Gilles Godefroy

Topologies subordonnées

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. nº C10, p. C1-C5
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A20_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, Communication C10, 5 p.

TOPOLOGIES SUBORDONNÉES

par Gilles GODEFROY

J'étudie dans ce travail une relation de "subordination" entre deux topologies d'e. l. c. comparables sur le même espace vectoriel. J'ai essayé de donner quelques exemples qui montrent que la notion introduite présente un intérêt.

DÉFINITION 1. - *Soit* E *un espace vectoriel,* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{T}'$ *deux topologies d'espace localement convexe sur* E *. La topologie* $\mathcal{T}'$ *est dite subordonnée à la topologie* $\mathcal{T}$ *si* $\mathcal{T}'$ *est plus fine que* $\mathcal{T}$ *, et s'il existe une base de voisinages de* 0 *pour* $\mathcal{T}'$ *, formés d'ensembles convexes équilibrés et* $\mathcal{T}$*-fermés.*

Donnons d'abord sans démonstration quelques propriétés simples.

PROPOSITION 2. *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un e. l. c.,* $\mathcal{T}'$ *une topologie subordonnée à* $\mathcal{T}$ *. Soit* F *un e. l. c. tonnelé. Soit* $\varphi : F \to (E, \mathcal{T})$ *une application linéaire continue. Alors* $\varphi : F \to (E, \mathcal{T}')$ *est continue.*

PROPOSITION 3. - *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un e. l. c. tonnelé, et* $\mathcal{T}'$ *une topologie subordonnée à* $\mathcal{T}$ *. Alors* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{T}'$ *sont identiques.*

On identifie dans la suite une topologie d'e. l. c. et la structure uniforme qui s'en déduit naturellement.

PROPOSITION 4. - *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un e. l. c., et* $\mathcal{T}'$ *une topologie subordonnée à* $\mathcal{T}$ *. Alors toute partie* X *de* E *complète pour* $\mathcal{T}$ *est complète pour* $\mathcal{T}'$ *.*

La proposition se déduit aisément d'un théorème bien connu (voir [1], p. 16, proposition 7).

La proposition 2 amène à se demander si on peut comparer les bornés des topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. On a, en effet, le résultat suivant.

THÉORÈME 5. - *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un e. l. c.. Soit* $\mathcal{T}'$ *une topologie subordonnée à* $\mathcal{T}$ *. Soit* B *une partie convexe équilibrée bornée et complète dans* $(E, \mathcal{T})$ *; alors la partie* B *est bornée dans* $(E, \mathcal{T}')$.

Démonstration. - Soit $\langle B \rangle$ l'espace vectoriel engendré par B , et j_B la jauge associée à B . L'espace $(\langle B \rangle, j_B)$ est un espace normé ; c'est de plus un Banach. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\langle B \rangle, j_B)$. Il existe alors N tel que $\forall n \geqslant N$, $\tilde{x}_n - x_N \in B$.

On est donc ramené à une suite dans B ; or B est complet, donc fermé pour $\mathcal{T}$. Le résultat déjà utilisé ([1], p. 16, proposition 7) montre que l'espace (B, j_B)

est complet, et donc que la suite $(x_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ est convergente.

On considère alors l'application

$$\mathrm{Id} : (\langle B \rangle , j_B) \to (E , \mathcal{T}) .$$

B étant borné, cette application est continue ; d'après la proposition 2, elle est aussi continue de $(\langle B \rangle , j_B)$ dans $(E , \mathcal{T}')$: et par conséquent la partie B est $\mathcal{T}'$-bornée.

C. Q. F. D.

<u>Remarques</u>. - Les hypothèses "B complet" et "B convexe équilibré" sont indispensables, comme on le verra sur des exemples.

Le résultat ci-dessus, ainsi que les suivants, resteraient valables si on remplaçait, dans la définition de la "subordination", "$\mathcal{T}$-fermé" par "$\mathcal{T}$-borélien". Il semble cependant que cette généralisation soit sans intérêt dans les exemples.

Donnons maintenant deux corollaires intéressants du théorème 5.

COROLLAIRE 6. - <u>Soit</u> $(E , \mathcal{T})$ <u>un e. l. c. complet</u>. <u>Soit</u> $\mathcal{T}'$ <u>une topologie subordonnée à</u> $\mathcal{T}$. <u>Alors toute partie bornée pour</u> $\mathcal{T}$ <u>est bornée pour</u> $\mathcal{T}'$.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de remarquer que si B est une partie bornée, son enveloppe convexe équilibrée fermée est bornée et complète, puisque l'espace $(E , \mathcal{T})$ est complet. On peut alors appliquer le théorème 5.

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u>. - La proposition 3 montre que ce résultat ne s'appliquera utilement que dans le cadre des e. l. c. complets non tonnelés, en particulier non métrisables.

COROLLAIRE 7. - <u>Soit</u> $(E , \mathcal{T})$ <u>un e. l. c. et</u> $\mathcal{T}'$ <u>une topologie subordonnée à</u> $\mathcal{T}$. <u>Soit</u> K <u>une partie convexe de</u> E, <u>compacte pour</u> $\mathcal{T}$; <u>alors</u> K <u>est bornée pour</u> $\mathcal{T}'$.

<u>Démonstration</u>. - L'enveloppe convexe équilibrée de K est l'image continue de $K \times K \times [0 , 1]$; elle est donc $\mathcal{T}$-compacte, donc $\mathcal{T}$-complète. On peut à nouveau appliquer le théorème 5.

C. Q. F. D.

EXEMPLES.

<u>Exemple A</u> : Soit E un espace normé, E' son dual. La topologie forte est subordonnée à la topologie $\sigma(E , E')$. Les résultats précédents se retrouvent aisément, car ces deux topologies étant compatibles, elles admettent les mêmes bornés.

<u>Exemple B</u> : Soit E un espace normé, E' son dual. La topologie forte sur E' est subordonnée à la topologie $\sigma(E' , E)$. Les résultats précédents sont non triviaux dans le cas où E n'est pas tonnelé ; il suffit, si E est tonnelé, d'appli-

quer Banach-Steinhaus.

Exemple C : Soit Ω localement compact, et μ une mesure de Radon positive sur Ω. Soient p et p' tels que $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant +\infty$. On considère $E = L^p \cap L^{p'}$. La norme $N_1 = \| \|_p + \| \|_{p'}$ est subordonnée à la norme $\| \|_p$, ou à la norme $\| \|_{p'}$.

Exemple D : Soit X un espace localement compact, pseudo-compact. La topologie de la convergence uniforme, définie sur $\mathcal{C}(X)$, est subordonnée à la topologie de la convergence compacte. Le corollaire 6 montre alors qu'une partie bornée pour la convergence compacte est uniformément bornée.

Exemple E : Soit E l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\underset{\sim}{R}$ dans $\underset{\sim}{R}$. La topologie de la convergence uniforme est subordonnée à la topologie de la convergence simple. Le corollaire 7 donne : Soit $\underset{\sim}{C}$ un convexe compact de fonctions réelles bornées (pour la convergence simple). Alors il existe K tel que

$$\underset{\sim}{C} \subseteq \{f \in E \ ; \ \|f\|_\infty \leqslant K\} .$$

Remarque. - On voit aisément sur cet exemple, que les hypothèses du théorème 5 ne peuvent être affaiblies. En effet, soit

$$f_n : \underset{\sim}{R} \to \underset{\sim}{R} .$$
$$x \to 0 \quad \text{si} \quad x \neq n .$$
$$n \to n .$$

On a $\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$. L'ensemble $K = \{f_n\} \cup \{0\}$ est donc un compact pour la convergence simple, et il n'est pas uniformément borné. Quant à son enveloppe convexe, elle n'est pas compacte, et son enveloppe convexe équilibrée n'est pas complète.

Exemple F : Cet exemple est un cas particulier de l'exemple B. Soit X localement compact, et $\mathcal{M}^b(X)$ l'espace des mesures de Radon bornées sur X. La topologie de la norme est subordonnée à la topologie de la convergence vague (car $K(X)$ est normiquement dense dans $C_0(X)$). Le corollaire 7 donne : Soit K un convexe compact de $\mathcal{M}(X)$, muni de la convergence vague, formé de mesures bornées. Alors $\{|\mu|(X) \ ; \ \mu \in K\}$ est borné dans $\underset{\sim}{R}$.

Remarque : Si on se place, dans $\mathcal{M}^b(X)$ muni de la convergence étroite, le résultat ci-dessus est vrai sans l'hypothèse de convexité (Banach-Steinhaus). Mais dans les hypothèses ci-dessus, la convexité est indispensable.

Exemple G : Soit V l'espace vectoriel des fonctions de $[0 , 1]$ dans $\underset{\sim}{R}$, à variation bornée. Soit N la norme

$$N : V \to \underset{\sim}{R}$$
$$f \to |f(0)| + V_0^1 f .$$

La topologie induite par la norme N est subordonnée à la topologie de la convergence simple. On va donner une application simple du corollaire 7 :

PROPOSITION 8. - Soit K un compact de $\mathfrak{F}([0\,,\,1]\,;\,\mathbb{R})$ muni de la convergence simple, formé de fonctions à variations bornées $(K \subseteq V \subseteq \mathfrak{F}([0\,,\,1]\,;\,\mathbb{R}))$. Alors $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ est contenue dans V si, et seulement si, $\{V_0^1 f\,;\; f \in K\}$ est borné dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. - Supposons que $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ soit inclus dans V ; c'est alors un convexe compact de V. Le corollaire 7 montre que $\{N(f)\,;\, f \in K\}$ est borné, d'où le résultat.

Inversement, si $\{V_0^1 f\,;\; f \in K\} \subseteq [0\,,\,+M]$, on voit aisément, par l'absurde, que pour toute fonction $g \in \overline{\mathrm{conv}}(K)$, on aura $V_0^1 g \leq M$.

C. Q. F. D.

Remarque. - Un résultat de FREMLIN montre que, dans tous les cas, on aura

$$\overline{\mathrm{conv}}(K) \subseteq B_1([0\,,\,1])\,,$$

où $B_1([0\,,\,1])$ est l'espace vectoriel des fonctions de première classe de Baire.

Exemple II : Soit D le disque unité fermé du plan complexe. Soit $\mathcal{H}^1(D^\circ)$ l'ensemble des fonctions bornées sur D° et holomorphes dans D°. La topologie $\mathfrak{T}'$ de la convergence uniforme sur D° est subordonnée à la topologie $\mathfrak{T}$ de la convergence sur les compacts de D°. On pose alors, pour tout $n \geqslant 2$,

$$K_n = \{z \in \mathbb{C}\,;\; |z| \leq 1 - \tfrac{1}{n}\}\,.$$

On peut alors énoncer la propriété suivante.

PROPOSITION 9. - Soit $\mathcal{H}(D^\circ)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans D°. A toute suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ de $\mathbb{R}_*^+$, croissante vers l'infini, on fait correspondre la partie $M(\{\alpha_n\})$ de $\mathcal{H}(D^\circ)$, définie par

$$M(\{\alpha_n\}) = \{f \in \mathcal{H}(D^\circ)\,;\; \forall\, n \geqslant 2\,,\;\; |f(z)| \leq \alpha_n \text{ pour tout } z \in K_n\}\,.$$

Alors, pour toute suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ de $\mathbb{R}_*^+$, croissante vers l'infini, $M(\{\alpha_n\})$ contient des fonctions de $\mathcal{H}(D^\circ)$, non bornées sur D°.

Démonstration. - On raisonne par l'absurde ; supposons que, pour une certaine suite $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 2}$ vérifiant les conditions de l'énoncé, on ait $M(\{\alpha_n\}) \subseteq \mathcal{H}^1(D^\circ)$. On sait que $M(\{\alpha_n\})$ est un convexe compact de $\mathcal{H}(D^\circ)$ muni de la convergence compacte, donc ici de $\mathcal{H}^1(D^\circ)$. Par conséquent (corollaire 7),

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \text{ tel que } |f(z)| \leq A\,,\;\; \forall\, f \in M(\{\alpha_n\})\,,\;\; \forall\, z \in D^\circ\,.$$

Mais ceci est absurde. En effet, on voit aisément que pour un $k \in \mathbb{N}$ convenable, la fonction $\varphi_k(z) = (A + 1) \times z^k$ appartient à $M(\{\alpha_n\})$, car soit

$$n_0 = \inf\{n \ ; \ \alpha_n \geqslant A + 1\} .$$

La suite (φ_k) tend uniformément vers zéro sur K_{n_0} . Il suffit de prendre k_0 tel que $|\varphi_{k_0}| \leqslant \alpha_2$ sur K_{n_0} .

J'espère avoir ainsi montré que cette notion de subordination permet de simplifier et de coordonner un certain nombre de résultats "à la Banach-Steinhaus".

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Topologie générale, tome II : chapitres 5 à 10. - Paris, Hermann, 1974.

(Texte reçu le 28.6.76)

Gilles GODEFROY
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05