Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

RICHARD BECKER

Quelques propriétés des mesures coniques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. n° 5, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A1_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
16e année, 1976/77, n° 5, 16 p.

2 décembre 1976

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MESURES CONIQUES

par Richard BECKER

I. Préliminaires.

1. Notations et rappels. - Un "espace faible" E est un espace vectoriel muni d'une topologie faible séparée ; E' désigne le dual de E, et E^* le dual algébrique de E. Si V est un espace vectoriel ordonné, V^+ désigne le cône des éléments positifs de V, et on pose $V_b^* = (V^*)^+ - (V^*)^+$.

Soit E un espace faible ; on note $h(E)$ l'e. v. r. (espace vectoriel réticulé) de fonctions définies sur E engendré par E'. On pose $M(E) = h(E)_b^*$; les éléments de $M(E)$ sont appelés mesures coniques sur E. On dit que $\mu \in M^+(E)$ est portée par un cône $X \subset E$ lorsque

$$(f \in h(E) \text{ et } f \geqslant 0 \text{ sur } X) \Longrightarrow (\mu(f) \geqslant 0) .$$

Lorsque $\mu \geqslant 0$ est portée par un cône X complet, on note $r(\mu)$ la résultante de μ. $r(\mu)$ appartient à X, et est caractérisé par, $\forall\, \ell \in E'$, $\mu(\ell) = \ell(r(\mu))$ ([4], 30.7.).

On pose $K_\mu = (r(\lambda)\ ;\ \lambda \in M^+(E) \text{ avec } \lambda \leqslant \mu)$ ([4], 38.2.).

Etant donné un espace faible E, $b(E)$ désigne l'e. v. r. formé des fonctions sur E, bornées, et de la forme $\sup(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - \sup(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, où les α_i et β_j sont des fonctions affines continues sur E.

Les éléments de $(b(E)^*)^+$ sont appelés mesures affines sur E.

Etant donné un e. v. r. A de fonctions définies sur un ensemble X, on dit que $T \in (A^*)^+$ est une intégrale de Daniell lorsque $T(f_n) \longrightarrow 0$ pour toute suite (f_n) de A qui décroît vers 0 sur X.

2. Introduction. - Nous poursuivons l'étude des mesures coniques entreprise dans [2] ; rappelons que cette étude est rendue nécessaire par le fait suivant : étant donnés un espace faiblement complet E, $\mu \in M^+(E)$, et un cône fermé, soit Γ, de E qui porte μ, μ n'est pas nécessairement une intégrale de Daniell sur l'espace $h(E)_{|\Gamma}$ ([2], 8) ; G. CHOQUET a démontré cependant que μ est de Daniell sur $h(E)$ ([4], 38.13).

Nous indiquons des propriétés que possèdent l'espace $h(E)_{|K_\mu}$ et la mesure μ, qui seraient évidentes si μ était de Daniell sur $h(E)_{|K_\mu}$.

Nous donnons un théorème de représentation des formes linéaires $\geqslant 0$ sur un e. v. r. de fonctions définies sur un ensemble, qui généralise abstraitement celui de A. D. ALEXANDROFF ([1], p. 562-584) ; $h(E)_{|K_\mu}$ et μ vérifient les conclusions de ce théorème sans en vérifier les hypothèses.

Bien que l'on ait ni $b(E) \subset h(E)$, ni $h(E) \subset b(E)$ (sauf si $E = 0$), on peut se poser la question de G. CHOQUET : savoir quel lien existe entre mesure affine et mesure conique, car $\forall f \in h(E)^+$ et $\forall n$ entier, on a $f \wedge n \in b(E)$.

3. Plan. - Après les notations et rappels de la partie I, nous répondrons, dans la partie II, à la question de G. CHOQUET rappelée à la fin de l'introduction (Cf. n° 10).

Partie III : Soit E un espace faiblement complet, et $\mu \in M^+(E)$; soit $G(\mu)$ l'ensemble dont les éléments sont les génératrices privées de 0 du cône $R^+ \circ K_\mu$; soit $B(\mu)$ l'algèbre de Boole de parties de $G(\mu)$ engendrée par les demi-espaces associés aux éléments de E'. Nous montrons (Cf. n° 20) qu'il **existe** un homomorphisme canonique H de $B(\mu)$ dans l'espace des bandes du complété séparé $L^1(\mu)$ de $h(E)$ pour la norme $f \longmapsto \mu(|f|)$: H sera caractérisé par,

$$\forall f \in h(E)^+ , \quad H(\{\delta \ ; \ \delta \in G(\mu) , \ 0 \notin f(\delta)\}) = (\text{bande engendrée par } f \text{ dans } L^1(\mu)) .$$

Grâce à H nous donnons une représentation de μ à l'aide de mesures simplement additives sur $B(\mu)$, qui ont une certaine propriété de régularité (Cf. n° 34 et 31).

Enfin, la partie IV est la généralisation du théorème de A. D. ALEXANDROFF annoncée au milieu de l'introduction (Cf. n° 42).

II. Mesures affines et mesures coniques.

4. PROPOSITION. - Soient E un espace faiblement complet, et $T \in (b(E)^*)^+$ avec $T(1) = 1$; on a l'équivalence :

1° Il existe une mesure conique $\mu_T \geq 0$, caractérisée par

$$\forall f \in h(E)^+ , \quad \mu_T(f) = \sup \, (T(g) \ ; \ g \in b(E)^+ \ \text{et} \ g \leq f) .$$

2° $\forall \ell \in E'$, on a $\sup_n \, (T(|\ell| \wedge n)) < \infty$.

Lorsque T vérifie les conditions précédentes, on dit que T admet des moments finis d'ordre 1.

Pour une preuve, on peut voir [4](Problème 39.2).

En utilisant la méthode de démonstration de [4](39.4), et grâce à [9](proposition II.7.1), on a le résultat suivant.

5. PROPOSITION. - Lorsque T admet des moments finis d'ordre 1, T est une intégrale de Daniell ; il existe alors une unique probabilité P, définie sur la tribu de E engendrée par les éléments de E', telle que

$$\forall f \in b(E) , \quad T(f) = P(f) \quad \text{et,} \quad \forall g \in h(E) , \quad \mu_T(g) = P(g) .$$

6. Notations. - Soit $\mathcal{L}^1(\mu_T)$ (en abrégé $\mathcal{L}^1$) l'espace de fonctions sur E déduit de $h(E)$ et de μ_T à l'aide de la théorie de Daniell [3] ; soit $\mathcal{L}^2(\mu_T)$ (en abrégé $\mathcal{L}^2$) l'e. v. r. de fonctions sur E engendré par les éléments $f^{\frac{1}{2}}$ lorsque f décrit $(\mathcal{L}^1)^+$ [3].

$\mathcal{L}^2$ est un espace complet pour la norme associée au produit scalaire

$$(f\ ,\ g) = \mu_T(fg) = P(fg)\ .$$

L^1 et L^2 désignent les espaces séparés associés à $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^2$.

7. PROPOSITION. - Il existe un élément $\varphi \geqslant 0$ de $(\mathcal{L}^2)^*$, défini par

$$\forall\ f \in \mathcal{L}^2\ ,\quad \varphi(f) = P(f)\ ;$$

il existe un élément $f_0 \in (\mathcal{L}^2)^+$ tel que, $\forall\ g \in \mathcal{L}^2$, $\varphi(g) = (g\ ,\ f_0) = P(gf_0)$.

Preuve. - φ existe bien, car, $\forall\ f \in \mathcal{L}^1$, on a, si $f \geqslant 0$, $f^{\frac{1}{2}} \leqslant f + 1$; d'où $P(f^{\frac{1}{2}}) < \infty$.

φ est définie, par abus de langage, sur L^2 : soit $f \in \mathcal{L}^2$ avec

$$(f\ ,\ f) = P(f^2) = 0\ ;$$

f est nulle P-presque-partout ; d'où $P(f) = 0$.

Comme $\varphi \geqslant 0$, on a, d'après [10](V. 5.5), $\varphi \in (L^2)'$, d'où la proposition, puisque $(L^2)' = L^2$, par abus de langage.

8. COROLLAIRE. - Soit $e_0 = 1((f_0 > 0))$; $\forall\ f \in \mathcal{L}^1$, on a $1(e_0)f \in \mathcal{L}^1$ et $\mu_T(f) = \mu_T(1(e_0)f)$; soit $P(f) = P(1(e_0)f)$.

Preuve. - On a $1(e_0)f \in \mathcal{L}^1$ grâce à [3] ; $\forall\ f \in \mathcal{L}^1$, on a, grâce à §7, si $f \geqslant 0$,

$$P(f^{\frac{1}{2}}) = P(f^{\frac{1}{2}}\ f_0)$$

d'où
$$P(f^{\frac{1}{2}}) = P(1(e_0)f^{\frac{1}{2}})\ ;$$

on a donc $(f > 0) \cap (e_0^c)$ P-négligeable ; d'où $P(f) = P(1(e_0)f)$.

Rappelons le résultat suivant [3], qui va nous aider à caractériser les mesures coniques du type μ_T .

9. PROPOSITION (Représentation concrète des mesures coniques). - Soit $E = R^I$ I étant bien ordonné ; $\forall\ i \in I$, soit

$$e_i = (x\ ;\ x \in R^I \text{ avec, } \forall\ j < i\ ,\ x_j = 0 \text{ et } |x_i| = 1)\ .$$

$\forall\ \lambda \in M(E)$, il existe une famille unique (λ_i) , $i \in I$, de fonctions σ-additives, définies sur la tribu de e_i engendrée par (la restriction de) $h(E)$, telle que, $\forall\ f \in h(E)$, $\lambda(f) = \Sigma\lambda_i\ (f_{|e_i})$. Lorsque $\lambda \geqslant 0$, on a $\lambda_i \geqslant 0$, $\forall\ i \in I$, et $\forall\ f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, on a $f_{|e_i} \in \mathcal{L}^1(\lambda_i)$ et $\lambda(f) = \Sigma\lambda_i\ (f_{|e_i})$.

Il existe une famille libre dénombrable de E' , soit $\ell_1 , \ell_2 , \dots , \ell_n , \dots$ telle que $e_0^c \supset \bigcap_{k\in N} \ell_k^{-1}(0)$; représentons E sous la forme R^I , I étant bien ordonné, de sorte que, $\forall\, n \in N$, ℓ_n soit égale à l'application $x \longmapsto x_n$ (n-ième coordonnée de x). On a alors la proposition suivante.

10. PROPOSITION (Caractérisation des mesures coniques du type μ_T). - La représentation de μ_T du §9 fera intervenir une famille (μ_i) , $i \in I$, telle que, $\forall\, i \in I$,

$$(\mathrm{card}\ (u\ ;\ u \leqslant i) \geqslant \aleph_0) \Longrightarrow (\mu_i = 0)\ .$$

Réciproquement, pour toute mesure conique $\lambda \geqslant 0$ sur un espace R^J , avec J bien ordonné, telle que, dans la représentation du §9, on ait

$$\mathrm{card}\ (i\ ;\ \lambda_i \neq 0) \leqslant \aleph_0\ ,$$

il existe une probabilité π sur R^J muni de la tribu produit, telle que

$$\lambda(h) = \pi(h)\ ,\ \forall\, h \in h(R^J)\ .$$

Preuve. - $\forall\, f \in h(R^I)$, on a, d'après le §8 :

$$\mu_T(f) = \mu_T(1(e_0)f) = \Sigma\mu_i(1(e_0)f|_{e_i})\ .$$

Or on a, $\forall\, i \in I$, lorsque $\mathrm{card}\ (u\ ;\ u \leqslant i) \geqslant \aleph_0$, $1(e_0)_{e_i} = 0$; d'où le résultat.

Réciproquement, soit $i_1 , i_2 , \dots , i_p , \dots$ la suite des éléments $i \in J$ tels que $\lambda_i \neq 0$ (on suppose ici cette suite infinie) ; $\forall\, p \in N$, soit $e_p = (x\ ;\ x \in R^J$ avec, $\forall\, j < i_p$, $x_j = 0$ et $|x_{i_p}| = 2^p \lambda_{i_p}(1))$.

Etant donnée une partie mesurable A de e_{i_p} , pour la tribu engendrée par (la restriction à e_{i_p} de) $h(R^J)$, on note A_p la partie de e_p formée des $x \in e_p$ tels que $x/2^p \lambda_{i_p}(1)$ soit élément de A ; soit λ_p la fonction σ-additive, définie sur la tribu de e_p engendrée par $h(R^J)_{e_p}$, telle que, $\forall\, A$ mesurable, on ait

$$\lambda_p(A) = \lambda_{i_p}(A_p)/2^p \lambda_{i_p}(1)\ ;$$

π sera définie par, $\forall\, B \subset R^J$ mesurable,

$$\pi(B) = \Sigma_1^\infty \lambda_p(B \cap e_p)\ .$$

Nous allons voir dans quelle mesure, dans la décomposition de $\mu \in M^+(E)$ du §9, $\mathrm{card}\ ((i\ ;\ \mu_i \neq 0))$ est un invariant, c'est-à-dire ne dépend pas de l'isomorphisme choisi entre E et R^I ; pour cela la proposition suivante va être utile.

11. PROPOSITION. - $L^1(\mu)$ s'identifie canoniquement au sous-espace vectoriel de $\prod L^1(e_i , \mu_i)$, formé des éléments $f = (f_i)$, $i \in I$, tels que $\Sigma\mu_i(|f_i|) < \infty$.

Preuve. - D'après le §9, il est évident que $L^1(\mu)$ s'identifie à un s. e. v. fermé A de

$$B = (f\ ;\ f \in \prod L^1(e_i , \mu_i) , \ \sum \mu_i(|f_i|) < \infty)$$

muni de la norme $f \longmapsto \sum \mu_i(|f_i|)$; pour prouver que $A = B$, on va utiliser le théorème de Hahn-Banach en raisonnant par l'absurde.

Soit $\psi \in B'$ avec $\psi|_A = 0$; $\forall\, i \in I$, $\exists\, \psi_i \in L^\infty(e_i , \mu_i)$, avec $\sup_{e_i}(|\psi_i|) \leqslant 1$, de sorte que, $\forall\, f \in B$, on ait

$$\psi(f) = \sum \int f_i\ \psi_i\ d\mu_i\ ;$$

$\forall\, h \in h(E)$, on a donc

$$\psi(h) = \sum \int h|_{e_i}\ \psi_i\ d\mu_i = 0\ ;$$

d'après la propriété d'unicité du §9, on a donc, $\forall\, i \in I$, $\psi_i = 0$ μ_i-presque-partout, soit $\psi = 0$, d'où $A = B$.

12. Notations. – Soit E un espace faiblement complet, et $\mu \in M^+(E)$; soient φ_1 et φ_2 deux isomorphismes de E sur R^I , avec I bien ordonné ; les mesures coniques $\varphi_1(\mu)$ et $\varphi_2(\mu)$ admettent des décompositions (du type du §9) à l'aide d'éléments (μ_i^1) et (μ_i^2) , $i \in I$; soient c_1 et c_2 le cardinal des $\mu_i^1 \neq 0$ et des $\mu_i^2 \neq 0$.

13. PROPOSITION (Invariant attaché à une mesure conique).

$$(c_1 > \aleph_0) \Longrightarrow (c_1 = c_2)\ ;$$

de plus, $c_1 = c_2$ est alors la borne inférieure des cardinaux des parties $\mathcal{P} \subset E'$ telle que $L^1(\mu) =$ (bande engendrée par $\mathcal{P}$).

Preuve. – Grâce au §11, lorsque $c_1 > \aleph_0$, c_1 est le cardinal d'une famille maximale d'éléments de $L^1(\mu)$, deux-à-deux étrangers et non nuls.

Montrons que la famille $\mathcal{P}_1$ des éléments $\varphi_1^t(x_i)$ (φ_1^t = transposée de φ_1), pour $i \in I$ tel que $\mu_i^1 \neq 0$, est telle que $L^1(\mu) =$ (bande engendrée par $\mathcal{P}_1$) ; cela revient à prouver que $L^1(\varphi_1(\mu)) =$ (bande engendrée par les x_i tels que $\mu_i^1 \neq 0$), ce qui résulte du §9 ; on a donc $c \leqslant c_1 = c_2$.

Réciproquement, soit $\mathcal{P}$ une partie libre de E' , de cardinal c , telle que $L^1(\mu) =$ (bande engendrée par $\mathcal{P}$) ; munissons $\mathcal{P}$ d'un bon ordre ; soit φ un isomorphisme de E sur un espace R^J , avec J bien ordonné, de la forme $J = \mathcal{P} \cup K$, où K est également bien ordonné, on suppose, $\forall\, p \in \mathcal{P}$ et $\forall\, k \in K$, $p < k$, de sorte que, $\forall\, p \in \mathcal{P}$, on ait $\varphi^t(x_p) = p$.

$\forall\, f \in h(R^J)$, on a, si $f \geqslant 0$,

$$\varphi(\mu)(f) = \sup\,[\varphi(\mu)(f \wedge n(|x_{p_1}| + |x_{p_2}| + \dots + |x_{p_m}|))]\ ,$$

le sup étant pris sur $n \in N$ et sur les familles finies $(p_1 , p_2 , \dots , p_m)$ de $\mathcal{P}$; or ce calcul de $\varphi(\mu)(f)$ ne fait intervenir, dans la décomposition du §9, que les éléments $i \in J$ correspondants aux indices $p \in \mathcal{P}$, dans $J = \mathcal{P} \cup K$, on a donc $c_1 = c_2 \leqslant c$. D'où $c = c_1 = c_2$.

14. Exemple (dû à G. CHOQUET, de mesure conique μ qui n'est pas du type μ_T). - Soit $E = R^I$; $\forall i \in I$, ε_i désignera la masse de Dirac placée au point $x \in E$ tel que $x_i = 1$ et $x_j = 0$, $\forall j \neq i$; ε_i détermine un élément de $M^+(E)$, encore noté ε_i ; soit $\mu = \sum_{i \in I} \varepsilon_i$; μ répond à la question d'après le §13, si, et seulement si, card (I) $> \aleph_0$.

Dans le §13, on voit que le cas où $c_1 \leqslant \aleph_0$ est laissé en suspens ; la proposition 15 et l'exemple 16 vont traiter ce cas.

15. PROPOSITION (Notations du §12). - Lorsque $I = N$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1° c_1 est fini,
2° c_2 est fini,
3° $L^1(\mu)$ = (bande engendrée par une partie finie, non fixée, de E').

Preuve.

1° $\Rightarrow$ 3° résulte du §11 et du fait, que, $\forall n \in N$, on a $|x_n|_{|e_n} = 1$.

3° $\Rightarrow$ 2° ; lorsque 3° est vérifié, $\exists n \in N$, tel que $L^1(\mu)$ soit égal à la bande engendrée par les $\varphi_2^t(x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; on a alors

$$L^1(\varphi_2(\mu)) = (\text{bande engendrée par } x_1, x_2, \dots, x_n) ;$$

l'argument qui permet de conclure est le même que celui de la fin de la preuve de la proposition 13 : on a, $\forall f \in h(R^N)$, si $f \geqslant 0$,

$$\varphi_2(\mu)(f) = \sup_k (\varphi_2(\mu)(f \wedge k(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|))$$
$$= \sup_k (\sum_1^n \mu_i^2(f_{|e_i} \wedge k(1 + |x_{i+1}| + \dots + |x_n|)_{|e_i})) = \sum_1^n \mu_i^2(f_{|e_i}) .$$

On a donc $\mu_i^2 = 0$ pour tout $i > n$.

16. Remarque. - Lorsque card $I > \aleph_0$, ou lorsque card $I = \aleph_0$ avec $I \neq N$, il existe un espace faiblement complet E, $\mu \in M^+(E)$, et 2 isoporphismes φ_1 et φ_2 de E sur R^I tels que $c_1 = 1$ et $c_2 = \aleph_0$.

III. L'espace des restrictions à K_μ des éléments de $h(E)$.

17. Notations. - Soient E un espace faiblement complet, et $\mu \in M^+(E)$; $G(\mu)$ et $B(\mu)$ ont été définis dans le plan (§3).

$\forall h \in h(E)$, soit $p_h = (\delta \; ; \; \delta \in G(\mu)$ avec, $\forall x \in \delta$, $h(x) > 0)$.

Etant donnée une suite finie $A_1, A_2, \dots, A_n$ de parties d'un ensemble, la notation $\sum_1^n A_i$, où $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ ne sera employée que si $(i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$;

elle désigne alors la réunion des A_i .

Avec les conventions précédentes, on peut énoncer grâce à [9](Prop. I.2.2) la proposition suivante.

18. PROPOSITION. - Pour tout élément e de $B(\mu)$, il existe h_i , k_j , $t_\ell \in h(E)^+$ tels que $e = \sum_1^n p_{h_i} \cap p_{k_i}^c + \sum_1^m p_{t_\ell}^c$ (l'un des deux Σ pouvant être absent).

19. Notations. - $L^1(\mu)$ étant un espace vectoriel complètement réticulé, $b(\mu)$ désignera l'algèbre de Boole formée des bandes de $L^1(\mu)$.

q désignant l'homomorphisme canonique d'e. v. r. de $h(E)$ dans $L^1(\mu)$, $\forall\ h \in h(E)$, nous noterons b_h la bande engendrée par $q(h)$ dans $L^1(\mu)$, et b_h^c la bande complémentaire de b_h .

Notre objectif est maintenant de démontrer le résultat suivant.

20. PROPOSITION (Homomorphisme de $B(\mu)$ dans $b(\mu)$. - Il existe un homomorphisme canonique H de $B(\mu)$ dans $b(\mu)$ tel que, $\forall\ e \in B(\mu)$, de la forme

$$e = \sum_1^n p_{h_i} \cap p_{k_i}^c + \sum_1^m p_{t_\ell}^c \quad \text{avec} \quad h_i\ ,\ k_j\ ,\ t_\ell \in h(E)^+\ ,$$

on ait
$$H(e) = \sum_1^n b_{h_i} \cap b_{k_i}^c + \sum_1^m b_{t_\ell}^c\ .$$

(Si, dans e , l'un des deux Σ est absent, $H(e)$ est à modifier en conséquence).

Preuve. - Elle va résulter immédiatement des §26 et 28. Après les deux propositions suivantes, nous serons en mesure d'introduire les notations et définitions (§23 et 24) qui vont fixer le langage utilisé au cours de la preuve de la proposition 20.

$L^1(\mu)$ étant un L-espace (e. v. r. muni d'une norme p , qui en fait un Banach, telle que $p(|x|) = p(x)$, $\forall\ x$, et $p(x + y) = p(x) + p(y)$, $\forall\ x\ ,\ y \geqslant 0$), rappelons qu'on a ([7] Th. 1) le résultat suivant.

21. PROPOSITION. - $L^1(\mu)$ est isomorphe à l'ensemble des (classes de) fonctions intégrables, pour une mesure de Radon dm , définie sur un espace localement compact Z .

22. PROPOSITION. - Le dual de l'espace $L^1(\mu)$ s'identifie canoniquement au s. e. v. héréditaire I_μ engendré par μ dans $M(E)$. La boule unité fermée de ce dual n'est autre que l'intervalle d'ordre $[-\mu\ ,\ \mu]$.

Preuve. - q étant l'application canonique de $h(E)$ dans $L^1(\mu)$, pour toute forme linéaire $T \geqslant 0$ sur $L^1(\mu)$, $T \circ q \in M^+(E)$, et $\exists\ k \geqslant 0$ avec $T \circ q \leqslant k\mu$. Inversément, tout élément $\lambda \in M^+(E)$ tel que $\lambda \leqslant \mu$ induit une forme linéaire positive et continue sur $q(h(E))$ qui se prolonge univoquement en un élément $\lambda \geqslant 0$ de $(L^1(\mu))'$, on a $\lambda = \tilde{\lambda} \circ p$.

23. Notations. - D'après le théorème de représentation rappelé au §21, l'application, qui, à toute bande b de $L^1(\mu)$, fait correspondre $b^* = (\varphi\ ;\ \varphi \geqslant 0)$ dans $(L^1(\mu))'$ tel que $\forall\ \psi \leqslant \varphi$ avec $0 \leqslant \psi \neq 0$, $\exists\ f \in b$ avec $\psi(f) > 0)$, est injective et on a

$$(b_1 \cap b_2)^* = b_1^* \cap b_2^*\ ,\quad (b_1 + b_2)^* = b_1^* + b_2^*$$

et $(b^c)^* = (\varphi\ ;\ \varphi \geqslant 0$ dans $(L^1(\mu))'$ avec $\forall\ f \in b$, $\varphi(f) = 0)$.

Grâce à la proposition 22, nous pouvons identifier canoniquement $(L^1(\mu))'$ et I_μ ; par abus de langage, nous considèrerons dorénavant b^* comme une partie de I_μ.

24. Définitions (des $\mathcal{C}$-recouvrements). - Rappelons que $\mathcal{C}$ désigne la classe des cônes convexes faiblement complets, pas nécessairements saillants.

Nous appellerons $\mathcal{C}$-R ($\mathcal{C}$-recouvrement) de K_μ un recouvrement de K_μ par une suite finie d'éléments de $\mathcal{C}$.

Un $\mathcal{C}$-R (Γ_i) de K_μ est dit adapté à une suite finie (f_j) de $h(E)$ si, $\forall\ i, j$, $\exists\ \ell_{i,j} \in E'$ avec $f_j = \ell_{i,j}$ sur Γ_i.

Etant donné $\lambda \in I_\mu$, $\lambda \neq 0$, une décomposition finie $\lambda = \sum\lambda_i$ est dite subordonnée à un $\mathcal{C}$-R (Γ_j) de K_μ lorsque, $\forall\ i$, on a $0 \neq \lambda_i \geqslant 0$ et $\exists\ j$ tel que Γ_j porte λ_i.

25. PROPOSITION. - Soient $h \in h(E)^+$, (Γ_i) un $\mathcal{C}$-R de K_μ adapté à h, et $\lambda \in I_\mu$, $0 \neq \lambda \geqslant 0$; on a l'équivalence :

1° $\lambda \in (b_h)^*$,

2° Pour toute décomposition finie $\lambda = \sum\lambda_j$ subordonnée à (Γ_i),

$$r(\lambda_j) \in (h > 0)\ ,\quad \forall\ j\ .$$

Preuve. - Il est clair que 1° entraîne 2°. Inversément, si λ vérifie 2°, $\forall\ \nu \neq 0$, avec $0 \leqslant \nu \leqslant \lambda$, on a $\lambda = \nu + (\lambda - \nu)$ et, d'après [4](preuve de 30.9), on peut écrire $\nu = \sum\nu_j$ et $(\lambda - \nu) = \sum\theta_\ell$, ces deux décompositions étant finies et subordonnées au $\mathcal{C}$-R (Γ_i) ; $\lambda = \sum\nu_j + \sum\theta_\ell$ est donc finie et subordonnée à (Γ_i) ; comme, $\forall\ j$, on a $h(r(\nu_j)) > 0$ par hypothèse, on a aussi

$$\nu(h) \geqslant \nu_j(h) = h(r(\nu_j)) > 0$$

et la proposition est prouvée.

26. COROLLAIRE. - Soient $h_1, h_2, k_1, k_2 \in h(E)^+$ tels que $e_i = p_{h_i} \cap p_{k_i}^c$, $i = 1, 2$, vérifient $e_1 \cap e_2 = \emptyset$; b_{e_1} et b_{e_2} sont alors deux bandes disjointes dans $L^1(\mu)$.

De même, si $(p_h \cap p_k^c) \cap p_t^c = \emptyset$, alors $b_h \cap b_k^c$ et b_t^c sont disjointes, $h, k, t \in h(E)^+$; si $p_h^c \cap p_k^c = \emptyset$, b_h et b_k sont disjointes, $h, k \in h(E)^+$.

<u>Preuve</u>. - Examinons le cas de e_1 et e_2 ; on va voir que $b^*_{e_1} \cap b^*_{e_2} = 0$; soit $\lambda \in b^*_{e_1} \cap b^*_{e_2}$ avec $\lambda \neq 0$; prenons un C-R de K_μ adapté à h_1, h_2, k_1, k_2 ; soit $\lambda = \sum \lambda_i$ une décomposition finie de λ subordonnée au C-R considéré ; d'après la proposition précédente, on doit avoir,

$$\forall\, i\ ,\quad r(\lambda_i) \in (h_1 > 0) \cap (h_2 > 0)$$

car $\lambda \in b^*_{h_1} \cap b^*_{h_2}$, et $r(\lambda_i) \in (k_1 = 0) \cap (k_2 = 0)$ car $\lambda \in (b^c_{k_1})^* \cap (b^c_{k_2})^*$, d'où impossibilité car $e_1 \cap e_2 = \emptyset$.

Le cas où $(p_h \cap p^c_k) \cap p^c_t = \emptyset$ se traite de la même façon.

Voyons le cas $p^c_h \cap p^c_k = \emptyset$; prenons un C-R de K_μ adapté à h et k ; soit $\lambda \in (b^c_h)^* \cap (b^c_k)^*$, $\lambda \neq 0$; pour toute décomposition finie $\lambda = \sum \lambda_i$ subordonnée au C-R considéré, on a, $\forall\, i$, $r(\lambda_i) \in (h = 0) \cap (k = 0)$, d'où, comme $p^c_h \cap p^c_k = \emptyset$, $r(\lambda_i) = 0$; or, on peut trouver un filtre de décompositions $\lambda = \sum \lambda_i$ du type précédent tel que $\sum \varepsilon_{r(\lambda_i)}$ converge vers λ au sens $\sigma(M(E), h(E))$; d'où $\lambda = 0$.

27. PROPOSITION. - <u>Soient</u> h, $k \in h(E)^+$, (Γ_i) <u>un</u> C-R <u>de</u> K_μ <u>adapté à</u> h <u>et</u> k ; $\forall\, \lambda \in I_\mu$, <u>avec</u> $0 \leq \lambda \neq 0$; <u>on a l'équivalence</u> :

1° $\lambda \in ((b_h \cap b^c_k)^c)^*$,

2° <u>Pour toute</u> $\nu \neq 0$, $0 \leq \nu \leq \lambda$, <u>il existe une</u> $\nu' \neq 0$, <u>portée par un des</u> Γ_i, <u>telle que</u> $0 \leq \nu' \leq \nu$ <u>et</u> $(r(\nu') \in (h = 0))$ <u>ou</u> $(\forall\, \theta \neq 0$ <u>avec</u> $0 \leq \theta \leq \nu'$, <u>alors</u> $r(\theta) \in (k > 0))$.

<u>Preuve</u>. - Notons d'abord que

$$((b_b \cap b^c_k)^c)^* = (b^c_h + b_k)^* = (b^c_h)^* + (b_k)^* .$$

1° $\Rightarrow$ 2° . Soit λ vérifiant 1° ; on a $\lambda \in ((b^c_h)^* + (b_k)^*)$; soit $\nu \neq 0$ avec $0 \leq \nu \leq \lambda$; $\exists\, \nu' \geq 0$ avec $0 \neq \nu' \leq \nu$, ν' étant portée par un des Γ_i, avec $\nu' \in (b^c_h)^*$ ou $\nu' \in (b_k)^*$.

Si $\nu' \in (b^c_h)^*$ on a bien $r(\nu') \in (h = 0)$.

Si $\nu' \in (b_k)^*$, $\forall\, \theta \geq 0$ avec $0 \neq \theta \leq \nu''$, on a bien $r(\theta) \in (k > 0)$ puisque $\theta \in (b_k)^*$ et θ sera, comme ν', porté par un des Γ_i.

2° $\Rightarrow$ 1° . On raisonne par l'absurde ; soit $\nu \neq 0$ avec $0 \leq \nu \leq \lambda$ telle que $\nu \in (b_h)^* \cap (b^c_k)^*$, ν étant portée par un des Γ_i ; ν' étant l'élément dont 2° stipule l'existence, on a $r(\nu') \in (h > 0)$ car $\nu' \in (b_h)^*$ et $r(\nu') \in (k = 0)$, car $\nu' \in (b^c_k)^*$, ce qui contredit le 2°.

28. COROLLAIRE. - <u>Soit</u>

$$e = \sum_1^n p_{h_i} \cap p^c_{k_i} + \sum_1^m p^c_{t_j} \quad \text{avec } h_i\ ,\ k_i\ ,\ t_j \in h(E)^+$$

une décomposition de $G(\mu)$; on a

$$(b_{h_1} \cap b^c_{k_1} + \dots + b_{h_n} \cap b^c_{k_n}) + (b^c_{t_1} + \dots + b^c_{t_m}) = L^1(\mu)$$

(Si, dans e , l'un des deux Σ est absent, le résultat est à modifier en conséquence).

Preuve. - Elle consiste à raisonner par l'absurde en utilisant les propositions 25 et 27.

Soit (Γ_ℓ) un $\mathcal{C}$-R de K_μ adapté aux éléments de $h(E)^+$ intervenant dans l'énoncé ; il existerait une mesure conique $\lambda \neq 0$ avec $0 \leqslant \lambda \leqslant \mu$, portée par un des Γ_ℓ , telle que :

$\forall\, i \in [1 , n]$, on a $r(\lambda) \in (h_i = 0)$ ou $r(\lambda) \in (k_i > 0)$ (cf. §27) ;
$\forall\, j \in [1 , m]$, on a $r(\lambda) \in (t_j > 0)$ (cf §25).

Si on a $r(\lambda) \neq 0$, alors on aboutit à une contradiction car $e^c = \emptyset$.

Si on a $r(\lambda) = 0$, alors, dans e , le deuxième Σ est absent.

Soit $\lambda = \Sigma\lambda_u$ une décomposition finie de λ avec $\lambda_u \geqslant 0$; comme (Γ_ℓ) est adapté aux h_i et k_j et que μ est porté par un des Γ_ℓ , on a, $\forall\, i \in [1 , n]$,

$$0 = h_i(r(\lambda)) = \Sigma h_i(r(\lambda_u)) ,$$

d'où $r(\lambda_u) \in (h_i = 0)$; donc on a $r(\lambda_u) = 0$, puisque $e^c = \emptyset$. Comme on peut trouver un filtre de décompositions $\lambda = \Sigma\lambda_u$ avec $\Sigma\varepsilon_{r(\lambda_u)} \longrightarrow \lambda$ pour $\sigma(M(E) , h(E))$, on a $\lambda = 0$.

29. PROPOSITION (à rapprocher de G. CHOQUET [6] §6). - Soient $f , g \in h(E)^+$ avec $p_g \subset p_f$; on a

$$\mu(g) = \lim\, (\mu(g \wedge nf)) .$$

Preuve. - Grâce au §20, $q(g)$ appartient à la bande b_f engendrée dans $L^1(\mu)$ par $q(f)$; d'où le résultat, grâce au §21.

30. DÉFINITION DE μ_f . - Avec les notations du §21, soit $\hat{f}$ l'élément de $L^1(Z , dm)$ correspondant à $f \in h(E)$.

Soit $f \in h(E)$; on peut considérer la fonction additive d'ensemble μ_f , définie sur $B(\mu)$, par

$\forall\, A \in B(\mu)$, $\mu_f(A)$ = intégrale par rapport à dm de la composante de $\hat{f}$ sur $H(A)$.

Notons que, $\forall\, g \in h(E)^+$, on a

$$\mu_f(p_g) = \lim_n\, (\mu(f \wedge ng)) .$$

31. PROPOSITION (Régularité de μ_f) . - Etant donné $f \in h(E)^+$, μ_f est régulière en ce sens que, $\forall\, g \in h(E)^+$ et $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, h_\varepsilon \in h(E)^+$ tel que

$$p_{h_\varepsilon}^c \cap p_f \subset p_g \cap p_f$$

et $\mu_f(p_{h_\varepsilon}^c) \geqslant \mu_f(p_g) - \varepsilon$.

Preuve. - Plaçons-nous dans $L^1(Z , dm)$; $\forall$ n entier, soit $e_n = (\hat{g} - \hat{f}/n \geqslant 0)$; on a

$$e_n \cap (\hat{f} > 0) \uparrow (\hat{g} > 0) \cap (\hat{f} > 0) \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty ;$$

il suffit donc de prendre $h_\varepsilon = (f/n - g)^+$, pour n assez grand.

32. DÉFINITION (concernant les pré-probabilités). - Etant donnés un ensemble Ω , une algèbre de Boole $\mathfrak{A}$ de parties de Ω , une pré-probabilité m sur $\mathfrak{A}$ est une fonctionnelle $\geqslant 0$ et additive sur $\mathfrak{A}$: $\overline{E(\mathfrak{A})}$ désigne la fermeture de l'espace $E(\mathfrak{A})$, des fonctions étagées associées à $\mathfrak{A}$, pour la topologie de la convergence uniforme ; par abus de langage, on note encore m le prolongement canonique de m à $\overline{E(\mathfrak{A})}$; on pose $C(\Omega , \mathfrak{A} , m) = (f ; \ f \geqslant 0$ définie sur Ω , $\forall$ n , $f \wedge n \in \overline{E(\mathfrak{A})}$ et $\lim (m(f \wedge n)) < \infty$; $C(\Omega , \mathfrak{A} , m)$ est un cône convexe, stable par sup et inf finis.

$\forall f \in C(\Omega , \mathfrak{A} , m)$, on pose $m(f) = \lim (m(f \wedge n))$; m est additive sur le cône $C(\Omega , \mathfrak{A} , m)$ et se prolonge en une forme linéaire $\geqslant 0$, notée encore m , sur le s. e. v. engendré.

Soit $f \in C(\Omega, \mathfrak{A} , m)$; $\forall A \in \mathfrak{A}$, on a $1(A)f \in C(\Omega , \mathfrak{A} , m)$; on peut alors définir une pré-probabilité m' sur $\mathfrak{A}$ par la formule $m' = fm$, de sorte que, $\forall A \in \mathfrak{A}$, $m'(A) = m(1(A)f)$.

33. PROPOSITION. - Soient $f \in C(\Omega , \mathfrak{A} , m)$ et $m' = fm$; $\forall g \geqslant 0$ dans $\overline{E(\mathfrak{A})}$ telle que $fg \in C(\Omega , \mathfrak{A} , m)$, on a $m'(g) = m(fg)$.

Lorsque $g \in C(\Omega , \mathfrak{A} , m)$ est non bornée et que $fg \in C(\Omega , \mathfrak{A} , m)$, on a seulement $m'(g) \leqslant m(fg)$.

Preuve. - Soit $\varepsilon > 0$, $\exists g_\varepsilon \in E(\mathfrak{A})$, telle que $0 \leqslant g_\varepsilon \leqslant g \leqslant g_\varepsilon + \varepsilon$; on a alors

$$m'(g_\varepsilon) \leqslant m(fg) \leqslant m'(g_\varepsilon + \varepsilon) ;$$

d'où le résultat en faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Lorsque g est non bornée, on a par définition $m'(g) = \lim_n (m'(g \wedge n))$; or, n étant fixé, on a

$$m'((g \wedge n)) = \lim_{p\to\infty} (m(f \wedge p) \circ (g \wedge n)) \leqslant m(fg) ,$$

d'où $m'(g) \leqslant m(fg)$.

34. PROPOSITION (Représentation de μ à l'aide des μ_f). - Soient $f , g \in h(E)^+$; lorsque $p_g \subset p_f$, on a $\mu(g) = \mu_f(g/f)$.

Preuve. - D'après le §29, on a

$$\mu(f) = \lim (\mu_f((g/f) \wedge n)$$

et, d'après le §32,

$$\mu_f(g/f) = \lim (\mu_f((g/f) \wedge n)) \;;$$

il suffit donc de prouver le résultat avec $g \leqslant f$: il suffit pour cela de se placer dans $L^1(Z , dm)$ et d'utiliser les §20 et 30 .

35. PROPOSITION (Système projectif des μ_f). – Soient $f , g \in h(E)^+$; lorsque $p_g \subset p_f$, on a $\mu_g = (g/f)\, \mu_f$.

Preuve. – On pourrait faire une démonstration directe ; mais on peut aussi utiliser les §34 et 39 en remarquant que $(g/f)\, \mu_f$ est régulière au sens du §31.

36. DÉFINITION (Mesures coniques élémentaires). – Soit un couple (m , f) avec $f \in h(E)^+$ et où m est une pré-probabilité sur $B(\mu)$, telle que :

1° $m(p_f^c) = 0$,

2° $\forall\, g \in h(E)^+$,
on a $m(g/f) < \infty$.

Au couple (m , f) on peut alors faire correspondre une mesure conique $\geqslant 0$, notée encore (m , f) , en posant, $\forall\, g \in h(E)^+$,

$$(m , f)(g) = m(g/f) .$$

Une telle mesure conique sera dite mesure conique élémentaire de base K_μ .

Cette définition est un cas particulier des sous-mesures sur un espace sous-stonien, au sens de G. CHOQUET ([5], 16).

37. PROPOSITION (résultant du §34 et du lemme de Zorn). – Toute mesure conique μ , $\geqslant 0$, est somme de mesures coniques élémentaires de base K_μ .

38. Remarque. – La proposition 37 peut se prouver sans faire appel au §34 ; en effet, étant donnés $\mu \in M^+(E)$ et $f \in h(E)^+$, considérons la restriction de μ au sous-espace $(g \;;\; g \in h(E) \;,\; \exists\, k \geqslant 0$ avec $|g| \leqslant k , f)$; en introduisant une compactification convenable de $G(\mu)$, il est classique ([8], IV.9. 10, 11) qu'il existe une pré-probabilité m sur $B(\mu)$, non nécessairement unique, telle que $m(p_f^c) = 0$ et, $\forall\, g \in h(E)^+$ avec $g \leqslant f$, $\mu(g) = m(g/f)$.

Mais cela ne fournit aucune propriété de régularité du type du §31.

39. PROPOSITION (à rapprocher du §31). – Soient $\mu \in M^+(E)$ et (m , f) une mesure conique élémentaire de base K_μ telle que $(m , f) = (\mu_f , f)$.

Supposons m régulière, en ce sens que $\forall\, u \in h(E)^+$ et $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, u_\varepsilon \in h(E)^+$ avec $p_{u_\varepsilon}^c \cap p_f \subset p_u \cap p_f$ et $m(p_{u_\varepsilon}^c) \geqslant m(p_u) - \varepsilon$.

On a alors $m = \mu_f$.

Preuve. - On a vu (§30) que, $\forall\ u \in h(E)^+$, on a

$$\mu_f(p_u) = \lim_n (m(nu/f \wedge 1)) ;$$

soit $\mu_f(p_u) \leqslant m(p_u)$; on a, de plus, $\mu_f(1) = \mu(f)$ et $\mu(f) = m(1)$.

Raisonnons par l'absurde : soit $u \in h(E)^+$ avec $\mu_f(p_u) \leqslant m(p_u) - \alpha$, avec $\alpha > 0$; $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ u_\varepsilon \in h(E)^+$ avec, par hypothèse et grâce au §31,

$$p^c_{u_\varepsilon} \cap p_f \subset p_u \cap p_f\ ,\quad m(p^c_{u_\varepsilon}) \geqslant m(p_u) - \varepsilon$$

et

$$\mu_f(p^c_{u_\varepsilon}) \geqslant \mu_f(p_u) - \varepsilon .$$

On a donc

$$\mu_f(1) = \mu_f(p_f) \leqslant \mu_f(p_u) + \mu_f(p_{u_\varepsilon}) \leqslant m(p_u) + m(p_{u_\varepsilon}) - \alpha ;$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on a $\mu_f(1) \leqslant m(1) - \alpha$; d'où contradiction, car $\mu_f(1) = m(1)$.

On a donc, $\forall\ u \in h(E)^+$, $\mu_f(p_u) = m(p_u)$; d'où $m = \mu_f$, m étant régulière par hypothèse, et μ_f d'après le §31.

IV. Généralisation d'un théorème de A. D. ALEXANDROFF.

La proposition 42 est due à A. D. ALEXANDROFF ([1], p. 562-584) dans le cas où X est un espace topologique et E est l'e. v. r. des fonctions continues et bornées sur X.

Nous allons exposer successivement les différents éléments techniques de la preuve.

40. Définition ("mesure" associée à une forme $\geqslant 0$). - Soit E un e. v. r. de fonctions bornées définies sur un ensemble X ; on suppose $1 \in E$. Soit $T \in (E^*)^+$; pour toute partie de X de la forme $(f > 0) = p_f$, avec $f \in E^+$, on pose

$$\mu(p_f) = \sup\ (T(g)\ ;\ g \in E^+\ ,\ g \leqslant 1 \text{ et } p_g \subset p_f) .$$

Pour toute partie A de X, on pose

$$\mu^*(A) = \inf\ (\mu(p_f)\ ;\ A \subset p_f\ ,\ f \in E^+) .$$

41. PROPOSITION.

1° μ est régulière en ce sens que, $\forall\ f \in E^+$ et $\forall\ \varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in E^+$ tel que $p^c_{f_\varepsilon} \subset p_f$ et $\mu^*(p^c_{f_\varepsilon}) \geqslant \mu(p_f) - \varepsilon$.

2° $\forall\ f \in E^+$, on a $\mu(p_f) + \mu^*(p^c_f) \leqslant \mu(X)$.

3° μ représente T, en ce sens que, $\forall\ f \in E^+$,

$$T(f) = \lim_n (1/n \sum_{k=1}^{\infty} \mu((f > k/n))) .$$

Preuve.

1° Soit $f \in E^+$. $\forall\ \varepsilon > 0$, soit $g_\varepsilon \in E^+$ avec $T(g_\varepsilon) \geqslant \mu(p_f) - \varepsilon$, $g_\varepsilon \leqslant 1$

et $p_{g_\varepsilon} \subset p_f$.

Soit $e_\varepsilon = (g_\varepsilon \geqslant \varepsilon)$; on a $e_\varepsilon \subset p_f$ et

$$\mu^*(e_\varepsilon) \geqslant T((g_\varepsilon - \varepsilon)^+) \geqslant T(g_\varepsilon) - \varepsilon T(1) ,$$

d'où

$$\mu^*(e_\varepsilon) \geqslant \mu(p_f) - \varepsilon(1 + T(1)) .$$

2° Soit $f \in E^+$. $\forall\ \varepsilon > 0$; soit $f_\varepsilon \in E^+$ avec $T(f_\varepsilon) \geqslant \mu(p_f) - \varepsilon$, $f_\varepsilon \leqslant 1$ et $p_{f_\varepsilon} \subset p_f$. Soient $e_\varepsilon = (f_\varepsilon < \varepsilon)$ et $g \in E^+$ tel que $p_g \subset e_\varepsilon$, $g \leqslant 1$ et $T(g) \geqslant \mu(e_\varepsilon) - \varepsilon$. On a

$$\mu(p_f) + \mu^*(p_f^c) \leqslant T(f_\varepsilon) + \varepsilon + \mu^*(e_\varepsilon) \leqslant T(f_\varepsilon - \varepsilon)^+) + \varepsilon(2 + T(1)) + T(g)$$

$$\leqslant T((f_\varepsilon - \varepsilon)^+ + g) + \varepsilon(2 + T(1)) \leqslant \mu(X) + \varepsilon(2 + T(1)) ;$$

car on a $(f_\varepsilon - \varepsilon)^+ + g \leqslant 1$.

3° $\forall$ n , k entiers, posons $f_{k,n} = (f - k/n)^+ \wedge (1/n)$; on a, $\forall$ n fixé,

$$0 \leqslant f - \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,n} \leqslant 1/n ;$$

on a, de plus,

$$(f > k/n) \subset (f_{k,n} > 0) \quad \text{et} \quad (f > (k + 1)/n) \subset (f_{k,n} = 1/n) ,$$

On a donc

$$\mu((f > k/n)) \geqslant n \cdot T(f_{k,n}) \quad \text{et} \quad \mu((f > (k + 1)/n)) \leqslant n \cdot T(f_{k,n}) .$$

D'où le résultat.

42. PROPOSITION (Théorème de A. D. ALEXANDROFF abstrait). - On suppose de plus que E vérifie la condition suivante :

$\forall$ f , g $\in E^+$ avec $f \leqslant g$, $\forall\ h \in E^+$ avec $p_h \subset p_g$, on a $(fh)/g \in E$; par convention, $(fh)/g = 0$ sur p_g^c .

On a alors :

1° $\forall$ A , B $\subset$ X , $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

2° La famille des parties $A \subset X$ telles que $\mu^*(A) + \mu^*(A^c) = \mu(X)$ forme une algèbre de Boole contenant l'algèbre de Boole $B(E)$ engendrée par les p_f , $f \in E^+$.

La restriction de μ^* à $B(E)$ est une pré-probabilité.

3° Soit λ une pré-probabilité sur $B(E)$, représentant T au sens du §41, 3° ; on a, $\forall$ f $\in E^+$, $\mu(p_f) \leqslant \lambda(p_f)$; si, de plus, λ est régulière au sens du §41, 1° , on a $\lambda = \mu$.

Preuve.

1° Soient A , B $\subset$ X . $\forall\ \varepsilon > 0$, soient a_ε , $b_\varepsilon \in E^+$ avec $A \subset (a_\varepsilon > 0)$, $B \subset (b_\varepsilon > 0)$ et $\mu^*(A) \geqslant \mu(p_{a_\varepsilon}) - \varepsilon$, $\mu^*(B) \geqslant \mu(p_{b_\varepsilon}) - \varepsilon$.

On a $A \cup B \subset (a_\varepsilon > 0) \cup (b_\varepsilon > 0)$ et $A \cap B \subset (a_\varepsilon > 0) \cap (b_\varepsilon > 0)$;
soient $u , v \in E^+$ avec $u \leqslant 1$, $v \leqslant 1$;

$$p_u \subset (a_\varepsilon > 0) \cup (b_\varepsilon > 0) , \quad p_v \subset (a_\varepsilon > 0) \cap (b_\varepsilon > 0)$$

et
$$T(u) \geqslant \mu(p_{a_\varepsilon} \cup p_{b_\varepsilon}) - \varepsilon , \quad T(v) \geqslant \mu(p_{a_\varepsilon} \cap p_{b_\varepsilon}) - \varepsilon .$$

D'après l'hypothèse faite sur E , on a

$$\alpha = (u \cdot a_\varepsilon + v \cdot b_\varepsilon)/(a_\varepsilon + b_\varepsilon) \in E^+$$

et
$$\beta = (u \cdot b_\varepsilon + v \cdot a_\varepsilon)/(a_\varepsilon + b_\varepsilon) \in E^+ ;$$

on a de plus $\alpha \leqslant 1$, $\beta \leqslant 1$;

$$p_\alpha \subset (a_\varepsilon > 0) , \quad p_\beta \subset (b_\varepsilon > 0) \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = u + v .$$

On a donc

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant T(u) + \varepsilon + T(v) + \varepsilon = T(u + v) + 2\varepsilon = T(\alpha + \beta) + 2\varepsilon$$
$$= T(\alpha) + T(\beta) + 2\varepsilon \leqslant \mu^*(p_{a_\varepsilon}) + \mu^*(p_{b_\varepsilon}) + 2\varepsilon \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) + 4\varepsilon .$$

2° Soient $A , B \subset X$ avec $\mu^*(A) + \mu^*(A^c) = \mu(X)$ et $\mu^*(B) + \mu^*(B^c) = \mu(X)$; montrons que $C = A \cup B$ vérifie aussi $\mu^*(C) + \mu^*(C^c) = \mu(X)$: on a

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A^c \cap B^c) + \mu^*(A^c \cup B^c) + \mu^*(A \cap B) = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 ;$$

d'après 1°, on a $k_1 + k_4 \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$ et $k_2 + k_3 \leqslant \mu^*(A^c) + \mu^*(B^c)$; d'où

$$\Sigma_1^4 k_i \leqslant (\mu^*(A) + \mu^*(A^c)) + (\mu^*(B) + \mu^*(B^c)) = 2\mu(X) ;$$

or, d'après 1°, on a $k_1 + k_2 \geqslant \mu(X)$ et $k_3 + k_4 \geqslant \mu(X)$;
d'où $k_1 + k_2 = k_3 + k_4 = \mu(X)$, ce qu'il fallait prouver.

D'après 1° et le §41, 2°, $\forall f \in E^+$, on a $\mu(p_f) + \mu^*(p_f^c) = \mu(X)$; la restriction de μ^* à $B(E)$ est donc une pré-probabilité.

3° Si λ représente T au sens de §41, 3°, on aura, $\forall f \in E^+$ et $\forall g \in E^+$ avec $g \leqslant 1$ et $p_g \subset p_f$, $T(g) \leqslant \lambda(p_f)$, d'où $\mu(p_f) \leqslant \lambda(p_f)$; si de plus λ est régulière au sens de §41, 1°, on a $\mu(p_f) = \lambda(p_f)$; la preuve est analogue à celle du §39.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ALEXANDROFF (A. D.). - Additive set-functions in abstract spaces, Mat. Sbornik, nouv. série, t. 9 (51), 1941, p. 563-628.

[2] BECKER (R.). - Mesures coniques et intégrale de Daniell, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 15e année, 1975/76, n° 24, 14 p.

[3] BECKER (R.). - Quelques remarques concernant l'intégrale de Daniell (à paraître).

[4] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis, Vol. 1-3. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

[5] CHOQUET (G.). - Determination and study of positive forms on spaces of functions, J. Approximation Theory, t. 7, 1973, p. 325-333.

[6] CHOQUET (G.). - Résultats récents sur les formes positives sur les espaces de fonctions, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 11e-12e années, 1971-1973, n° 6, 3 p.

[7] DIXMIER (J.). - Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, Sum. Bras. math., t. 2, 1947-1951, p. 151-182.

[8] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J. T.). - Linear operators, Part I. - New York, Interscience Publishers, 1958 (Pure and applied Mathematics. Interscience, 7).

[9] NEVEU (J.). - Bases mathématiques du calcul des probabilités. - Paris, Masson, 1964.

[10] SCHAEFER (H. H.). - Topological vector spaces. - New York, Macmillan Company, 1966 (Macmillan Series in advanced Mathematics and theoretical Physics).

(Texte reçu le 17 mars 1977)

Richard BECKER
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05