

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MICHEL TALAGRAND

**Les fonctions affines sur $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ ayant la propriété de
Baire faible sont continues**

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° C7, p. C1-C3

http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A17_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES FONCTIONS AFFINES SUR $(0, 1)^{\mathbb{N}}$
 AYANT LA PROPRIÉTÉ DE BAIRE FAIBLE SONT CONTINUES

par Michel TALAGRAND

Dans [1], Michèle CAPON a prouvé que toute fonction affine et borélienne (donc bornée) sur $(0, 1)^{\mathbb{N}}$, est continue. Nous allons prouver le résultat plus précis suivant :

THÉORÈME. - Toute fonction affine sur $(0, 1)^{\mathbb{N}}$, possédant la propriété de Baire faible est continue.

Notons bien que l'on ne suppose pas a priori la fonction bornée.

Démonstration. - Soit φ une telle fonction, que l'on peut supposer nulle en 0. Prouvons tout d'abord que φ est bornée sur un résiduel. Puisque

$$(0, 1)^{\mathbb{N}} = \bigcup_n \varphi^{-1}((-n, n)),$$

il existe un entier n tel que $A = \varphi^{-1}((-n, n))$ ne soit pas maigre. Puisque A possède la propriété de Baire, il existe un ouvert V non vide tel que $A \cap V$ soit un résiduel de V . Par définition de la topologie de $(0, 1)^{\mathbb{N}}$, il existe un entier p , un nombre $\varepsilon > 0$ et des $0 \leq a_i \leq 1$ pour $1 \leq i \leq p$ tels que

$$W = \{(x_n) ; i \leq p \implies |x_i - a_i| \leq \varepsilon\} \subset V.$$

Puisque $(0, 1)^{\mathbb{N}}$ est compact, il existe des éléments b^1, \dots, b^m de $(0, 1)^{\mathbb{N}}$, avec $b_k^i = 0$ pour $k > p$, et tels que

$$(0, 1)^{\mathbb{N}} = \bigcup_{i=1}^m (b^i + W) \cap (0, 1)^{\mathbb{N}}.$$

Il en résulte que

$$B = \bigcup_{i=1}^m (b^i + A) \cap (0, 1)^{\mathbb{N}}$$

est un résiduel, sur lequel φ est bornée. Soit $|\varphi| \leq M$ sur B .

Précisons quelques notations. Pour toute partie I de \mathbb{N} , soit θ_I l'homéomorphisme de $(0, 1)^{\mathbb{N}}$ sur lui-même, défini par $\theta_I(x) = (y_n)_n$ avec

$$\begin{aligned} y_n &= 1 - x_n & \text{si } n \in I \\ y_n &= x_n & \text{si } n \notin I. \end{aligned}$$

Pour toute partie J de \mathbb{N} , notons π_J la projection canonique de $(0, 1)^{\mathbb{N}}$ sur $(0, 1)^J$ ($(0, 1)^J$ étant identifié à un sous-ensemble de $(0, 1)^{\mathbb{N}}$). Pour tout x de $(0, 1)^{\mathbb{N}}$, on a

$$(1) \quad x + \theta_I(x) = e_I + 2\pi_{I^c}(x)$$

où $e_I = (X_I(n))_n$. Enfin, pour alléger l'écriture, posons $e_i = e_{\{i\}}$.

Montrons maintenant que l'on peut se ramener au cas $\varphi(e_n) = 0$, $\forall n \in \underline{\mathbb{N}}$.

Fixons un ensemble I fini. Prouvons d'abord que $|\varphi|$ est $\leq M+1$ sur un résiduel C de $[0, 1]^{I^c}$. Si $\delta > 0$ est assez petit, on a $|\varphi(\sum_{i \in I} x_i e_i)| \leq 1$ dès que $|x_i| < \delta$ pour tout i dans I . L'ensemble

$$D = B \cap [0, \delta]^I \times [0, 1]^{I^c}$$

est un résiduel de $[0, \delta]^I \times [0, 1]^{I^c}$, sur lequel $|\varphi| \leq M$. Il suffit alors de choisir $C = \pi_{I^c}(D)$.

L'application π_{I^c} est continue et ouverte, donc $A \cap \theta_I^{-1}(A) \cap \pi_{I^c}^{-1}(C)$ est un résiduel de $[0, 1]^{\underline{\mathbb{N}}}$. En particulier, il n'est pas vide. Si l'on applique φ à l'égalité (1), où x est choisi dans ce résiduel, il vient $|\varphi(e_I)| \leq 4M + 2$. Puisque $\varphi(e_I) = \sum_{i \in I} \varphi(e_i)$, il en résulte que la série $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(e_i)|$ converge. Ainsi, la fonction h , définie sur $[0, 1]^{\underline{\mathbb{N}}}$, par

$$h : (x_i)_{i \in \underline{\mathbb{N}}} \rightarrow \sum_{i \in \underline{\mathbb{N}}} x_i \varphi(e_i)$$

est affine continue. En remplaçant φ par $\varphi - h$, on peut donc supposer $\varphi(e_i) = 0$, $\forall i \in \underline{\mathbb{N}}$.

Prouvons maintenant que $\varphi(e_I) = 0$, pour toute partie I de $\underline{\mathbb{N}}$. Pour tous entiers n et k , l'ensemble $\varphi^{-1}(\{(k/2^n), ((k+1)/2^n)\})$ a la propriété de Baire. Puisque $\varphi(e_i) = 0$ pour tout i , l'appartenance de x à cet ensemble ne dépend pas des premières coordonnées de x . On en déduit, d'après la propriété dite "loi 0-1" que cet ensemble est soit résiduel, soit maigre. Donc pour chaque n existe un seul entier, soit k_n , tel que $\varphi^{-1}(\{(k_n/2^n), ((k_n+1)/2^n)\})$ soit résiduel. Et si l'on pose $\alpha = \bigcap_n \{(k_n/2^{n+1}), ((k_n+1)/2^n)\}$, alors $\varphi^{-1}(\alpha)$ est un résiduel. Montrons que $\alpha = 0$. Ceci va résulter du lemme suivant.

LEMME (CHRISTENSEN, [2], p. 97). - Pour tout résiduel A de $[0, 1]^{\underline{\mathbb{N}}}$, il existe x, y, z dans A tels que $x = y + z$.

Démonstration. - Les deux fonctions g et h , définies par

$$g(a, b) = a \cdot (e_{\underline{\mathbb{N}}} - b)$$

$$h(a, b) = a \cdot b$$

sont continues, surjectives et ouvertes de $[0, 1]^{\underline{\mathbb{N}}} \times [0, 1]^{\underline{\mathbb{N}}}$ sur $[0, 1]^{\underline{\mathbb{N}}}$. On en déduit que $g^{-1}(A) \cap h^{-1}(A) \cap (A \times [0, 1]^{\underline{\mathbb{N}}})$ est un résiduel donc non vide. Si (a, b) est un point de cet ensemble, il suffit de prendre $x = a$, $y = g(a, b)$, $z = h(a, b)$.

C. Q. F. D.

En appliquant ce lemme avec $A = \varphi^{-1}(\alpha)$, on voit que $\alpha = \alpha + \alpha$, d'où $\alpha = 0$.

Fixons la partie I de \mathbb{N} . Pour tout x de $B = A \cap \theta_I^{-1}(A)$, on a

$$x + \theta_I(x) = e_I + 2\pi_{I^c}(x),$$

d'où $\varphi(\pi_{I^c}(x)) = -\varphi(e_I)/2$. Ainsi $\pi_{I^c}(B)$ est un résiduel de $(0, 1)^{I^c}$ sur lequel φ est constante. Si I^c est infini, le lemme montre que cette constante est nulle, donc que $\varphi(e_I) = 0$. Si I^c est fini, on a encore $\varphi(e_I) = 0$, puisque $\varphi|_{(0,1)^{I^c}} \equiv 0$.

Prouvons enfin que φ est nulle. Fixons $a \in (0, 1)^{\mathbb{N}}$. Soit ψ l'application de $(0, 1)^{\mathbb{N}}$ dans lui-même, donné par $\psi(x) = (y_n)_n$, où

$$\begin{aligned} y_n &= a_n + x_n && \text{si } a_n + x_n \leq 1 \\ &= a_n + x_n - 1 && \text{si } a_n + x_n > 1. \end{aligned}$$

La restriction de ψ au G_δ dense $\{x \in (0, 1)^{\mathbb{N}}; \forall n \ x_n \notin \{0, 1-a_n, 1\}\}$ est un homéomorphisme de cet ensemble sur le G_δ dense

$$\{x \in (0, 1)^{\mathbb{N}}; \forall n \ x_n \notin \{0, a_n, 1\}\}.$$

Il en résulte que l'image réciproque par ψ de tout résiduel est encore un résiduel.

Soit x un point de l'ensemble $A \cap \psi^{-1}(A)$ qui est non vide, étant un résiduel. Soit I l'ensemble des n tels que $a_n + x_n > 1$. On a $\psi(x) = a + x - e_I$ par définition de ψ . Et puisque $\varphi(a) = \varphi(\psi(a)) = \varphi(e_I) = 0$, on a $\varphi(a) = 0$.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CAPON (Michèle). - Etude des fonctions affines boréliennes sur la boule unité de $f^\infty(\mathbb{N})$, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 14e année, 1974/75, communication n° 1, 4 p.
- [2] CHRISTENSEN (J. R. C.). - Topology and Borel structure. - Amsterdam, North-Holland publishing Company ; New York, American Elsevier publishing Company, 1974 (North-Holland Mathematics Studies, 10 ; Notas de Matematica, 51).

(Texte reçu le 30 janvier 1976)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05