Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

MASAYUKI ITÔ

Sur l'équation $N^n = N$ pour un noyau de convolution N

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. nº C1, p. C1-C2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A7_0>

Séminaire CHOQUET C1-01
(Initiation à l'analyse)
16e année, 1976/77, Communication n° 1, 2 p. Novembre 1976

SUR L'ÉQUATION $N^n = N$ POUR UN NOYAU DE CONVOLUTION N

par Masayuti ITÔ

Soit X un groupe abélien localement compact et séparé. Pour un noyau de convolution N (c'est-à-dire une mesure de Radon positive) sur X, on note $N^1 = N$, $N^2 = N * N$, ..., $N^{n+1} = N^n * N$, ... dès que ceux-ci sont définis (au sens des mesures). Pour un noyau de convolution N sur X et pour un entier $n \geqslant 2$, on considère l'équation $N^n = N$.

M. KISHI l'a examinée dans le cas où $n = 2$, et obtenu le résultat suivant (voir [2]) :

THÉORÈME 1. - *Si* $N^2 = N$, *alors* $N = 0$, *ou bien* N *est égal à la mesure de Haar de masse* 1 *sur un certain sous-groupe compact de* X (1).

Nous nous proposons d'abord de donner la démonstration très simple du théorème 1. En l'utilisant, nous montrerons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - *Soit* n *un entier* $\geqslant 2$. *Pour que* $N^n = N$, *il faut et il suffit que* $N = 0$, *ou bien* N *est de la forme* $N = \xi * \varepsilon_x$ (1), *où* ξ *est la mesure de Haar de masse* 1 *sur un certain sous-groupe compact* Γ *et où* x *est un point de* X *vérifiant* $(n - 1)x \in \Gamma$.

On note ici ε_x *la mesure de Dirac du point* x.

Preuve du théorème 1. - Si $N \neq 0$ est à support compact, alors, en utilisant $N^2 = N$ et la transformation de Fourier, on voit immédiatement que N est la mesure de Haar de masse 1 sur un sous-groupe compact de X. Donc il suffit de montrer que le support de N, $\mathrm{supp}(N)$, est compact. Posons pour tout $p \geqslant 0$,

$$N_p = \frac{1}{1 + p} N ;$$

alors, pour $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ quelconques, $N_p - N_q = (q - p)N_p * N_q$ et $\lim_{p \to 0} N_p = N_0 = N$.

Par conséquent, $(N_p)_{p \geqslant 0}$ est la résolvante associée à N. Dans ce cas, il est bien connu que N vérifie le principe du balayage sur tout ouvert (2), et que,

---

(1) Pour un sous-groupe fermé Γ de X, une mesure de Haar ξ_Γ sur Γ, et pour $x \in X$, on note simplement $\xi_\Gamma * \varepsilon_x$ au lieu de $(\tilde{\varepsilon} \otimes \xi_\Gamma) * \varepsilon_x$, où $\tilde{\varepsilon}$ est la mesure de Dirac à l'origine dans X/Γ.

(2) On dit qu'un noyau de convolution N vérifie le principe du balayage sur tout ouvert si, pour une mesure de Radon positive μ dans X à support compact et pour un ouvert ω quelconque, il existe une mesure de Radon positive μ' portée par ω, telle que : (i) $N * \mu \geqslant N * \mu'$; (ii) $N * \mu = N * \mu'$ dans ω. Dans ce cas, on dit que μ' est une mesure balayée de μ sur ω relativement à N.

pour un filtre à droite $(V_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de voisinages compacts de l'origine avec $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha = X$,

$$\lim_\alpha N * \varepsilon_{\complement V_\alpha} = 0 \quad \text{(vaguement)} ,$$

où $\varepsilon'_{\complement V_\alpha}$ est une mesure balayée de ε sur $\complement V_\alpha$ relativement à N (voir par exemple [1]).

On peut supposer que $N \neq 0$. Alors il existe un voisinage compact V de 0 tel que $N \neq N * \varepsilon'_{\complement V}$. Comme

$$N * (\varepsilon - \varepsilon'_{\complement V}) = N * (N * (2 - \varepsilon'_{\complement V})) ,$$

on a

$$\{x + y \ ; \ x \in \mathrm{supp}(N) \ , \ y \in \mathrm{supp}(N * (\varepsilon - \varepsilon'_{\complement V}))\} = \mathrm{supp}(N * (\varepsilon - \varepsilon'_{\complement V})) \subset V .$$

Ceci donne immédiatement que $\mathrm{supp}(N)$ est compact.

<u>Preuve du théorème</u> 2. - On peut supposer que $N \neq 0$ et $n \geqslant 3$. Comme N^{n-1} a un sens, $N^{n-2} * N^n = N^{2n-2}$ est défini, et

$$(N^{n-1})^2 = N^n * N^{n-1} = N * N^{n-2} = N^{n-1} .$$

D'après le théorème 1, il existe un sous-groupe compact Γ de X tel que N^{n-1} soit égal à la mesure de Haar unité ξ sur Γ . Soit $-x \in \mathrm{supp}(N)$ quelconque. Alors $-(n-1)x \in \Gamma$ et $(n-1)x \in \Gamma$. Donc $(N * \varepsilon_x)^{n-1} = (N * \varepsilon_{-x})^n = \xi$. Comme $\mathrm{supp}(N * \varepsilon_{-x}) \ni 0$, on a $\mathrm{supp}(N * \varepsilon_x) \subset \Gamma$ et $\int dN = 1$.

On a alors

$$N = (N * \varepsilon_{-x}) * \varepsilon_x = (N * \varepsilon_x)^{n-1} * (N * \varepsilon_{-x}) * \varepsilon_{(n-1)_x} * \varepsilon_x$$
$$= \xi * (N * \varepsilon_{(n-1)_x} * \varepsilon_{(n-1)x} * \varepsilon_x = \xi * \varepsilon_x ,$$

d'où le théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ITÔ (M.). - Sur le principe relatif de domination pour les noyaux de convolution, Hiroshima Math. J., t. 5, 1975, p. 293-350.

[2] KISHI (M.). - Positive idempotents on a locally compact abelian group, Kôdai math. Semin. Reports, t. 27, 1976, p. 181-187.

(Texte reçu le 13 janvier 1977)

Masayuti ITÔ
Fugi-ga-oka 6-1
KONAN (Japon)