Alain Goullet de Rugy

Quelques résultats nouveaux sur les cônes faiblement complets

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. nº 20, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A7_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, n° 20, 3 p.

22 avril 1976

QUELQUES RÉSULTATS NOUVEAUX SUR LES CÔNES FAIBLEMENT COMPLETS

par Alain GOULLET de RUGY

1. Caractérisation des cônes profilés.

1.1. THÉORÈME. - *Soit* E *un espace vectoriel réticulé muni d'une topologie d'e. l. c. s. localement solide. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) *Tout idéal d'ordre fermé de* E *est l'intersection des idéaux d'ordre maximaux le contenant.*

(b) *Tout idéal d'ordre fermé de* E *, distinct de* E *est contenu dans un idéal d'ordre maximal.*

(c) *Toute face fermée du cône* E'_+ *est l'enveloppe connexe fermée de la réunion de ses génératrices extrémales.*

(d) *Toute face fermée du cône* E'_+ *, non réduite à* $\{0\}$ *, contient une forme réticulante non nulle.*

(e) *Pour tout s. e. v. coréticulé de dimension finie* F *de* E *et tout idéal d'ordre fermé* G *de* E *tel que* $F \cap G = \{0\}$ *, la propriété d'extension suivante a lieu : Toute forme réticulante sur* F *se prolonge en une forme réticulante sur* E *, nulle sur* G .

1.2. *Commentaires.* - La propriété (a) est une des caractérisations des *espaces de Dini*. Les propriétés (a) et (c) sont équivalentes du fait de la dualité bien connue entre les idéaux d'ordre fermés de E et les faces fermées de E'_+ . La propriété (c) est une des caractérisations des cônes E'_+ qui sont *profilés*. Sur ces questions, on consultera [6].

Dans [4], j'avais montré l'équivalence des propriétés (a) et (b) lorsque E possédait une unité topologique. On doit à FLÖSSER [2] de s'être affranchi de cette hypothèse restrictive. La propriété (e) qu'il a mise en évidence est l'étape intermédiaire essentielle pour montrer que (d) implique (c), et donc dualement que (b) implique (a).

2. Liaison entre chapeaux et localisation des mesures coniques.

2.1. La notion de chapeau d'un cône a été introduite par CHOQUET. Le résultat de base étant que, si X est un cône convexe faiblement complet, toute mesure conique maximale sur X de résultante dans un chapeau de X est localisable. Plus récemment, dans [3] et [7], on a remarqué qu'un résultat identique était obtenu en supposant seulement que la mesure conique a sa résultante qui est borne supérieure de points qui appartiennent à des chapeaux de X .

Ainsi, si X est un cône réticulé presque bien coiffé, toute mesure maximale est localisable. Malheureusement, la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant :

2.2. <u>Exemple</u>. - Il existe un cône faiblement complet réticulé X , possédant une face propre F et une partie compacte T telle que :

- Toute mesure conique maximale de résultante dans F est localisable sur T ,
- Aucun point de F n'est dans un chapeau de X ,
- Toute mesure maximale est localisable.

2.3. <u>Conjecture</u>. - Il existe un cône faiblement complet réticulé sans génératrice extrémale et où toute mesure maximale est localisable. L'exemple précédent ne convient pas, car il possède de nombreuses génératrices extrémales. Dans cette direction, je n'ai qu'un exemple d'un cône faiblement complet réticulé sans génératrice extrémale sur lequel il y a <u>des</u> mesures maximales localisables.

2.4. <u>Remarque</u>. — Lorsque le cône faiblement complet réticulé considéré est presque bien coiffé, on peut utiliser les résultats très fins de CHOQUET et MEYER sur les mesures maximales sur les convexes compacts. Ainsi, si F est une réunion dénombrable de fermés contenant la réunion X_c des génératrices extrémales de X , toute mesure conique maximale possède une localisation concentrée sur F . J'ignore si un tel résultat subsiste si, au lieu de supposer que X est presque bien coiffé, on suppose seulement que toute mesure maximale est localisable.

2.5. <u>Remarque</u>. — Le terme de chapeau d'un cône désignant une partie convexe compacte de celui-ci de complémentaire convexe, bienque consacré par l'usage, n'est guère satisfaisant. Sauf peut-être lorsqu'il est universel. Partant du dessin d'un chapeau d'un cône dans le plan, on s'attend à ce qu'un chapeau soit "gros" dans le cône considéré. Or en dimension infinie (par exemple dans $\underset{\sim}{R}_+^I$) il est presque toujours "petit". Il serait plus satisfaisant pour l'intuition de lui préférer le terme d'<u>écaille</u> ou de <u>copeau</u>.

3. Comparaison des cônes profilés et presque bien coiffés.

3.1. On se place toujours dans la situation suivante : E est un e. l. c. réticulé muni d'une topologie localement solide, et on s'intéresse au cône E'_+ des formes linéaires positives continues sur E . On dit que le cône a la <u>propriété de localisation</u> si toute mesure conique maximale sur E'_+ de résultante dans E'_+ est localisable en une mesure de Radon sur $E'_+ \setminus \{0\}$. Il revient au même de dire, sans parler de mesures coniques, que tout élément $L \in E'_+$ est résultante d'une mesure de Radon portée par la réunion $R(E'_+)$ des formes réticulantes non nulles de

E .

Rappelons que le <u>structurel</u> de E , notée $\mathrm{Str}(E)$ est l'espace topologique séparé quotient de $R(E'_+)$ par la relation d'équivalence d'alignement.

3.2. THÉORÈME. - <u>Supposons que le structurel de tout idéal principal de E soit universellement mesurable dans son compactifié de Stone-Čech. Alors pour que E'_+ ait la propriété de localisation, il suffit (et il faut) que E'_+ soit profilé.</u>

3.3. <u>Cas particuliers</u>. - La condition de l'énoncé précédent est réalisée lorsque E est métrisable. Dans ce cas, le structurel de tout idéal principal de E est un K_σ [4]. Elle est aussi réalisée lorsque E est un espace de Dini à structurel localement compact. Dans ce cas, le structurel de tout idéal fermé de E est homéomorphe à une partie ouverte du structurel de E .

3.4. Comme dans le paragraphe 2, il n'y a pas égalité entre la propriété de localisation et le fait d'être presque bien coiffé. La raison n'est cependant pas la même. Dans le cas présent, cela tient à ce que le cône E'_+ n'est pas nécessairement complet, et on ne peut pas affirmer que l'enveloppe convexe fermée d'une partie compacte de E'_+ est compacte, alors que cette propriété est la principale méthode de construction de chapeaux de E'_+ . Il y a cependant plusieurs cas où l'égalité reste. D'abord lorsque E est tonnelé, car la propriété des enveloppes connexes mentionnée ci-dessus reste vraie. Ensuite, il y a le cas où la topologie de E est plus fine que le topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $R(E'_+)$. Ici il reste suffisamment de compacts équicontinus dans $R(E'_+)$, donc de compacts, dont l'enveloppe convexe fermée est compacte. Enfin, il y a le cas où E est métrisable : Tout compact de $R(E'_+)$ est réunion dénombrable de compacts équicontinus. Ici encore il y a suffisamment de compacts équicontinus dans E'_+ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] FLÖSSER (H.). - Dini-Verbände mit fast gut frisiertem Dualkegel (Preprint).

[2] FLÖSSER (H.). - Zur Forsetzung von Funktionalen mit gegebenen Nullstellen. - Darmstadt, Technische Hochschule (Preprint n° 245).

[3] GOULLET de RUGY (A.). - La théorie des cônes biréticulés, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 21, 1971, n° 4 , p. 1-64.

[4] GOULLET de RUGY (A.). - Comparaison des cônes profilés et des cônes presque bien coiffés, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 13e année, 1973/74, n° 15, 11 p.

[5] GOULLET de RUGY (A.). - Une classe d'espaces de Banach réticulés, Math. Z., t. 144, 1975, p. 217-238.

[6] PORTENIER (C.). - Caractérisation de certains espaces de Riesz, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 10e année, 1970/71, n° 6, 21 p.

[7] PORTENIER (C.). - Espaces de Riesz, espaces de fonctions et espaces de sections, Comment. Math. Helvet., t. 46, 1971, p. 289-313.

Alain GOULLET de RUGY
Univ. Tunis, Fac. Sc., Dep. Math.
Campus universitaire, TUNIS (Tunisie)

(Texte reçu le 29 avril 1976)