Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michèle Capon

Compacts de fonctions de première classe

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° 4, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A2_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, n° 4, 2 p.
13 novembre 1975

COMPACTS DE FONCTIONS DE PREMIÈRE CLASSE

par Michèle CAPON

Dans tout l'exposé, X désigne un espace polonais, et $B_1(X)$ désigne l'espace des fonctions de première classe de Baire sur X. Le but de ce travail est de caractériser les parties relativement compactes de $B_1(X)$ (par la topologie de la convergence simple). Nous ne donnerons que les énoncés principaux et les références bibliographiques les concernant.

1. Caractérisation des compacts de $B_1(X)$.

THÉORÈME 1. - *Soit* F *une partie de* $B_1(X)$, *les énoncés suivants sont équivalents* :

1° F *est relativement compact dans* $B_1(X)$ *pour la convergence simple* ;

2° *Toute suite infinie de* F *admet une valeur d'adhérence dans* $B_1(X)$;

3° *Toute suite infinie de* F *admet une sous-suite convergente dans* $B_1(X)$.

De plus, si ces conditions sont réalisées, on a :

(a) *Toute fonction de* $\overline{F}$ *est dans l'adhérence d'une partie dénombrable de* F ;

(b) *Si* F *est uniformément bornée, et si* $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ *est un filtre sur* F *qui converge simplement vers* f, *alors* f_α *converge vers* f *pour la topologie faible relative aux mesures sur* X.

Dans le second paragraphe, nous donnons des applications intéressantes de ce théorème aux espaces de Banach qui contiennent un espace isomorphe à $\ell_1(\mathbb{N})$.

2. Espaces de Banach contenant $\ell_1(\mathbb{N})$.

On dit qu'une suite (x_n) de X est équivalente à $\ell_1(\mathbb{N})$ s'il existe des constantes k_1 et k_2 telles que

$$k_1 \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \|\sum_{i=1}^n a_i x_i\| \leq k_2 \sum_{i=1}^n |a_i|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a_i \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME 2. - *Soit* B *un espace de Banach séparable. S'il existe dans* B'' *une suite bornée ne possédant aucune sous-suite convergente pour* $\sigma(B'', B')$, *alors* B *contient une suite équivalente à* $\ell_1(\mathbb{N})$.

COROLLAIRE. - *Soit* B *un espace de Banach (séparable ou non), et* (g_n) *une suite bornée de* B *qui n'admet aucune sous-suite de Cauchy pour* $\sigma(B, B')$, *alors*

(g_n) <u>admet une sous-suite équivalente à</u> $\ell_1(\underset{\sim}{N})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ODELL (E.) and ROSENTHAL (H. P.). – A double-dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ^1, Israël J. of Math., t. 20, 1975, p. 375-384.

[2] ROSENTHAL (H. P.). – A characterization of Banach spaces containing ℓ^1, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 71, 1974, p. 2411-2413.

[3] ROSENTHAL (H. P.). – Pointwise compact subsets of the first Baire class (à paraître).

(Texte reçu le 21 février 1977)

Michèle CAPON
Mathématiques, Bâtiment 425
Université de Paris-sud
Campus universitaire
91405 ORSAY