L'espace $\alpha_0^{\mathcal{C}}(K)$ est isométrique à (E, N) , et ces deux espaces ont même position dans $(E', j_K)'$, où j_K désigne la jauge sur E' associée à K . Or, la topologie $\mathcal{C}|_K$ s'identifie à la topologie de la convergence simple sur $\alpha_0^{\mathcal{C}}(K)$; et donc, sur K , les topologies \mathcal{C} et $\sigma(E', E)$ coïncident.

C. Q. F. D.

Exemple. - Sur tout tonneau $\sigma(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{L}^1)$ -compact de $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{N})$, il existe une seule topologie de compact induite par une topologie d'espace localement convexe sur $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{N})$.

Exemples de non-unicité du préduel.

1° $\mathcal{L}^1(\mathbb{N})$ admet pour préduaux :

- (i) tous les espaces $\mathcal{C}(K)$, où K est un compact dénombrable,
- (ii) un espace qui n'est pas un $\mathcal{C}(K)$.

2° $\mathcal{M}(\{0, 1\})$ admet pour préduaux tous les espaces $\mathcal{C}(K)$, où K est un com-

compact métrisable non dénombrable.

Ainsi, sur $B_1(\mathbb{K}([0, 1]))$, il existe, pour tout compact métrisable non dénombrable K , une topologie "localement convexe" \mathcal{C}_K telle que $\mathcal{E}(B_1(\mathbb{K}([0, 1]))) \simeq K$. On voit que, dans ce cas, il n'y a aucune topologie de compact "canonique".

Terminons par deux démonstrations complémentaires des résultats précédents.

(A) $\mathcal{L}^1(\Gamma)$ est l'unique préduel de $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)$. - Vérifions la propriété (iii) du lemme 4. Soit $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\Gamma)'$ telle que $\text{Ker } \varphi \cap B_1(\mathcal{L}^\infty(\Gamma)')$ soit $\sigma(\mathcal{L}^\infty(\Gamma)', \mathcal{L}^\infty(\Gamma))$ -dense dans $B_1(\mathcal{L}^\infty(\Gamma)')$. φ est-elle nulle sur $\mathcal{L}^1(\Gamma)$?

Identifions $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)'$ à $\mathbb{K}(\beta\Gamma)$. Soit x isolé dans $\beta\Gamma$. On voit aisément qu'on a le lemme suivant.

LEMME. - Soit K compact, x isolé dans K . Soit $\mu_\alpha \in B_1(\mathbb{K}(K))$ telles que $\mu_\alpha \rightarrow \varepsilon_x$ vaguement. Alors $\|\mu_\alpha - \varepsilon_x\| \rightarrow 0$.

Soient alors $\mu_\alpha \in B_1(\mathbb{K}(\beta\Gamma)) \cap \text{Ker } \varphi$ telles que $\mu_\alpha \rightarrow \varepsilon_x$ vaguement ; on a $\|\mu_\alpha - \varepsilon_x\| \rightarrow 0$, d'où $\varphi(\varepsilon_x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout x isolé dans $\beta\Gamma$, on a $\varphi \equiv 0$ sur $\mathcal{L}^1(\Gamma)$.

(B) Si E'' est séparable, E est l'unique préduel de E' . - Soit $\mathfrak{F}(E'')$ l'ensemble des s. e. v. fortement fermés de E'' . Soit

$$\mathcal{O} = \{V \in \mathfrak{F}(E''), V \cap B_1(E'') \text{ soit } \sigma(E'', E')\text{-dense dans } B_1(E'')\}.$$

Sans hypothèses particulières sur E'' , tout préduel de E appartient à \mathcal{O} , et est minimal dans \mathcal{O} . De plus, les conditions (i), (ii) et (iii) du lemme 6 sont encore équivalentes à la condition suivante :

(IV) (E) est le plus petit élément de \mathcal{O} .

Dans le cas où E'' est séparable, on voit aisément que \mathcal{O} est inductif ; il existe donc un élément minimal, ce qui explique le théorème 5. Cet élément minimal est unique, car \mathcal{O} est stable par intersection. En effet, si E'' est séparable, tout $V \in \mathfrak{F}(E'')$ est $\sigma(E'', E')\text{-}\mathcal{S}_\delta$. On a donc immédiatement l'unicité du préduel.

(Texte reçu le 5 mars 1977)

Gilles GODEFROY
18 villa du Danube
75019 PARIS